1. Fejezet

MATROIDELMÉLETI ALAPOK

1.1 BEVEZETÉS

A matroid egy $(S, \mathcal{F})$ párral megadható absztrakt struktúra, ahol S véges halmaz, $\mathcal{F}$ pedig az S részhalmazainak bizonyos axiómákat kielégítő rendszere. A fogalmat Hassler Whitney vezette be 1933-ban. Amiképp olyan ismert struktúrák, mint a csoport, a gyűrű vagy a test, bizonyos műveletek lényegi tulajdonságait akarják általánosságban megfogni, avagy a metrikus tér a távolság fogalmát általánosítja, a matroid fogalma a „függetlenséget", különösképpen pedig a lineáris függetlenséget helyezi általános absztrakt keretbe.

Egy másik lehetséges megközelítés a matroidokat olyan rendszerekként vezeti be, melyekre a mohó algoritmus minden költség-függvény esetén helyes eredményt ad. Ismeretes, hogy egy élsúlyozott összefüggő irányítatlan gráf maximális súlyú feszítő fájának meghatározása a mohó algoritmussal történhet: egymás után választunk éleket, mindig a legnagyobb súlyút, csak arra ügyelve, hogy a kiválasztott élek erdőt alkossanak. Bebizonyítható, hogy így maximális súlyú feszítő fát kapunk. Ugyanakkor, ha például élsúlyozott páros gráfban akarnánk maximális súlyú párosítást keresni, akkor nem okoz nehézséget olyan példát találni, ahol a mohó algoritmus nem ad optimális párosítást. Ennek kapcsán felvetődik a kérdés, hogy melyek azok a lényegi vonások, amelyek a mohó algoritmus helyes működését lehetővé teszik. A válaszhoz mindenekelőtt definiálni kell, hogy pontosan mit is értünk mohó algoritmuson. Egy lehetséges definíció a következő: az S alaphalmaz egy leszálló $\mathcal{F}$ részhalmaz-rendszerére és egy S-en értelmezett tetszőleges súlyfüggvényre egymás után válasszunk ki S-ből elemeket, mindig a lehetséges legnagyobb súlyút, csak arra ügyelve, hogy a kiválasztott elemek egy $\mathcal{F}$-beli részhalmazt alkossanak. Mármost a matroidok éppen az olyan leszálló halmaz-rendszerek, melyekre ez a mohó algoritmus tetszőleges súlyfüggvényre megadja az optimumot. (Leszálló azt jelenti, hogy $Y \subset X \in \mathcal{F}$ esetén $Y \in \mathcal{F}$.) Megjegyzendő azonban, hogy vannak egyéb helyesen működő mohó algoritmusok is, melyeknek matroidokhoz nincs közük. Például, ha egy részbenrendezett halmazt akarunk minimális számú antiláncra felbontani, akkor ezt lehet mohó módon: az első antilánc álljon a minimális elemekből, a második a maradék minimális elemeiből, és így tovább.

Jelen felépítésünkben azonban a matroidok bevezetésére nem ezt az utat követjük, hanem a Whitney által eredetileg javasoltat, amely a lineáris függetlenséget absztrahálja. A módszer a szokásos: kiválasztjuk a lineáris függetlenség néhány alapvető tulajdonságát (amelyek tehát a lináris algebrában bizonyított állítások) és ezeket tesszük meg axiómáknak. A matroidok fogalmának bevezetése több, egymással ekvivalens axiómarendszerrel is történhet. Ezeket azért érdemes tárgyalni, mert különféle alkalmazásokban más-más axiómarendszerrel könnyebb dolgozni.

A matroidok hasznossága két tényből fakad (mint ahogy bármely egyéb jól sikerült struktúráé is). Egyrészt kellően általánosak ahhoz, hogy számos helyen alkalmazhatóak legyenek, ugyanakkor elég speciálisak is, hogy mélyenfekvő, értékes eredményeket nyerjünk róluk.

E jegyzet célja az alapfogalmak bevezetésén túl a matroidok szerepének bemutatása a kombinatorikus optimalizálásban. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a matroidelméletnek vannak más, fontos ágai (mint például a maroidok reprezentálhatósága), melyek itt nem kerülnek tárgyalásra.

Néhány probléma

Kedvcsinálónak álljon itt néhány érdekes kombinatorikus optimalizálási feladat, melyek megoldása matroidok nélkül nemigen lehetséges, de legalább is kényelmetlen.

1. Gráfban keressünk k élidegen feszítő fát. Élsúlyozott gráfban keressünk olyan minimális súlyú részgráfot, amely tartalmaz k élidegen feszítő fát. Általánosabban: a gráf élhalmazán adott k súlyfüggvény, keressünk k élidegen feszítő fát úgy, hogy a fák súlyösszege minimális legyen, ahol az i-edik fa súlyát az i-edik súlyfüggvény definiálja.

2. Irányított gráfban keressünk olyan minimális súlyú részgráfot, amelyben egy gyökérpontból a digráf minden más pontjába vezet (a) k élidegen út, (b) k pontidegen út.

3. Gráfban keressünk olyan minimális költségű feszítő fát, melynek egy adott pontban a fokszáma előírt korlátok közé esik. Általánosabban: egy stabil halmaz minden pontjában a fa fokszáma megadott korlátok közé essék. (Ha minden pontra előírhatnánk korlátot, akkor a feladat speciális esetként már magában foglalná a Hamilton út keresésének NP-teljes feladatát.)

4. Pontsúlyozott digráfban keressünk csúcsoknak egy olyan minimális súlyú részhalmazát, amelyből minden csúcsba vezet k diszjunkt út.

5. A síkban véges sok pont közül válasszunk ki maximálisan sok diszjunkt ponthármast, melyek mindegyike valódi háromszöget feszít.

6. Egy irányítatlan gráfon Kötő és Vágó felváltva választanak még nem tekintett éleket. Kötő megerősítheti az élt, Vágó eltörölheti. Kötő célja, hogy megerősített élekből utat hozzon létre két előre adott pont között. Vágó célja egy olyan vágást eltörölni, amely elválasztja a két megadott pontot. Kinek, mikor van nyerő stratégiája?

Megjegyzések

A részletes tárgyalás megkezdése előtt álljon itt még néhány megjegyzés. Egy könyv, jegyzet iránt számos olvasói elvárás fogalmazható meg, melyek gyakran egymásnak is ellentmondanak. Például, jogos az igény olyan áttekintő jellegű felépítésre, amelyben a tételek könnyen adódnak egymásból, és szinte észrevétlenül juthatunk el mélyebb eredményekhez, érthetjük meg a belső összefüggéseket. Ugyanakkor az is természetes, ha egy konkrét nehezebb tételre szeretnénk közvetlen, direkt bizonyítást látni, amely lehet, hogy önmagában ravasz vagy ad hoc lépéseket tartalmaz, de nem támaszkodik korábbi eredmények sorára, azaz nem kell végigjárnunk az egész megelőző elméletet. Emiatt van az, hogy a legfontosabb eredményeket nem csak a kiépített elmélet gyümölcseként vezetjük le, hanem gyakran mindentől független, direkt bizonyítás is bemutatásra kerül. Nem-egyszer ugyanarra az eredményre több bizonyítás is szerepel annak érdekében, hogy a módszereket alaposabban megismerhessük.

Az olvasónak hasznos lehet, ha a felépítés a speciálisabb esetektől halad az egyre általánosabb felé, mert így az anyagot fejlődésében ismerheti meg. Az ilyen megközelítés hátránya viszont, hogy ugyanaz a gondolatmenet többször is leírásra kerül és a részletek eltakarhatják a lényeget, arról nem is beszélve, hogy gyakran egy új fogalom segítségével megfogalmazott általánosabb eredmény bizonyítása rövidebb és egyszerűbb, mint a speciális esetek direkt bizonyítása. Kézenfekvő tehát az a fordított megközelítés is, amikor rögtön a legáltalánosabb tételt bizonyítjuk, és abból vezetjük le a speciális eseteket. Ez az út jóval tömörebb tárgyalást tesz lehetővé, ugyanakkor rejtve hagyja, hogy miként lehetett rájönni azokra az általános eredményekre, melyek bizonyítása rövid és amelyekből mégis (amúgy) nehéz eredmények sora vezethető le.

Egy további konfliktus abból fakad, hogy az elmélet kiépítése közben bizonyos helyen könnyen adódó eredmények esetleg csak később kerülnek felhasználásra. Emiatt gyakran úgy jártam el, hogy egy-egy következmény bizonyítását a felbukkanás helyén feladatként kitűztem, majd az eredményt a későbbi felhasználásakor újra kimondtam: ott közölve a bizonyítást.

Egy könyvet van amikor úgy használunk, hogy az elejétől elkezdve rendszeresen feldolgozzuk, máskor meg csupán egy konkrét dolognak akarunk utána nézni. A jegyzet megannyi példát, előállítást mutat matroidokra. A rendszeres feldolgozáshoz hasznosabbnak tűnik ezeket rögtön akkor bemutatni, amikor a hozzájuk szükséges fogalmak már rendelkezésre állnak. Ugyanakkor az is megkönnyítheti az áttekintést, ha a példákról, konstrukciókról egy külön fejezet ad számot. E konfliktust nem tudtam igazán feloldani és végül az utóbbi megoldást választottam. Emiatt javaslom az olvasónak, hogy első olvasáskor lapozzon néha előre a 2. részhez. Hasonló dilemmát okozott az alkalmazások bemutatása. Dönteni kellett, hogy ezeket rögtön akkor érdemes-e tárgyalni, amikor a megfelelő matroidelméleti eredmény már rendelkezésre áll, oldva ezzel a tisztán matroidos szöveg esetleges szárazságát, vagy esetleg csak akkor, amikor az adott alkalmazásra vonatkozó összes előkészület megtörtént. Bár az első megoldás azzal a veszéllyel jár, hogy ugyanazon alkalmazás több helyen is felbukkan, ami rontja az áttekinthetőséget, mégis e mellett döntöttem, mert a jegyzetben az alkalmazások mégis csak a matroidelmélet használhatóságának illusztrálására szolgálnak.

A jegyzetben többnyire olyan tételek, bizonyítások, algorimusok, alkalmazások kerülnek bemutatásra, melyek az anyag megértéséhez vagy alkalmazásához nélkülözhetetlenek. Van azonban néhány olyan eredmény vagy bizonyítás is, melyek kevésbé fontosak és inkább csak a jobb tájékozódást segítik elő. Ezeket $(*-)$ jellel jelöltem. Végezetül hadd hívjam fel a figyelmet a kitűzött feladatokra és gyakorlatokra. Ezek önálló megoldása jelentősen hozzájárul az anyag jobb megértéséhez és a bizonyítástechnikák alaposabb elsajátításához.

1.2 FÜGGETLENSÉG ÉS RANG

1.2.1 Függetlenségi axiómák

Adott egy S véges halmaz és részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Az $M = (S, \mathcal{F})$ párt **matroid**nak nevezzük, ha fennáll a következő három tulajdonság.

(I1) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
(I2) *Ha* $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$, *akkor* $X \in \mathcal{F}$.
(I3) *Minden* $X \subseteq S$ *részhalmazra az* $\mathcal{F}$*-nek* X*-ben fekvő,* X*-ben legbővebb tagjai azonos elemszámúak.*

Az $\mathcal{F}$ tagjait szokás **független** halmazoknak nevezni, míg S többi részhalmazát **függő**nek. Az axiómák tehát azt kívánják, hogy (I1) az üres halmaz mindig független, (I2) független halmaz részhalmaza is független, (I3) tetszőleges X részhalmazban az X-ben már nem bővíthető független halmazok elemszáma ugyanaz. Ezt a csupán X-től függő, $r(X)$-szel jelölt számot az X halmaz **rang**jának nevezik. A **matroid rangján** az alaphalmazának rangját értjük. Két matroidot akkor tekintünk **izomorf**nak, ha az alaphalmazaik között létezik egy olyan egy-egy értelmű megfeleltetés, amelynél független részhalmaz képe független és függő részhalmaz képe függő. Az alábbiakban egy halmazra vonatkozó „legbővebb”, „nem bővíthető”, „tartalmazásra nézve maximális” jelzőket egymás szinonímáiként fogjuk használni.

Könnyű látni, hogy ekvivalens axióma-rendszert kapunk, ha az (I1) axiómát kicseréljük a következővel:

(I1$'$) $\mathcal{F}$ *nemüres.*

Az (I3) axióma azt jelenti, hogy X-ben minden független részhalmaz kibővíthető X-nek egy maximális, azaz $r(X)$ elemszámú, független részhalmazává. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a mohó algoritmus S-nek mindig egy maximális össz-súlyú független részhalmazát szolgáltatja bármilyen $0-1$ értékű súlyfüggvény esetén is alkalmazzuk. Amint azt később kimutatjuk, a mohó algoritmus bármilyen súlyfüggvényre helyesen dolgozik.

Az (I3) tulajdonság helyett gyakran az alábbit tekintik:

(I3$'$) *Legyen* $K, N \in \mathcal{F}$*, melyekre* $|K| < |N|$*. Ekkor létezik olyan* $x \in N - K$*, amelyre* $K + x \in \mathcal{F}$*.* (Magyarul, egy kisebb elemszámú független halmaz mindig bővíthető egy nagyobb elemszámú független halmazból vett alkalmas elemmel.)

Állítás 1.2.1 (I3) *ekvivalens* (I3$'$)*-vel.*

Biz. $\Rightarrow$ Legyen $K, N \in \mathcal{F}$, melyekre $|K| < |N|$ és legyen $S' := K \cup N$. Most (I3) miatt S'-nek minden nem bővíthető független részhalmaza legalább $|N|$ elemű és így (I3$'$) következik.

$\Leftarrow$ Tegyük fel, hogy $A, B \subseteq X$ függetlenek, és hogy $|A| < |B|$. (I3$'$) miatt létezik $y \in B - A$, melyre $A + y$ független. •

Az (I3) axióma egy kevesebbet követelő alakja a következő:

(I3$''$) *Ha* $I_k, I_{k+1} \in \mathcal{F}$ *és* $|I_k| = k, |I_{k+1}| = k+1$*, akkor létezik egy* $s \in I_{k+1} - I_k$ *elem úgy, hogy* $I_k + s \in \mathcal{F}$*.*

Érdekes, hogy már (I3$''$) segítségével is definiálhatjuk a matroidokat, annak ellenére, hogy (I3$''$) önmagában gyengébb, mint (I3).

Állítás 1.2.2 $\{$(I1),(I2),(I3)$\}$ *ekvivalens* $\{$(I1),(I2), (I3$''$)$\}$*-vel.*

Biz. (I3$''$) nyilván speciális esete (I3$'$)-nek. A megfordításhoz azt igazoljuk, hogy (I3$'$) következik (I2) és (I3$''$)-ből. Legyen $k := |K|, I_k := K$ és legyen I_{k+1} az N-nek egy $(k+1)$-elemű részhalmaza. Az (I2) axióma szerint I_{k+1} független, így létezik egy olyan $s \in I_{k+1} - I_k \subseteq N - K$ elem, amelyre $I_k + s \in \mathcal{F}$, azaz (I3$'$) fennáll. •

A definícióból rögtön következik, hogy ha $M = (S, \mathcal{F})$ matroid és $S' \subseteq S$, akkor $M' := (S', \mathcal{F}')$ is matroid, ahol $\mathcal{F}' := \{F : F \subseteq S', F \in \mathcal{F}\}$. M'-t az M **részmatroid**jának nevezik. Azt is mondjuk, hogy az M' matroid M-ből a $Z := S - S'$ halmaz **elhagyás**ával (**törlés**ével) keletkezik, vagy hogy M' az M **megszorítás**a S'-re. Jelölésben $M' = M - Z$ vagy $M' = M|S'$.

A harmadik függetlenségi axiómát még tovább gyengíthetjük.

(I3$'''$) *Minden* S*-beli legbővebb független részhalmaznak az elemszáma ugyanaz az* r *szám, és ha* $I_{r-1}, I_r \in \mathcal{F}$*,* $|I_r| - 1 = |I_{r-1}| = r - 1$*, akkor létezik olyan* $s \in I_r - I_{r-1}$ *elem, amelyre* $I_{r-1} + s \in \mathcal{F}$*.*

Állítás 1.2.3 $\{$(I1),(I2),(I3$'$)$\}$ *ekvivalens* $\{$(I1),(I2),(I3$'''$)$\}$*-vel.*

Biz. Azt kell igazolnunk, hogy a második rendszerből következik (I3$'$). Legyen $K, N \subseteq S$ két olyan tagja $\mathcal{F}$-nek, melyekre $|K| < |N|$. Ekkor (I3$'''$) miatt létezik $B_K, B_N \in \mathcal{F}$, melyekre $K \subseteq B_K, N \subseteq B_N$ és $|B_K| = |B_N| = r$. Válasszuk ezeket úgy, hogy $B_K \cap B_N$ maximális legyen.

Állítjuk, hogy ilyenkor $(B_K - K) \cap N$ nem üres. Ennek igazolásához indirekt tegyük fel, hogy $(*)$ nem létezik $x \in (B_K - K) \cap N$ elem. Mivel $|K| < |N|$ és $|B_K| = |B_N|$, következik, hogy $|B_K - K| > |B_N - N|$ és így létezik egy $x_1 \in B_K - K$, amely nincs $B_N - N$-ben. A $(*)$ feltevés miatt $x_1 \notin B_N$, így az (I3$'''$) axióma miatt létezik egy $x_2 \in B_N - B_K$ elem, amelyre $B'_K := B_K - x_1 + x_2$ benne van $\mathcal{F}$-ben. Ilyen B'_K létezése viszont ellentmond $|B_K \cap B_N|$ maximalitásának.

Tetszőleges $x \in (B_K - K) \cap N$ elemre $K + x \subseteq B_K$, azaz $K + x \in \mathcal{F}$ és így (I3$'$) fennáll. $\bullet$

Az (I3$'$) axióma egy másirányú gyengítése a következő.

(I3$''''$) *Legyen $K, N \in \mathcal{F}$, melyekre $|K - N| = 1$, és $|N - K| = 2$. Ekkor létezik olyan $x \in N - K$, amelyre $K + x \in \mathcal{F}$.*

Feladat 1.2.1 *Igazoljuk, hogy* {(I1),(I2),(I3)} *ekvivalens* {(I1),(I2), (I3$''''$)}*-vel.*

Miért jó, hogy az axiómáknak gyengébb és erősebb változatait is tekintjük? Amikor matroidokról akarunk valamit bizonyítani, akkor kényelmesebb, ha erősebb tulajdonságok állnak rendelkezésre. Ha viszont valamely konkrétan megadott struktúráról akarjuk belátni, hogy matroid, akkor egyszerűbb a gyengébb axiómák fennállását igazolni.

Lássuk be a matroid rang-függvényének egy alapvető tulajdonságát.

Lemma 1.2.4 *A rang-függvény minden $X, Y \subseteq S$-re kielégíti a*

$$r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \tag{1.1}$$

szubmodularitási egyenlőtlenséget.

Biz. Legyen F egy maximális független részhalmaza $X \cap Y$-nak. Ekkor $|F| = r(X \cap Y)$ és a 3. axióma szerint F kibővíthető $X \cup Y$-ban egy N maximális, azaz $r(X \cup Y)$ elemszámú független részhalmazzá. F maximalitása miatt $N \cap X \cap Y = F$ és így $|N \cap X| + |N \cap Y| = |F| + |N|$. Most $N \cap X$ független része X-nek, így $r(X) \geq |N \cap X|$. Hasonlóan, $r(Y) \geq |N \cap Y|$, amiből $r(X) + r(Y) \geq |N \cap X| + |N \cap Y| = |F| + |N| = r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$. $\bullet$

Egy halmaz-függvényt, amely minden $X, Y \subseteq S$-re kielégíti (1.1)-t **teljesen szubmoduláris**nak vagy röviden **szubmoduláris**nak nevezünk. A matroid rang-függvény tehát szubmoduláris, monoton növő (azaz $X \subseteq Y$ esetén $r(X) \leq r(Y)$) és szubkardinális („elemszám alatti": minden $X \subseteq S$-re $r(X) \leq |X|$). Megjegyzendő, hogy vannak olyan szubmoduláris függvények, amelyek nem matroid rang-függvények. Például, egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban az S részhalmazain értelmezhetjük a $|\Gamma(X)|$ függvényt, amely az X-szel szomszédos T-beli csúcsok számát jelöli. Ez szubmoduláris, monoton, de nem szubkardinális. Egy irányított gráfban a csúcsok egy X részhalmazába belépő élek számát $\varrho(X)$-szel jelölve, kimutatható, hogy ϱ szubmoduláris, bár nem monoton és nem szubkardinális.

A szubmodularitás érdekes következménye az alábbi észrevétel.

Lemma 1.2.5 *Legyen b tetszőleges szubmoduláris függvény az S alaphalmazon. Rögzített $Z \subset S$ részhalmazra definiáljuk az $S - Z$ részhalmazain a $h_Z(X) := b(X \cup Z) - b(X)$ növekmény függvényt. Ekkor h_Z monoton csökkenő, azaz $X \subseteq Y$ esetén $h_Z(X) \geq h_Z(Y)$.*

Biz. A szubmodularis egyenlőtlenséget az $X' = X \cup Z$ és Y halmazokra felírva kapjuk, hogy $b(X \cup Z) + b(Y) = b(X') + b(Y) \geq b(X' \cap Y) + b(X' \cup Y) = b(X) + b(Z \cup Y)$, amiből $h_Z(X) = b(X \cup Z) - b(X) \geq b(Y \cup Z) - b(Y) = h_Z(Y)$.

Feladat 1.2.2 *Igazoljuk, hogy ha egy b halmazfüggvény esetén minden egyelemű Z halmazhoz tartozó növekmény függvény monoton csökkenő, akkor b szubmoduláris.*

1.2.2 Példák matroidokra

MÁTRIX-MATROID Adott (valamilyen test felett) egy A mátrix. Jelölje S az A oszlopainak halmazát. Definiáljuk $\mathcal{F}$-t úgy, hogy A oszlopainak egy F részhalmaza akkor tartozzék $\mathcal{F}$-hez, ha az F-beli oszlop-vektorok lineárisan függetlenek. Ekkor $(S, \mathcal{F})$ matroidot alkot. Valóban, az első két axióma triviálisan teljesül, míg a harmadik egy alapvető (elemi) tétel lineáris algebrából (aminek matroidos általánosítását, semmiféle lineáris algebrai tételt sem használva, nemsokára be is bizonyítjuk). Az így előálló matroidot **mátrix-matroid**nak nevezzük. Használatban van még a **lineáris** vagy **reprezentálható** matroid elnevezés is. Amennyiben az alaptest a $GF(2)$, **bináris matroid**ról beszélünk. A mátrix-matroidban egy X halmaz (matroidelméleti) rangja az X oszlopai által alkotott mátrix (lineáris algebrai) rangja.

AFFIN MATROID Legyen S az n-dimenziós tér pontjainak véges részhalmaza. S egy részhalmazát deklaráljuk függetlennek, ha affin független. (Szám n-esek egy halmazát akkor mondjuk affin függetlennek, ha mindegyiküket egy 1 értékű koordinátával kiegészítve lineárisan független ($n+1$ dimenziós) vektorokat kapunk.) Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az affin függetlenség is matroidot definiál. A síkban például a pontok, a pontpárok, valamint a nem egy egyenesen lévő ponthármasok affin függetlenek halmazokat alkotnak. Ebben a szemléletben a matroid elemei a tér pontjai, szemben a mátrix-matroiddal, ahol vektorok az alaphalmaz elemei. Az affin szemléletnek az az előnye, hogy segítségével síkban 3 (térben 4) rangú matroidokat ábrázolhatunk, míg vektorokkal síkban csak 2 (térben 3) rangúakat.

Speciális példa az $U_{4,2}$ matroid, amely a síkban négy darab egy egyenesen lévő pont által meghatározott affin matroid, amelyben tehát a legfeljebb kételemű halmazok a függetlenek.

Gyakorlat 1.2.3 *Mutassuk meg, hogy $U_{4,2}$ a $GF(2)$ alaptest felett nem mátrix-matroid (azaz nem bináris), de $GF(3)$ felett az. Igaz-e, hogy $U_{4,2}$ bármely $GF(2)$-től különböző test felett mátrix-matroid?*

KÖRMATROID Legyen $G=(V,E)$ irányítatlan gráf, melynek E élhalmaza alkotja a definiálandó matroid alaphalmazát. Élek egy részhalmazát függetlennek deklaráljuk, ha nem tartalmazza a gráfnak körét, vagyis ha erdő. Az első két axióma ismét triviális, míg a harmadik következik abból a közismert gráfelméleti tételből, hogy egy gráfban tetszőleges nem bővíthető erdő élszáma egyenlő a pontok és a komponensek számának különbségével. Eszerint tehát egy $X \subseteq E$ élhalmaz $r(X)$ rangja az X által alkotott részgráf pontjainak száma minusz a részgráf komponenseinek a száma. Az így előálló matroidot a G gráf **körmatroidjá**nak nevezik. Használatos a **grafikus matroid** elnevezés is. Összefüggő gráf körmatroidjában a bázisok éppen a feszítő fák.

TÉTEL 1.2.6 *Bármely T testre a grafikus matroid izomorf egy T feletti mátrix-matroiddal.*

Biz. Legyen $\vec{G}=(V,\vec{E})$ a G gráf egy tetszőleges irányítása. Jelölje A ezen digráf pont-él incidencia mátrixát, amelyben tehát a sorok V elemeinek, az oszlopok $\vec{E}$ elemeinek felelnek meg, és egy z csúcsnak és $e=uv$ irányított élnek megfelelő a_{ze} mátrix elem annak megfelelően $+1$, -1 vagy 0 , hogy $z=v$, $z=u$ vagy $z \neq u,v$. (Itt $+1$ az adott test egységelemét jelöli, -1 pedig a negáltját.)

Állítjuk, hogy a G gráf körmatroidja és az A-hoz tartozó mátrix matroid izomorfak. Ehhez legyen $F \subseteq E$ először egy erdő és mutassuk meg, hogy az F elemeihez tartozó A-beli oszlopok lineárisan függetlenek. $|F|$ szerinti indukciót használunk. Ha F egyelemű, akkor az eleméhez tartozó oszlop nem a nulla vektor, így lineárisan független. Legyen $|F| \geq 2$. Mivel F erdő, így van olyan v csúcs, amely egyetlen F-beli e éllel szomszédos. Igy az F-hez tartozó A-beli oszlopok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha az $F-e$-hez tartozók azok. Márpedig $F-e$ is erdő, így indukció miatt az $F-e$-nek megfelelő oszlopok lineárisan függetlenek.

Megfordítva, legyen F a gráf éleinek egy olyan részhalmaza, amely tartalmaz egy C kört. Ki kell mutatnunk, hogy az F-nek megfelelő oszlopok lineárisan összefüggnek. A C elemein valamelyik irányban körbemenve a $\vec{G}$-ban előre mutató élekhez rendeljünk $+1$ együtthatót, a hátra mutató élekhez -1-t, az összes többi élhez pedig 0-t. Ezzel az F-nek megfelelő A-beli oszlopok egy lineáris összefüggését kaptuk meg. •

Megjegyzés A matroidelmélet egy jelentős ága azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy egy matroid mikor izomorf egy adott test feletti mátrix-matroiddal, másszóval mikor koordinátázható az adott test felett. Például, hogyan lehet jellemezni a bináris matroidokat? (Az $U_{4,2}$ mindenesetre nem bináris). Vagy melyek azok a(z úgynevezett **reguláris**) matroidok, melyek minden test felett koordinátázhatók? (A grafikus matroidok ilyenek, de van más reguláris matroid is). Bár a matroidelmélet egésze szempontjából ez a kérdéskör igen fontos (és nehéz), a kombinatorikus optimalizálásban nem játszik központi szerepet. Emiatt e jegyzet nem foglalkozik vele.

A gráfhoz rendelt körmatroid sok információt tartalmaz a gráfról, de nem mindent: nem-izomorf gráfok körmatroidja lehet izomorf. Például, tetszőleges két m élű fa körmatroidja izomorf: minden részhalmaz független. Nem nehéz konstruálni két nem-izomorf 2-összefüggő gráfot, melyek körmatroidja ugyanaz. (Egy gráfot akkor neveznek k-**összefüggő**nek, ha legalább $k+1$ pontja van, és bármely legfeljebb $k-1$ elemű ponthalmaz elhagyása után is összefüggő gráfot kapunk.) Legyen $E_1=\{12,23,13,34,24,25,45,56,46\}$ és $E_2=\{12,23,13,34,24,25,45,56,26\}$. Ekkor a (V,E_1) és a (V,E_2) gráfok nem izomorfak, mert az első gráfban nincs 5-öd fokú pont, a másodikban pedig van. Ugyanakkor körmatroidjuk izomorf, mert G_2 úgy keletkezik G_1-ből, hogy a $\{2,4\}$ pontok elhagyásával keletkező egyik komponenst a $\{2,4\}$ mentén „átfordítjuk”. Általában, ha egy 2 pontú vágás mentén az egyik keletkező komponenst átfordítjuk, akkor a gráf köreinek halmaza, és így körmatroidja sem változik meg.

Ezek fényében édekes és értékes H. Whitney egy tétele, amely szerint két nem-izomorf 3-összefüggő gráf körmatroidja már mindig különböző. (A bizonyítás fő kérdése, hogy a gráf csúcsának fogalmát miként lehet matroidokra általánosítani.)

A teljes második fejezetet arra szánjuk majd, hogy egyrészt konkrét példákat adjunk matroidokra, másrészt olyan műveleteket mutassunk be, melyek segítségével meglévő matroidokból újakat gyárthatunk. Kíváncsibb természetű olvasó már most odalapozhat, ha benyomást akar szerezni matroidok előállításáról.

1.2.3 További fogalmak

A most megismert grafikus és lineáris matroidokra támaszkodva kiterjeszthetjük a gráfelmélet illetve a lineáris algebra néhány alapvető fogalmát általános matroidokra. A rang-függvény fogalma például a lineáris algebrából jött. Az S alaphalmaz egy maximális független részhalmazát a matroid **bázisá**nak hívjuk. Azt mondjuk, hogy egy $X \subseteq S$ halmaz **feszíti** vagy **generálja** az $Y \subseteq S$ halmazt, ha $r(X \cap Y) = r(Y)$. Az X **részhalmaz által feszített** vagy **generált** halmaz vagy másnéven az X **lezártja** mindazon elemekből áll, melyek X-hez vétele a rangot nem növeli. A lezárt jele $\mathrm{cl}(X)$ vagy $\sigma(X)$. (A cl jelölés a closure szóból ered.) Nemsokára (1.4.8 lemma) bebizonyítjuk, hogy a rang akkor sem nő, ha a lezárt elemeit egyszerre vesszük X-hez. Néha használatos a **generátor** fogalma: ez egy olyan $X \subseteq S$ halmaz, amely tartalmaz bázist vagy másszóval feszíti S-t.

A gráfelmélet számos fogalma kiterjeszthető matroidokra is. Például a gráf egy köre olyan függő részhalmaz, amelynek bármely valódi része már független. Ez inspirálja a következő definíciót. Egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid valamely $X \subseteq S$ részhalmazát **kör**nek nevezzük, ha X függő részhalmaz, de X-nek bármely valódi részhalmaza független. Az egyelemű kör neve **hurok**.

(Ez a definíció a gráf-kör fogalmának csak bizonyos vonásait ragadja meg, de azt például nem, hogy a gráf-kör szomszédos elemei ciklikusan helyezkednek el.) A matroid két elemét **párhuzamos**nak nevezzük, ha kételemű kört alkotnak. (Például, a mátrix-matroidban két nem-nulla vektor akkor párhuzamos, ha egyik a másik skalárszorosa. A null-vektor hurkot alkot.) Hurkot és párhuzamos elemeket nem tartalmazó matroidot **egyszerű**nek mondunk.

Ha egy gráf e, f, g élei közül e, f párhuzamos és f, g párhuzamos, akkor persze e, g is az. Ez a tulajdonság tetszőleges matroidra átmegy.

Lemma 1.2.7 *Egy matroidban e, f, g elemek legyenek egyenként függetlenek. Tegyük fel, hogy e, f párhuzamos és f, g párhuzamos. Ekkor e, g is párhuzamos és $r(\{e, f, g\}) = 1$.*

Biz. Legyen $X := \{e, f\}$ és $Y := \{f, g\}$. Használva r szubmodularitását azt kapjuk, hogy $1+1 = r(X)+r(Y) \geq r(X \cap Y)+r(X \cup Y) = 1+r(X \cup Y)$, amiből $r(X \cup Y) \leq 1$ adódik. Másrészt r monotonitása miatt $r(X \cup Y) \geq 1$ és így $r(\{e, f, g\}) = r(X \cup Y) = 1$. Ebből már az is következik, hogy az $\{e, g\}$ halmaz rangja is 1, ez pedig azzal ekvivalens, miután e és g nem hurok, hogy $\{e, g\}$ kör, vagyis hogy e és g párhuzamosak. •

A gráf vágásának fogalma is kiterjeszthető matroidokra. Emlékeztetőül, egy összefüggő $G = (V, E)$ gráf vágásán az X és $V - X$ között vezető élek halmazát értjük valamely $\emptyset \subset X \subset V$ részhalmazra. **Elemi vágás**on olyan vágást értünk, amely nem tartalmaz valódi részhalmazként vágást, vagyis az elemi vágás az éleknek egy olyan tartalmazásra nézve minimális élhalmaza, amelynek elhagyása a gráfot két komponensre ejti. Például egy legalább három pontú páros gráfban az összes élből álló halmaz vágás, de nem elemi vágás. Hasznos gráfelméleti feladat annak kimutatása, hogy egy összefüggő $G = (V, E)$ gráf vágása akkor és csak akkor elemi, ha mind X mind $V - X$ összefüggő részgráfot feszít.

Valójában az elemi vágás fogalmát általánosítjuk matroidra és ezt fogjuk vágásnak nevezni. A matroid **vágásá**n olyan tartalmazásra nézve minimális halmazt értünk, amely metsz minden bázist. (Ebben az értelemben egy gráf körmatroidjának vágásai éppen a gráf elemi vágásai.) Egy olyan elemet, amely minden bázisban benne van **híd**nak vagy **elvágó elem**nek nevezünk. A híd tehát egy egyelemű vágás. Gráf körmatroidjában ennek az elvágó él fogalma felel meg (azaz olyan él, amit kihagyva, a gráf már nem összefüggő). Egy elem éppen akkor elvágó, ha nincs benne körben. Az S valamely X részhalmazának valamely t elemére azt mondjuk, hogy X-**nek hídja** vagy **elvágó eleme**, ha t benne van X minden maximális független halmazában. Ez avval ekvivalens, hogy t nincs X-beli körben. Hasznos megjegyezni, hogy ha t az X-nek hídja, akkor hídja X minden t-t tartalmazó részének is.

2007. május 6.**ulmat11**

1.3 KÖRÖK ÉS FELBONTHATÓSÁG

Figyeljük meg, hogy egy matroid körei egyértelműen meghatározzák a matroidot abban az értelemben, hogy közös alaphalmazon adott két különböző matroid körhalmaza nem lehet ugyanaz. Valóban, ha létezik olyan X halmaz, amely mondjuk az M_1 matroidban független, de az M_2-ben nem, akkor X az M_2-ben tartalmaz minimális függő halmazt, azaz egy C kört, másrészről viszont X valamennyi részhalmaza, így C is független az M_1-ben. Az is világos, hogy a független halmazok éppen azon részhalmazai S-nek, melyek nem tartalmaznak kört, azaz

$$\mathcal{F} = \{F : \text{ nem létezik } C \in \mathcal{C}, C \subseteq F\}, \tag{1.2}$$

ahol $\mathcal{C}$ jelöli a körök halmazát.

Tegyük most fel, hogy egy $\mathcal{C}$ halmazrendszerből indulunk ki. Kérdés, milyen kikötéseket kell tennünk $\mathcal{C}$-re ahhoz, hogy az (1.2) által meghatározott $\mathcal{F}$ rendszer egy matroid függetlenjeit alkossa, mely matroid körhalmaza épp $\mathcal{C}$. E kérdés megválaszolásához vizsgáljuk meg a körök legfontosabb tulajdonságát.

1.3.1 Körök tulajdonságai, köraxiómák

Nyilvánvaló, hogy az üres halmaz sohasem kör, és egy kör nem tartalmaz másik kört.

TÉTEL 1.3.1 *Legyen C_1 és C_2 két különböző tagja $\mathcal{C}$-nek és $e \in C_1 \cap C_2$. Ekkor létezik olyan $C \in \mathcal{C}$, amelyre $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy van két olyan C_1, C_2 kör, melyekre a tétel nem igaz. Az uniójukat jelöljük K-val. Most $K - e$ független, míg K nem az, így $r(K) = |K| - 1$. Másrészt $C_1 \cap C_2$ független, így kiegészíthető K-nak egy maximális F független halmazává, amely tehát $r(K) = |K| - 1$ elemű. De ekkor F a K elemei közül csak egyet hagy ki, amely elem nincs a körök metszetében, és így F az egyik kört tartalmazza, ellentmondás. •

TÉTEL 1.3.2 *Ha F független halmaz és $e \in S$, akkor $F + e$ legfeljebb egy kört tartalmaz.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy $F + e$ tartalmazza a C_1 és C_2 köröket, akkor az előző tétel szerint létezne olyan C kör, amelyre $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e \subseteq F$, ellentétben F függetlenségével. •

Ezek szerint az 1.3.2 tétel következménye az 1.3.1 tételnek. Könnyen látszik, hogy ez fordítva is igaz. Amennyiben B bázis és $e \in S - B$, úgy $B + e$ biztosan nem független, így pontosan egy kört tartalmaz. Ezt a kört az e elem B-hez tartozó **alapköré**nek nevezzük. A $B + e$-ben lévő alapkör bármely elemét kidobva ismét bázist kapunk.

TÉTEL 1.3.3 *Legyen C_1 és C_2 két különböző kör, $e \in C_1 \cap C_2$, $e_1 \in C_1 - C_2$. Ekkor létezik olyan $C \in \mathcal{C}$, amelyre $e_1 \in C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

Biz. Legyen C_1, C_2 két olyan kör, amelyre a tétel nem igaz és az uniójuk, melyet K-val jelölünk, minimális elemszámú. Az 1.3.1 tétel miatt létezik egy C_3-mal jelölt kör, amelyre $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$. Most $e_1 \notin C_3$, hiszen C_1, C_2 a feltevés szerint ellenpélda.

Mivel C_3 nem része C_1-nek, létezik egy $f \in C_3 - C_1$ elem, ami persze benne van C_2-ben. K minimalitása miatt az 1.3.3 tétel állítása már érvényes a C_2, C_3 körökre (az uniójuk kisebb, mint K), így létezik olyan $C_4 \subseteq C_2 \cup C_3 - f$ kör, amely tartalmazza e-t. Most viszont a C_4 és C_1 körök uniója valódi része K-nak, így ezekre is érvényes a tétel állítása, azaz létezik olyan $C \subseteq C_1 \cup C_4 - e \subseteq K - e$ kör, amely tartalmazza e_1-t, ellentmondásban az indirekt feltevéssel. •

Legyen adott a $\mathcal{C}$ halmazrendszer és tekintsük a következő axiómákat.

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.
(C2) *Ha $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, akkor $C_1 \not\subset C_2$.*
(C3) (Gyenge köraxióma) *Ha C_1 és C_2 két különböző tagja $\mathcal{C}$-nek és $e \in C_1 \cap C_2$, akkor létezik olyan $C \in \mathcal{C}$, amelyre $C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

A fentiekben már láttuk, hogy egy matroid köreinek halmaza kielégíti mindhárom tulajdonságot. Figyeljük még meg, hogy az 1.3.3 tétel bizonyításánál csupán a fenti tulajdonságokat használtuk, ezért igaz az, hogy az alábbi tulajdonság, az ún. erős köraxióma, következménye a {C1,C2,C3} axiómáknak.

(C3′) (Erős köraxióma) *Legyen C_1 és C_2 két különböző tagja $\mathcal{C}$-nek és $e \in C_1 \cap C_2$, $e_1 \in C_1 - C_2$. Ekkor létezik olyan $C \in \mathcal{C}$, amelyre $e_1 \in C \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.*

Más szóval a {C1,C2,C3} illetve a {C1,C2,C3′} axióma-rendszer ekvivalens. A következő tétel tartalma az, hogy ez a három tulajdonság már elég is a matroid leírásához.

TÉTEL 1.3.4 *Ha $\mathcal{C}$ kielégíti a fenti három tulajdonságot, akkor az* (1.2) *képlet által definiált halmazrendszer matroidot alkot, melynek körei éppen a $\mathcal{C}$ tagjai.*

Biz. Először lássuk be, hogy teljesülnek a függetlenségi axiómák. Az (I1) és (I2) axiómák triviálisan teljesülnek. Tegyük fel indirekt, hogy (I3) nem áll és legyen K, N olyan ellenpélda, amelyre $|K| < |N|$ és $|K \cap N|$ maximális. Válasszunk ki egy $e \in N - K$ elemet. Ekkor $K + e \notin \mathcal{F}$, így létezik egy $C_1 \in \mathcal{C}$, amelyre $e \in C_1 \subseteq K + e$. (1.2) folytán C_1 nincs teljesen N-ben, így létezik egy $h \in C_1 - N$ elem. Most $K' := K - h + e \in \mathcal{F}$, hiszen a gyenge köraxióma miatt $K + e$-nek egyetlen részhalmaza tartozik $\mathcal{C}$-hez.

Miután $|K' \cap N| > |K \cap N|$, a K' és N halmazokra már érvényes, hogy létezik olyan $f \in N - K'$, amelyre $K' + f \in \mathcal{F}$. $K + f$ tartalmazza $\mathcal{C}$ egy C_2 tagját. C_2-nek tartalmaznia kell h-t, mert különben $C_2 \subseteq K' + f$, de $K' + f$-ben nem volt $\mathcal{C}$-nek tagja. (C3′)-t alkalmazva a C_1, C_2, h, f választással, azt kapjuk, hogy létezik egy olyan $C_3 \in \mathcal{C}$, amelyre $f \in C_3, h \notin C_3$, azaz $C_3 \subseteq K' + f$, ellentmondás.

Végül lássuk be, hogy a kapott matroid körei éppen a $\mathcal{C}$ elemei. Valóban, ha C' a kapott matroid egy köre, akkor C'-nek része egy $\mathcal{C}$-beli C halmaz és C' erre a tulajdonságra minimális, azaz $C' = C$. Fordítva, ha $C \in \mathcal{C}$, akkor C nem független a kapott matroidban, így részhalmazként tartalmazza annak egy C' körét. Az előbb láttuk már, hogy $C' \in \mathcal{C}$, így a (C2) axióma miatt $C = C'$. •

Mátrix-matroidok újra

Legyen A egy mátrix és S az A oszlopainak halmaza. Deklaráljuk S egy C részhalmazát körnek, ha a C-nek megfelelő oszlop-halmaz lineárisan függő, de C bármely valódi része lineárisan független. Bebizonyítjuk (lineáris algebrai tételre való hivatkozás nélkül), hogy az így kapott körök kielégítik a köraxiómákat. Az első kettő triviális. A gyenge köraxiómához, legyen C_1, C_2 két kör és $c \in C_1 \cap C_2$. Ekkor c előáll mind a $C_1 - \{c\}$ tagjainak lineáris kombinációjaként, mind a $C_2 - \{c\}$ tagjainak lineáris kombinációjaként. Azaz, $c = \sum \lambda_i a_i$ ($a_i \in C_1 - \{c\}$, ahol $\lambda_i \neq 0$), és $c = \sum \mu_j b_j$ ($b_j \in C_2 - \{c\}$, ahol $\mu_j \neq 0$). Ebből $\sum \lambda_i a_i - \sum \mu_j b_j = 0$, azaz $C_1 \cup C_2 - \{c\}$ lineárisan függő, így tartalmaz kört, vagyis teljesül a gyenge köraxióma.

Ebben a felépítésben tehát az 1.3.4 tételnek következménye az az alapvető lineáris algebrai tétel, amit az (I3) tulajdonság ír le mátrix-matroidokra.

Feladat 1.3.1 *Legyen $G = (V, E)$ összefüggő gráf. Az E alaphalmazon definiáljunk egy matroidot* (az ún. **vágás-matroid**ot) *a köreivel úgy, hogy a matroid körei a G elemi vágásai legyenek. Igazoljuk a köraxiómákat.*

Gyakorlat 1.3.2 *A vágás-matroidban $I \subseteq E$ független, ha a $G - I := (V, E - I)$ gráf összefüggő. I bázis, ha feszítő fa komplementere. Egy $F \subseteq E$ halmaz rangja $|F| + 1$ minusz $G - F$ komponenseinek száma.*

Gyakorlat 1.3.3 *A vágás-matroid vágásai a körmatroid körei.*

Megállapíthatjuk tehát, hogy a vágás-matroid illetve a körmatroid mintegy párban vannak. Ezt a konstrukciót általánosan is megcsináljuk a 2.1 szakaszban: minden matroidhoz tartozik egy duális matroid, melynek duálisa az eredeti.

Feladat 1.3.4 *Igazoljuk* (lehetőleg a vágás-matroid rangfüggvényének szubmodularitását használva)*, hogy minden $X, Y \subseteq V$ részhalmazra $c(X) + c(Y) \leq c(X \cap Y) + c(X \cup Y) + d(X, Y)$, ahol $c(Z)$ jelöli a Z pont-halmaz kihagyásával keletkező komponensek számát, míg $d(X, Y)$ az $X - Y$ és $Y - X$ között vezető élek számát.*

Bizonyítás nélkül még megemlítünk néhány további körökre vonatkozó érdekes tételt.

TÉTEL 1.3.5 (Lehman) *Egy közös S alaphalmazon legyenek M_1 és M_2 olyan matroidok, melyek mindegyikében bármely két különböző elem benne van egy körben. Amennyiben a két matroidnak egy rögzített $s \in S$ elemet tartalmazó körei megegyeznek, úgy a két matroid megegyezik.*

TÉTEL 1.3.6 *Ha x és y egy matroid C körének elemei, akkor létezik olyan B vágás, amelyre $C \cap B = \{x, y\}$.*

TÉTEL 1.3.7 *Legyen az M matroidnak C egy köre és x, y két eleme. Ha bármely két elem benne van körben, akkor léteznek olyan C_x és C_y körök, melyek rendre tartalmazzák x-et illetve y-t és amelyek uniója fedi C-t, azaz $C \subseteq C_x \cup C_y$.*

1.3.2 Felbonthatóság

A gráf körének fogalmát sikerrel vittük át matroidokra. Mi a helyzet a gráfok összefüggőségével? Ennek értelmes kiterjesztésére nincs remény, mert bármely k élű erdőnek, összefüggő vagy sem, ugyanaz a körmatroidja. Másszóval, a gráfhoz rendelt körmatroid nem érzékeli a gráf összefüggőségét.

Ugyanakkor természetesen kínálkozik a következő definíció. Egy $M = (S, \mathcal{I})$ matroidot akkor nevezünk **felbonthatónak**, ha S-nek létezik egy valódi, nem-üres $Z \subset S$ részhalmaza úgy, hogy M független halmazai pontosan azok a halmazok, amelyek egy Z-be eső és egy $S - Z$-be eső független halmaz uniójaként állnak elő. E tulajdonság nyilván azzal ekvivalens, hogy M minden köre vagy Z-ben van vagy $S - Z$-ben. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy M felbontható Z (vagy $S - Z$) mentén. Értelemszerűen a nem felbontható matroidokat **felbonthatatlannak** (vagy néha az angolban használt „connected" nyomán **összefüggőnek** hívjuk). Az egyelemű matroid definíció szerint felbonthatatlan. (Kis zavart okozhat, hogy a magyarban nincs igazán külön szó a *dependent* és a *connected* angol kifejezésekre. Mi a dependent-re a függő szót, míg a connected-re az összefüggő szót fogjuk használni.) Amint kimutatható, egy gráf körmatroidja pontosan akkor felbonthatatlan (=összefüggő), ha a gráf 2-összefüggő.

A további elemzés előtt emlékeztetünk rá, hogy az S alaphalmazon egy $\mathcal{H} = (S, \mathcal{T})$ hipergráfot akkor neveznek **összefüggőnek**, ha az alaphalmaz bármelyik két nemüres részre történő felbontásánál létezik olyan hiperél, amely mindkét részt metszi. Jelölje $G = (S, T; E)$ a hipergráfhoz tartozó páros gráfot, amelyben T elemei a hiperéleknek felelnek meg, és az $s \in S$ és $t \in T$ pontok akkor vannak éllel összekötve, ha s benne van a t-nek megfelelő hiperélben. Könnyen látszik, hogy $\emptyset \notin \mathcal{T}$ esetén H és G egyszerre összefüggő. Ebből adódik, hogy egy S-en összefüggő hipergráf mindig tartalmaz legfeljebb $|S| - 1$ hiperélt, melyek összefüggő hipergráfot alkotnak az S-en. Valóban, könnyen látható, hogy a G egy feszítő fájából kihagyva a T-ben első fokú pontokat egy S-et fedő fát kapunk, amelynek legfeljebb $|S| - 1$ pontja van T-ben. Hasonlóképp, $\mathcal{H}$ összefüggősége azzal ekvivalens, hogy az alaphalmaz bármely u és v eleméhez létezik hiperélek egy $C_1, \dots, C_l$ sorozata úgy, hogy $u \in C_1$, $v \in C_l$ és $1 \leq i < j \leq l$-re $C_i \cap C_j \neq \emptyset$.

A definícióból rögtön látszik, hogy M pontosan akkor összefüggő, ha köreinek $\mathcal{C}$ hipergráfja összefüggő. Amennyiben $\mathcal{C}$ nem összefüggő és $S_1, \dots, S_k$ $(k \geq 2)$ jelöli az összefüggő komponenseinek alaphalmazait (ahol tehát $\{S_1, \dots, S_k\}$ az S alaphalmaz partíciója), úgy az M az S_i halmazokra vett M_i részmatroidjai mind felbonthatatlanok. Ezen M_i matroidokat nevezzük az M **blokkjainak**.

Fontos kérdés annak eldöntése, hogy egy matroid felbonthatatlan-e vagy sem. Ez több kérdést is takar: milyen tanúsítványt tudunk elképzelni felbonthatóságra, milyent a felbonthatatlanságra, és algoritmikusan hogyan lehet megtalálni ezen tanúkat. A következő tétel a felbonthatóságra szolgáltat egyszerű tanúsítványt.

TÉTEL 1.3.8 *Egy M matroid akkor és csak akkor felbontható, ha létezik S-nek olyan Z nem-üres, valódi részhalmaza, amelyre*

$$r(Z) + r(S - Z) = r(S). \tag{1.3}$$

Biz. A definícióból rögtön adódik, hogy ha M felbontható Z mentén, akkor $r(Z) + r(S - Z) = r(S)$.

Fordítva, tegyük fel, hogy valamely $\emptyset \subset Z \subset S$ részhalmazra (1.3) fennáll. Jelölje M_1 ill. M_2 a Z ill. az $S - Z$ által meghatározott rész-matroidokat. Belátjuk, hogy S-nek egy X részhalmaza akkor és csak akkor független, ha $X \cap Z$ és $X - Z$ is független. Ebből a „csak akkor" rész triviális. Tegyük fel tehát, hogy $X \cap Z$ és $X - Z$ függetlenek, azaz $r(X \cap Z) = |X \cap Z|$ és $r(X - Z) = |X - Z|$, és igazoljuk, hogy X is független.

A szubmodularitási egyenlőtlenséget kétszer alkalmazva kapjuk: $r(Z) + r(X) \geq r(Z \cap X) + r(Z \cup X)$ és $r(Z \cup X) + r(S - Z) \geq r(X - Z) + r(S)$. Ezeket összevetve és használva (1.3)-t, a következő adódik: $r(S) + r(X) = r(Z) + r(X) + r(S - Z) \geq r(Z \cap X) + r(Z \cup X) + r(S - Z) \geq r(Z \cap X) + r(X - Z) + r(S) = |Z \cap X| + |X - Z| + r(S)$, amiből $|X| \geq r(X) \geq |Z \cap X| + |X - Z| = |X|$, tehát $r(X) = |X|$. Vagyis X független, amit bizonyítani akartunk. •

Vizsgáljuk most meg, hogy egy matroidra miként lehet a felbonthatatlanságát rábizonyítani. Amint már említettük, M akkor és csak akkor felbonthatatlan, ha köreinek $\mathcal{C}$ hipergráfja összefüggő. E tulajdonságnak kétféle élesítését is megadjuk.

TÉTEL 1.3.9 *Egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid akkor és csak akkor felbonthatatlan, ha bármely két eleme egy körön van.*

Biz. Az állítás triviális, ha $|S| = 1$, ezért feltesszük, hogy $|S| > 1$. Ha bármely két elem egy körön van, akkor a körök hipergráfja összefüggő, azaz M felbonthatatlan. Megfordítva, tegyük fel, hogy a matroid felbonthatatlan, azaz köreinek hipergráfja összefüggő. Lássuk be, hogy bármely két elem egy körön van.

Lemma 1.3.10 *Ha az x, y elemekhez létezik olyan x-et tartalmazó C_1 kör és y-t tartalmazó C_2 kör, melyek metszik egymást, akkor létezik olyan kör, amely tartalmazza x-et és y-t.*

Biz. Indirekt, tegyük fel, hogy a tétel nem igaz és válasszunk olyan ellenpéldát, hogy $K = C_1 \cup C_2$ minimális. Legyen $c \in C_1 \cap C_2$. Az erős köraxióma szerint létezik egy $C_1' \subset K$ kör, amelyre $c \notin C_1', x \in C_1'$. Most $C_1' \cup C_2 = K$, mert ha $C_1' \cup C_2 \subset K$ volna, akkor K minimalitása miatt, C_1', C_2 már nem ellenpélda, tehát volna x-et és y-t tartalmazó kör.

Hasonló megfontolással adódik, hogy létezik olyan C_2' kör, amelyre $c \notin C_2', y \in C_2'$ és $C_1 \cup C_2' = K$. De most C_1' és C_2' szükségképpen metszi egymást, az uniójuk valódi része K-nak (merthogy c nincs az unióban). Ezért C_1', C_2' már nem ellenpélda, és így mégiscsak létezik egy x-et és y-t tartalmazó kör, ellentmondás. •

A fenti lemma alapján az *egy körön levés* ekvivalencia reláció, azaz létezik S-nek egy egyértelmű partíciója $S_1, \ldots, S_t$ részekre úgy, hogy M mindegyik köre része valamelyik S_i-nek és mindegyik S_i rész olyan, hogy bármely két eleme rajta van egy körön. Miután a körök hipergráfja összefüggő, t szükségképpen 1, és így S bármely két eleme rajta van egy körön. • •

Gyakorlat 1.3.5 *Mutassuk meg, hogy* **nem igaz** *az erős köraxióma és az* 1.3.10 *lemma közös általánosítása:* ha C_1, C_2 körök, $f \in C_1 \cap C_2, e_1 \in C_1 - C_2, e_2 \in C_2 - C_1$, akkor van olyan $C \subseteq C_1 \cup C_2 - f$ kör, amelyre $e_1, e_2 \in C$.

Miután a matroid felbonthatatlansága a körök hipergráfjának összefüggőségével ekvivalens, a felbonthatatlanságra létezik legfeljebb $|S| - 1$ körből álló tanúsítvány. Ráadásul az 1.3.9 tétel szerint ez egyszerű alakban is megadható: válasszunk ki egy tetszőleges s elemet és minden $x \in S - s$ elemre vegyünk egy s-et és x-et tartalmazó kört. A most következő tétel szerint már egy legfeljebb $|S| - r(S)$ darab körből álló tanúsítvány is létezik.

TÉTEL 1.3.11 *Egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid akkor és csak akkor felbonthatatlan, ha $|S| = 1$ vagy ha valamely B bázisához tartozó alapkörök $\mathcal{C}_B$ hipergráfja összefüggő.*

Biz. Természetesen, ha $\mathcal{C}_B$ összefüggő, akkor $\mathcal{C}$ is az, és ezért a matroid felbonthatatlan. Fordítva, tegyük fel, hogy létezik S-nek olyan két S_1, S_2 nemüres részekre történő felbontása, hogy minden B-hez tartozó alapkör vagy teljesen az egyik részben van, vagy teljesen a másikban. Ez azt jelenti, hogy S_i-ben $S_i \cap B$ maximális független, tehát $r(S_i) = |B \cap S_i|$ $(i = 1, 2)$, és így $r(S_1) + r(S_2) = |B \cap S_1| + |B \cap S_2| = |B| = r(S)$. Az 1.3.8 tétel alapján tehát ilyenkor M nem összefüggő. •

Adott B bázishoz elkészíthetjük a hozzátartozó $G_B = (B, S - B; E_B)$ **bázis-gráf**ot. Ez egy páros gráf, amelyben $x \in B, y \in S - B$ elemekre xy pontosan akkor él, ha $x \in C(B, y)$, azaz, ha y benne van az x alapkörében. Világos, hogy $\mathcal{C}_B$ akkor és csak akkor összefüggő hipergráf, ha G_B összefüggő gráf.

Összefoglalva megállapítható, hogy a matroid alaphalmaza egyértelműen felbomlik a matroid blokkjaira (azaz a körök hipergráfjának komponenseire). Az egyes blokkok az *egy körön levés* ekvivalencia-reláció osztályai, és megegyeznek egy bázishoz tartozó alapkörök hipergráfjának a komponenseivel. A komponensek ugyanazok, mint a $\mathcal{C}_B$ hipergráf illetve a G_B páros gráf komponensei.

2007. május 6. ulmat12

1.4 BÁZISOK ÉS RANG

A matroid egy maximális független halmazát **bázis**nak neveztük. Ennek elemszáma a matroid rangja. A bázisok családja egyértelműen meghatározza a matroidot abban az értelemben, hogy különböző M_1, M_2 matroidok bázisainak halmaza különböző. Valóban, ha például X független M_1-ben, de függő M_2-ben, akkor M_1-ben kiterjeszthető bázissá, míg M_2-ben nem, másszóval M_1-ben létezik X-et tartalmazó bázis, de M_2-ben nem, azaz M_1 és M_2 bázisainak halmaza tényleg különböző. Világos, hogy egy halmaz éppen akkor független, ha részhalmaza egy bázisnak. Kérdés, hogy egy halmazrendszerre milyen tulajdonságokat kell előírni, hogy tagjai egy matroid bázisait alkossák.

1.4.1 Bázisaxiómák

Legyen adott S részhalmazainak egy $\mathcal{B}$ halmaza, és tekintsük a következő **bázisaxiómák**nak nevezett tulajdonságokat.

(B1) $\mathcal{B}$ nemüres,
(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ és $x_1 \in B_1 - B_2$ esetén van olyan $x_2 \in B_2 - B_1$ elem, melyre $B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$.

A (B2) tulajdonságot néha **kicserélési axiómá**nak hívják.

TÉTEL 1.4.1 *Egy matroid bázisai kielégítik a fenti két tulajdonságot. Ha $\mathcal{B}$ egy olyan halmazrendszer, amely kielégíti a bázis-axiómákat, akkor az*

$$\mathcal{F} := \{F : \textit{létezik } B \in \mathcal{B}, F \subseteq B\} \tag{1.4}$$

halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat.

Biz. A tétel első fele rögtön adódik a függetlenségi axiómákból. A fordított irány igazolásához látható, hogy $\mathcal{F}$ kielégíti az első két függetlenségi axiómát. Lássuk be (I3$'''$)-t. Ennek első fele azt követeli, hogy bármely két $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ halmaz elemszáma ugyanaz. Tegyük fel indirekt, hogy $|B_2| < |B_1|$, és válasszuk ezeket úgy, hogy $|B_2 - B_1|$ minimális legyen. A (B2) axióma miatt valamely $x_1 \in B_1 - B_2$ esetén létezik egy olyan $x_2 \in B_2 - B_1$ elem, amelyre $B_1' := B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$. De most $|B_2| < |B_1| = |B_1'|$ és $|B_2 - B_1'| < |B_2 - B_1|$, ellentmondásban B_1 és B_2 választásával. A $\mathcal{B}$ tagjainak közös elemszámát jelölje r.

(I3$'''$) második feléhez legyen legyen $K, N \subseteq S$ két $r-1$ illetve r elemű tagja tagja $\mathcal{F}$-nek. Ekkor persze $B_2 := N$ $\mathcal{B}$-ben van, és definíció szerint létezik $B_1 \in \mathcal{B}$ és $x_1 \in B_1$, melyekre $K = B_1 - x_1$. A (B2) axióma szerint létezik $x_2 \in B_2 - B_1$, amelyre $B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$, azaz K valóban függetlenné bővíthető N-ből. •

Gyakorlat 1.4.1 *Egy összefüggő gráf vágás-matroidjának bázisai a feszítő fák komplementerei.*

Tetszőleges B bázisra és $x \in S - B$ elemre $B + x$ tartalmaz egy egyértelmű $C = C(B, x)$ kört, amely az x elem B **bázishoz tartozó alapköre**. Rögtön adódik, hogy az alapkör pontosan azokból az elemekből áll, amelyeket $B + x$-ből kihagyva ismét bázist kapunk. A kicserélési axiómának érvényes egyfajta tükör változata:

Állítás 1.4.2 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *és* $x_2 \in B_2 - B_1$ *esetén van olyan* $x_1 \in B_1 - B_2$ *elem, amelyre* $B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$.

Biz. Tekintsük az x_2 elem B_1-re vonatkozó C alapkörét. Ez nem lehet teljesen B_2-ben, és így egy $x_1 \in C - B_2$ elem jó lesz. •

Az 1.4.2 állításban megfogalmazott (B2*) tulajdonságot nevezhetjük **becserélési axiómá**nak.

Feladat 1.4.2 *Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{B}$ teljesíti* (B1)*-et és* (B2*)*-t, akkor $\mathcal{B}$ egy matroid bázisainak a halmaza.*

A (B2) és (B2*) tulajdonságok kis esztétikai hiányossága, hogy bennük a két bázis szerepe nem szimmetrikus. Ez azonban kiküszöbölhető.

TÉTEL 1.4.3 (Szimmetrikus báziskicserélési tétel) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ *és* $x_1 \in B_1 - B_2$ *esetén létezik egy olyan* $x_2 \in B_2 - B_1$ *elem, amelyre* $B_1 - x_1 + x_2 \in \mathcal{B}$ *és* $B_2 - x_2 + x_1 \in \mathcal{B}$.

Azt fogjuk mondani, hogy a fenti tulajdonsággal bíró x_1 és x_2 elemek **kölcsönösen kicserélhetők**, röviden **felcserélhetők**. A tételbeli tulajdonságot **szimmetrikus bázis-kicserélési** tulajdonságnak hívjuk.

Biz. Jelölje az x_1 elem B_2-höz tartozó alapkörét C_2. Vegyünk egy olyan C kört, amelyre

$$x_1 \in C \subseteq B_1 \cup B_2 \text{ és } C - B_1 \subseteq C_2 - B_1 \tag{1.5}$$

és amelyre $|C - B_1|$ minimális. (Létezik (1.5)-t kielégítő kör: C_2 ilyen.) Természetesen ez a minimum nem 0, hiszen B_1 nem tartalmaz kört.

Állítjuk, hogy $|C - B_1| = 1$. Valóban, ha indirekt $|C - B_1| > 1$, akkor tekintsük egy $x \in C - B_1$ elemnek a B_1-hez tartozó C_1 alapkörét. C minimalitása miatt, ez nem tartalmazza x_1-et. Az erős köraxióma szerint azonban létezik olyan $C' \subseteq C_1 \cup C_2 - x$ kör, amely tartalmazza x_1-t, és ilyen C' kör létezése ellentmondásban van C minimális választásával.

Azt kaptuk, hogy $C - B_1$ egyetlen elemből áll, melyet jelöljünk x_2-vel. Vagyis a C kör az x_2 elem B_1-hez tartozó alapköre, amely tartalmazza x_1-t, míg az x_2 elem benne van az x_1 elem B_2-höz tartozó alapkörében. Ezen elemek tehát felcserélhetők. •

Következmény 1.4.4 *Legyen F_1 és F_2 két diszjunkt független halmaz és legyen $s_1 \in F_1$. Ekkor vagy $F_2 + s_1$ független vagy létezik egy $s_2 \in F_2$ elem, amelyre mind $F_1 - s_1 + s_2$, mind $F_2 - s_2 + s_1$ független.*

Biz. Amennyiben $F_2 + s_1$ nem független, úgy egy F_2-t magában foglaló B_2 bázis nem tartalmazza s_1-et. Legyen B_1 egy F_1-et magában foglaló bázis és alkalmazzuk az 1.4.3 tételt. •

Feladat 1.4.3 *Igazoljuk, hogy a maximális súlyú bázisok kielégítik a bázis axiómákat!*

Az 1.4.4 következmény az 4.1.4 részben majd érdekes alkalmazásra lel (4.1.5 tétel). A következő tétel a (B2) axióma egy más irányú kiterjesztését mutatja.

TÉTEL 1.4.5 *Adott B_1, B_2 bázisokhoz létezik olyan $f : B_1 - B_2 \to B_2 - B_1$ bijekció úgy, hogy minden $x \in B_1 - B_2$ elemre $B_1 - x + f(x)$ bázis.*

Biz. $B_1 - x + f(x)$ pontosan akkor bázis, ha $x \in C(B_1, f(x))$, azaz x benne van az $f(x)$ elem B_1-re vonatkozó alapkörében. Tekintsük a $\{C(B_1, z) - B_2 : z \in B_2 - B_1\}$ halmazrendszert.

Azt állítjuk, hogy erre teljesül a Hall feltétel, azaz, akárhogy választva j halmazt, az uniójuk elemszáma legalább j. Valóban, vegyünk $B_2 - B_1$-ben j elemet, és tekintsük a B_1-re vonatkozó $C_1, \dots, C_j$ alapköreiket. Legyen $K := \cup C_i$. Azt kell belátnunk, hogy $|K - B_2| \geq |K - B_1|$. Egyrészt $r(K) \geq r(K \cap B_2) = |K \cap B_2|$. Másrészt $K \cap B_1$ tovább nem bővíthető független részhalmaz K-ban, így $|K \cap B_1| = r(K) \geq |K \cap B_2|$, ami azt jelenti, hogy $|K - B_2| \geq |K - B_1|$, tehát a Hall féle feltétel tényleg teljesül.

A Hall tétel szerint létezik egy f bijekció úgy, hogy minden $x \in B_1 - B_2$ elem benne van az $f(x)$ elem B_1-hez tartozó alapkörében, ami azt jelenti, hogy $B_1 - x + f(x)$ bázis. •

Az 4.2.13 tételben a fenti bázis kicserélési tulajdonságok egy közös általánosítását fogjuk megadni.

Feladat 1.4.4 *Legyen $x_1, x_2, \dots, x_k$ egy B bázis néhány eleme, $y_1, y_2, \dots, y_k$ pedig bázison kívüli elemek. Tegyük fel, hogy mindegyik x_i benne van a megfelelő y_i-nek a B-hez tartozó $C(B, y_i)$ alapkörében, de $h > j$ esetén $x_h \notin C(B, y_j)$. Igazoljuk, hogy $B - \{x_1 \dots, x_k\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ bázis.*

Feladat 1.4.5 *Legyen B az $M = (S, \mathcal{B})$ matroid egy bázisa. Tegyük fel, hogy adott az elemeken egy $h : S \to \{0, 1, \dots, n\}$ "szintfüggvény", amelyre* $(*)$ $h(v) \leq h(u) + 1$ fennáll minden olyan $\{u, v\}$ elempárra, amelyre *$u \in S - B$, $v \in C(B, u)$. Legyen s és t olyan, hogy $h(t) = h(s) + 1$, $s \in S - B$, $t \in C(B, s)$. Igazoljuk, hogy a $(*)$ tulajdonság a $B' := B - t + s$ bázisra vonatkozólag is fennáll.*

Közismert, hogy egy gráf körének és vágásának mindig páros sok közös eleme van. Ez nem teljesül általában matroidokra, amint azt az $U_{4,2}$ uniform matroid mutatja, ahol minden három-elemű halmaz vágás is és kör is. (Teljesül viszont a mod 2 test felett reprezentálható, ún. bináris matroidokra). A következő gyengítés viszont már mindig évényes.

TÉTEL 1.4.6 *Vágás és kör metszete nem lehet egyelemű.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy a V vágásnak és a K körnek a metszete az egyetlen e elemből áll. Miután minden vágás olyan tartalmazásra nézve minimális halmaz, amely metsz minden bázist, létezik egy olyan B_V bázis, amely V-ből egyedül az e elemet tartalmazza. Létezik továbbá egy olyan B_K bázis, amely magában foglalja a $K - e$ halmazt. Most tehát $e \in B_V - B_K$, így az 1.4.3 tétel szerint létezik egy $f \in B_K - B_V$ elem, amely felcserélhető e-vel. Ha most f nincs benne V-ben, akkor $B_V - e + f$ olyan bázis lenne, amely diszjunkt V-től, ellentmondásban V vágás voltával. Ha viszont f benne van V-ben, akkor nem lehet K-ban (merthogy K és V egyetlen közös eleme az e). Tehát $B_K - f + e$ olyan bázis, amely magában foglalja az egész K kört, ellentmondás. •

1.4.2 Rang axiómák

A rang-függvény definíciójából adódik, hogy egy halmaz akkor és csak akkor független, ha elemszáma egyenlő a rangjával, vagyis a függetlenek családja a következő:

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq S, r(X) = |X|\}. \tag{1.6}$$

Ebből következik, hogy különböző matroidok rang-függvénye különböző. Egy későbbi általánosítás érdekében (lásd az 4.2 szakaszt) megjegyezzük, hogy miután $r(X) \leq |X|$ mindig fennáll, (1.6) ekvivalens a következővel:

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq S, r(X) \geq |X|\}. \tag{1.7}$$

Hogyan lehet felismerni egy más módon definiált halmaz-függvényről, hogy matroid rang-függvény-e vagy sem? Más szóval, mik a rang-függvény lényeges tulajdonságai, melyeket meg kell követelnünk, hogy az (1.6) által szolgáltatott $\mathcal{F}$ halmazrendszer kielégítse a függetlenségi axiómákat?

TÉTEL 1.4.7 *Az $r : 2^S \to \mathbf{Z}_+$ nem-negatív, egészértékű halmaz-függvény akkor és csak akkor egy matroid rang-függvénye, ha kielégíti az alábbi* **rang axiómák***at.*
(R1) $r(\emptyset) = 0$ (az üres halmazon 0),
(R2) $r(X) \geq r(Y)$ *amikor* $X \supseteq Y$ (monoton növő),
(R3) $r(X) \leq |X|$ (szubkardinális = „ elemszám alatti"),
(R4) $r(X) + r(Y) \geq r(X \cap Y) + r(X \cup Y)$ *minden* $X, Y \subseteq S$ *halmazra* (szubmoduláris).

Biz. Tegyük fel először, hogy r egy matroid rang-függvénye. Az első három tulajdonság a definícióból közvetlenül adódik, a szubmodularitást pedig már beláttuk az 1.2.4 lemmában.

Megfordítva, tegyük fel, hogy r kielégíti a fenti axiómákat. Belátjuk, hogy az (1.6) által definiált $\mathcal{F}$ halmazrendszer teljesíti a függetlenségi axiómákat. Ennek érdekében először is igazoljuk a következőt.

(R3′) $r(A + e) \leq r(A) + 1$ amikor $A \subseteq S, e \in S - A$.

Valóban, a szubmodularitást használva: $r(A)+1 \geq r(A)+r(e) \geq r(A\cap\{e\})+r(A\cup\{e\}) \geq r(A+e)$, vagyis (R3′) fennáll.

Lemma 1.4.8 *Legyen $A \subseteq S$ és $e_1, \ldots, e_k \in S - A$. Ha $r(A + e_1) = \ldots = r(A + e_k) = r(A)$, akkor $r(A \cup \{e_1, \ldots, e_k\}) = r(A)$.* (Azaz, ha bizonyos elemek egyike sem növeli egy halmaz rangját, akkor együttesen sem növelik.)

Biz. Indukciót használunk. Az állítás triviális $k = 1$-re, így tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és azt, hogy a lemma érvényes $k - 1$-re. Azaz, $r(A') = r(A)$ ahol $A' := A \cup \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$. (R2) és (R4) alapján $r(A) + r(A) = r(A + e_k) + r(A') \geq r((A + e_k) \cap A') + r((A + e_k) \cup A') = r(A) + r(A \cup \{e_1, \ldots, e_k\}) \geq r(A) + r(A)$, amiből a lemma következik. •

Lássuk most be, hogy $\mathcal{F}$ kielégíti a függetlenségi axiómákat. (I1) következik (R1)-ből. Legyen $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$. Ekkor $r(Y) = |Y|$. Az (R3′) tulajdonság ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy $r(Y) \leq r(X)+|Y - X|$ és innen $r(X) \geq |X|$. (R3) alapján $r(X) = |X|$, vagyis $X \in \mathcal{F}$, tehát (I2) is fennáll.

(I3) igazolásához egy $X \subseteq S$ részhalmazra tekintsük az $\mathcal{F}$-nek egy X-ben fekvő, de X-ben tovább már nem bővíthető F tagját. Belátjuk, hogy ennek elemszáma $r(X)$. Valóban, F maximalitása folytán minden $v \in X - F$ elemre $F + v \notin \mathcal{F}$, vagyis $r(F) \leq r(F + v) \leq |F + v| - 1 = |F| = r(F)$. Így az 1.4.8 lemma miatt $|F| = r(F) = r(X)$, vagyis az F elemszáma valóban csak X-től függ. Bebizonyítottuk tehát, hogy $(S, \mathcal{F})$ valóban matroid, amelynek rangfüggvénye éppen r. •

Figyeljük meg, hogy a rang-axiómákkal ekvivalens rendszert kapunk, ha (R3)-t kicseréljük (R3′)-re. Valóban, az előbb levezettük (R3′)-t, míg a fordított irány $|X|$ szerinti indukcióval könnyen látható.

Kimutatjuk, hogy (R3) helyettesíthető a következővel is:

(R3″) $r(s) \leq 1$ minden $s \in S$ elemre.

Valóban, (R3″) és (R4)-ből kapjuk $|X| \geq \sum_{s\in X} r(s) \geq r(X)$ és innen (R3) következik. Másrészt (R3″) speciális esete (R3)-nek.

Feladat 1.4.6 *Legyen $Z \subseteq S$ rögzített részhalmaz és definiáljuk az $S' := S - Z$ halmazon az alábbi r' függvényt. $r'(X) := r(X \cup Z) - r(Z)$. Igazoljuk, hogy r' kielégíti a rang-axiómákat! Az M függetlenjeivel hogyan lehet meghatározni az r' rangfüggvényű matroid függetlenjeit?*

Lineáris kiterjesztés $(*-)$

Megmutatjuk, hogy a szubmodularitási egyenlőtlenség általánosítható kettőnél több halmazra is. Tetszőleges $b : 2^S \to \mathbf{R}$ halmazfüggvény, amelyre $b(\emptyset) = 0$, kézenfekvő módon kiterjeszthető n-dimenziós vektorokra, ahol $n = |S|$, a következőképpen. Adott $c \in \mathbf{R}^n$ vektorra indexeljük úgy S elemeit, hogy $c(s_1) \geq \ldots \geq c(s_n)$ és legyen $S_i := \{s_1, \ldots, s_i\}$. Definiáljuk $\hat{b}(c)$-t a

$$\hat{b}(c) := c(s_n)b(S_n) + \sum_{i=1}^{n-1}[c(s_i) - c(s_{i+1})]b(S_i) \tag{1.8}$$

képlettel. Látszik, hogy tetszőleges $Z \subseteq S$ halmazra $b(Z) = \hat{b}(\chi_Z)$, ahol χ_Z jelöli a Z halmaz karakterisztikus függvényét, (amelynek értéke tehát a Z elemein 1, míg az $S - Z$ elemein 0). Azt mondjuk, hogy $\hat{b}$ a b halmazfüggvény **lineáris kiterjesztése**.

Gyakorlat 1.4.7 *Igazoljuk, hogy* $\hat{b}$ **pozitívan homogén**, *azaz minden nemnegatív* α *számra* $\hat{b}(\alpha c) = \alpha\hat{b}(c)$. *Igazoljuk, hogy* $X, Y \subseteq S$ *esetén* $\hat{b}(\chi_X + \chi_Y) = b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$.

Gyakorlat 1.4.8 *Igazoljuk, hogy nem feltétlenül különböző halmazokból álló* $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_m$ *halmazláncra* $\hat{b}(\sum_i \chi_{Z_i}) = \sum_i b(Z_i)$.

Gyakorlat 1.4.9 *Tegyük fel, hogy a* c *súlyozás különböző értékei* $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_t$. *Legyen* $T_i := \{s : c(s) \geq \lambda_i\}$. *Ekkor* $\hat{b}(c) = \lambda_t b(S) + \sum_{i=1}^{t-1}(\lambda_i - \lambda_{i+1})b(T_i)$.

Feladat 1.4.10 *Igazoljuk, hogy ha az* S *alaphalmazon adott két matroid, melyek rangfüggvényére* $r_1(X) + r_2(S - X) \geq k$ *minden* $X \subseteq S$ *halmazra fennáll, akkor* $\hat{r}_1(c) + \hat{r}_2(\chi_S - c) \geq k$ *is teljesül minden* $c : S \to \mathbf{R}$ *vektorra.*

Miután $\hat{b}(\chi_X + \chi_Y) = b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$, a szubmodularitási egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy $b(X) + b(Y) \geq \hat{b}(\chi_X + \chi_Y)$. Ezt általánosítja az alábbi lemma.

Lemma 1.4.9 *Legyen* b *szubmoduláris függvény az* S *alaphalmazon. Tetszőleges* $X_1, X_2, \ldots, X_m \subseteq S$ *halmazokra*

$$\sum_i^m b(X_i) \geq \hat{b}(\sum_i^m \chi_{X_i}). \tag{1.9}$$

Biz. Az $\{X_1, \ldots, X_m\}$ halmaz családra alkalmazzuk a kikeresztezési eljárást, azaz amíg csak létezik két egymást nem tartalmazó halmaz, helyettesítsük őket a metszetükkel és az uniójukkal. Eközben egyrészt a szereplő halmazok b-összege a b függvény szubmodularitása miatt nem nő, másrészt az elemek fedettségi száma, vagyis a szereplő halmazok karakterisztikus vektorainak összege egyáltalán nem változik. A kikeresztezési eljárás véges sok lépés után véget ér, hiszen egy lépésnél a halmazok száma nem változik, ugyanakkor a méreteik négyzetösszege szigorúan nő (merthogy $X - Y \neq \emptyset \neq Y - X$ esetén $|X|^2 + |Y|^2 < |X \cap Y|^2 + |X \cup Y|^2$). Az eljárás tehát egy $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \ldots \subseteq Z_m$ halmazláncot szolgáltat, amelyre $\sum_i \chi_{X_i} = \sum_i \chi_{Z_i}$, és így $\sum_i b(X_i) \geq \sum_i b(Z_i) = \hat{b}(\sum_i \chi_{Z_i}) = \hat{b}(\sum_i \chi_{X_i})$. •

Az (1.9) összefüggést **általánosított szubmoduláris egyenlőtlenség**nek hívjuk.

Feladat 1.4.11 *A lemma általánosításaként igazoljuk, hogy* $\hat{b}(c_1) + \hat{b}(c_2) \geq \hat{b}(c_1 + c_2)$.

Egy matroid r rangfüggvényének lineáris kiterjesztéséről hamarosan megmutatjuk, hogy szép jelentése van. Az 1.5.8 tételben ugyanis belátjuk majd, hogy $\hat{r}(c)$ nem más, mint a maximális súlyú bázis súlya a c súlyfüggvényre nézve.

1.4.3 Ko-rang, zárt és lezárt

Egy X halmaz rangja értelmezhető akként, hogy egy bázis maximum mennyire tud X-be belemetszeni. Ennek alapján természetes bevezetni az X halmaz $t(X)$ **ko-rang**ját, amely definíció szerint azt méri, hogy egy bázis legkevesebb hány elemmel metsz bele X-be. Nyilván $r(S) = t(S)$, sőt könnyen látható, hogy $t(X) = r(S) - r(S - X)$, és ezért t szupermoduláris (azaz $t(X) + t(Y) \leq t(X \cap Y) + t(X \cup Y)$).

A későbbiekben hasznos lesz a következő definíció. Azt mondjuk, hogy a (p, b) pár **paramoduláris**, ha b szubmoduláris függvény, p szupermoduláris, és fennáll rájuk a

$$b(X) - p(Y) \geq b(X - Y) - p(Y - X) \tag{1.10}$$

ún. **kereszt-egyenlőtlenség**.

Gyakorlat 1.4.12 *Igazoljuk, hogy egy matroid r rang- és t ko-rangfüggvényére (t, r) paramoduláris.*

Bebizonyítunk egy paramoduláris párokra vonatkozó érdekes eredményt, amelyre azonban csak később lesz szükségünk.

Lemma 1.4.10 $(*-)$ *Legyen (p, b) paramoduláris pár az S' alaphalmazon. Tegyük fel, hogy az $f : S' \to \mathbf{Z}$, $g : S' \to \mathbf{Z}$ egészértékű függvényekre $f \leq g$ és minden $X \subseteq S'$ halmazra*

$$f(X) := \sum [f(v) : v \in X] \leq b(X), \tag{1.11}$$

$$g(X) := \sum [g(v) : v \in X] \geq p(X). \tag{1.12}$$

Ekkor létezik olyan $m : S' \to \mathbf{Z}$ egészértékű függvény, amelyre $f \leq m \leq g$ és minden $X \subseteq S'$ halmazra $p(X) \leq m(X) \leq b(X)$.

Biz. $\sum[g(s) - f(s) : s \in S']$ szerinti indukciót alkalmazunk. Amennyiben ez a szám 0, azaz $f = g$, akkor az $m := g$ választás nyilván jó lesz. Tegyük most fel, hogy létezik egy olyan $s \in S'$ elem, amelyre $f(s) < g(s)$. Amennyiben $f(s)$ értékét eggyel növelve a keletkező f'-re is fennáll (1.11) minden $X \subseteq S'$-re, úgy indukció miatt létezik a kívánt m és ez persze jó lesz az eredeti f-re nézve is. Amennyiben f'-re nézve (1.11) megsérül, akkor létezik olyan X halmaz, amelyre $f(X) = b(X)$. Teljesen analóg, ha g csökkenthető az s elemen eggyel az (1.12) feltétel megsértése nélkül, akkor indukcióval kész vagyunk. Ha nem csökkenthető, akkor létezik egy olyan Y halmaz, amelyre $g(Y) = p(Y)$. De ekkor, $f(X) - g(Y) = b(X) - p(Y) \geq b(X - Y) - p(Y - X) \geq f(X - Y) - g(Y - X) = f(X) - f(X \cap Y) - [g(Y) - g(X \cap Y)]$, amiből $f(X \cap Y) \geq g(X \cap Y)$, ami ellentmond az $f \leq g, f(s) < g(s)$ feltevéseknek. •

A következő fontos fogalmak lineáris algebrából jönnek. Egy $X \subseteq S$ részhalmazt akkor nevezünk **zárt**nak, ha bármely $x \in S - X$ elemre $r(X + x) > r(X)$. Az S alaphalmaz mindig zárt. Egy halmaz **nyílt**, ha komplementere zárt. Egy $r(S) - 1$ rangú zárt halmaz neve **hipersík**.

Gyakorlat 1.4.13 *Zárt halmazok metszete zárt. Egy halmaz pontosan akkor hipersík, ha vágás komplementere.*

Feladat 1.4.14 *Tegyük fel, hogy a $Z \subset S$ részhalmaz zárt az S-en értelmezett M matroidban. Igazoljuk, hogy ha az $M|Z$ matroid (az M megszorítása Z-n) felbontható, akkor ennek minden direkt összeadandója zárt M-ben.*

Egy $X \subseteq S$ részhalmaz $\sigma(X)$ **lezárt**ján (más szóval az X **által feszített halmaz**on) azon $x \in S$ elemek halmazát értettük, melyekre $r(X + x) = r(X)$. Eszerint a lezárt mindig zárt halmaz és minden halmaz része a lezártjának. Az 1.4.8 lemma szerint $\sigma(X)$ nem más, mint az X-et magában foglaló, egyértelműen meghatározott legbővebb olyan halmaz, melynek rangja ugyanaz, mint X-é. Még másképp fogalmazva $\sigma(X)$ az X-et tartalmazó zárt halmazok metszete.

TÉTEL 1.4.11 $(*-)$ *Legyen X zárt halmaz, amelyre $r(X) < r(S)$. Ekkor X $r(S) - r(X)$ hipersík metszete, és egyúttal $r(S) - r(X)$ vágás egyesítésének a komplementere.*

Biz. A második rész következik az elsőből és az 1.4.13 gyakorlatból. Az első részhez X egy F maximális függetlenjét egészítsük ki egy B bázissá. Minden $x \in B - F$ elemhez legyen H_x a $B - x$ lezártja és legyen $H := \cap_{x \in B-F} H_x$. Állítjuk, hogy $H = X$. Valóban, $X \subseteq H$ nyilván fennáll. Fordítva, legyen $z \in S - X$. Mindenesetre z nem hurok, hiszen egy hurok minden zárt halmazhoz hozzátartozik.

Ha $z \in B$, akkor $z \notin H_z$ és így $z \notin H$. Ha $z \notin B$, akkor tekintsük a $C := C(B, z)$ alapkört. Mivel X zárt, nem lehet, hogy az alapkör valamennyi B-be eső eleme X-ben van, létezik tehát egy $x \in C \cap (B - F)$ elem. De ekkor z nincs benne H_x-ben, és így H-ban sem. •

Feladat 1.4.15 *Legyen F az X egy maximális független részhalmaza. Igazoljuk, hogy X akkor és csak akkor zárt, ha minden $s \in S - X$ elemre $F + s$ nem tartalmaz kört.*

Feladat 1.4.16 *Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $\{V_1, V_2, \ldots, V_t\}$ a V egy olyan partíciója, ahol mindegyik V_i összefüggő gráfot feszít. Igazoljuk, hogy a $V_1, \ldots, V_t$ halmazok által feszített élek halmazainak uniója zárt a gráf körmatroidjában, és megfordítva, hogy a körmatroid minden zárt halmaza így áll elő.*

Gyakorlat 1.4.17 *Egy gráf körmatroidjában egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha a csúcsok egy partíciójának a határa.*

Feladat 1.4.18 *Igazoljuk, hogy a lezárási operátor valamennyi $A, B \subseteq S$ halmazra és $x, y \in S$ elemre kielégíti a következő tulajdonságokat.*
(S1) $A \subseteq \sigma(A)$,
(S2) $A \subseteq B => \sigma(A) \subseteq \sigma(B)$,
(S3) $\sigma(\sigma(A)) = \sigma(A)$,
(S4) *Ha* $y \notin \sigma(A)$, *és* $y \in \sigma(A + x)$, *akkor* $x \in \sigma(A + y)$.

Feladat 1.4.19 *Mutassuk meg, hogy ha adott egy olyan σ függvény, amely teljesíti a fenti négy tulajdonságot, akkor egyértelműen létezik egy olyan matroid, amelynek lezárási függvénye σ.*

Gyakorlat 1.4.20 *Hurokmentes matroidban a maximális 1 rangú halmazok partícionálják az alaphalmazt.*

2007. május 6. ulmat13

1.5 MATROID ALGORITMUSOK ÉS POLIÉDEREK

1.5.1 Orákulumok

Már az 1.3.2 szakaszban felvetődtek matroidokkal kapcsolatos algoritmikus kérdések. Ahhoz, hogy egy ilyen algoritmus hatékonyságáról egyáltalán beszélni lehessen, tisztázni kell, mit is jelent algoritmikus szempontból az a kijelentés, hogy *adott egy matroid.* A hatékonyság szokásos mértéke a bemenő adatok méretének függvényében megadott lépésszám. Ezért, ha egy matroidot például úgy adunk meg, hogy felsoroljuk a független halmazait, akkor egy olyan algoritmust, amely ezek számában polinomiális aligha tekinthetünk hatékonynak, hiszen a független halmazok száma tipikusan exponenciális $|S|$-ben. Márpedig a hatékonyságra olyan definíciót szeretnénk megfogalmazni, amely egy algoritmust akkor tekint hatékonynak, ha az $|S|$-ben polinomiális.

Erre kézenfekvő eszköz az lehetne, ha a matroidoknak találnánk valamiféle „rövid” elkódolási módját, ami azt jelenti, hogy minden matroidhoz hozzárendelünk egy kódot (pl. egész számok egy sorozatát, egy mátrixot, gráfot, stb.), melynek mérete az $|S|$ egy (minden matroidra közös) hatványával korlátozható. Természetesen a kódtól elvárjuk, hogy abból a matroid kiolvasható legyen. Például a grafikus matroid kódja maga a gráf, a mátrix-matroid kódja maga a mátrix. Ezen kódok valóban nem túl nagyok és belőlük egyszerű algoritmus (szélességi keresés illetve Gauss elimináció) segítségével egy halmaz függetlensége vagy függősége megállapítható.

Bár már ezzel az ártatlannak tűnő megjegyzéssel is vigyázni kell. Tegyük fel ugyanis, hogy adott néhány egymástól algebrailag független változó és a mátrixnak az elemei ezen változók lineáris függvényei. Mindmáig megoldatlan fontos kérdés, hogy miként lehet determinisztikusan polinom időben eldönteni, hogy a determináns azonosan nulla-e vagy sem. A Gauss elimináció önmagában nem jó, mert a számolás közben előjövő tagok mérete nagyon (=exponenciálisan) felnőhet (még akkor is, ha végül minden kiesik és a determináns azonosan nulla). Ugyanakkor, ha a változók helyébe véletlenül számokat helyezünk, a determinánst már ki tudjuk hatékonyan számolni. Ha ez nem nulla, akkor persze eredetileg sem lehetett az. Ha nulla, akkor ennek vagy az az oka, hogy az eredeti determináns is nulla volt, vagy egyszerűen csak az, hogy a behelyettesítéssel pont eltaláltunk egy többváltozós polinomnak egy gyökét. Ha ezt a behelyettesítési kísérletet más számokkal többször is elvégezve mindig nulla adódik, akkor szemléletesen érződik, hogy az eredeti determináns nagy valószínűséggel tényleg nulla (és Schwartz egy lemmája alapján pontosan megmondható, hogy mekkora is ez a valószínűség k független kísérlet esetén). Ilyen értelemben tehát létezik véletlent használó hatékony algoritmus. Példaképp megemlíthető az az önmagában is érdekes speciális eset, amikor egy G gráf minden ij élének megfeleltetünk egy x_{ij} változót, majd elkészítjük azt a mátrixot, ahol az a_{ij} helyre x_{ij}-t, míg az a_{ji} helyre $-x_{ij}$-t írunk. Az így kapott Tutte-mátrixról Tutte kimutatta, hogy a determinánsa pontosan akkor azonosan nulla, ha a gráfnak nincsen teljes párosítása. Ebből látható, hogy az előbbi determináns meghatározására szóló determinisztikus algoritmus megoldaná a párosítás problémát is (amelyre ugyan ismert Edmonds algoritmusa, de már az is meglehetősen ravasz).

Általános matroidra mindenesetre az alaphalmaz méretében polinomiális hosszúságú kód elvileg sem létezhet, mert $|S|^k$ méretű kódokkal legfeljebb $O(2^{(|S|^k)})$ darab halmazrendszer kódolható el, márpedig a 2.2 részben látni fogjuk, hogy a matroidok számának nagyságrendje $|S|$-nek duplán exponenciális függvénye.

E látszólagos zsákutcából a következő kiút kínálkozik. Az algoritmushoz nem adjuk meg semmilyen explicit formában a matroidot. Ehelyett egy szubrutint, függetlenségi orákulumot tartunk készenlétben, amely azt tudja, hogy az alaphalmaz tetszőleges részhalmazát megadva neki, megmondja, hogy az illető halmaz független-e vagy sem. Ebben a szemléletben egy matroid-algoritmus úgy fut, hogy időnként megkérdezi a függetlenségi orákulumot arról, hogy egy halmaz független-e, és a válasz függvényében folytatja a számításait. Ilyen matroid-algoritmust akkor tekintünk polinomiálisnak, ha egyrészt a saját számításainak mennyisége $|S|$ hatványával korlátozható, másrészt a függetlenségi orákulumhoz is a futása során legfeljebb csak $|S|$-nek egy hatványaszor fordul.

Természetesen egy matroid-algoritmus konkrét matroidokra csak akkor használható, ha az adott matroidra a függetlenségi orákulumot valahogy ténylegesen meg tudjuk valósítani (mint például racionális vagy valós mátrix által definiált mátrix-matroid esetén a Gauss eliminációval). De ez már más szinten lévő kérdés: a matroid-algoritmus nem törődik azzal, hogy konkrét matroid esetén a függetlenségi orákulum algoritmikusan realizálható-e vagy sem. (A meggondolás némi analógiát mutat az erősen polinomiális algoritmus fogalmával abban az értelemben, hogy ott a számokkal való alapműveleteket tekintettük egyetlen lépésnek függetlenül a számok nagyságától, nem törődve azzal, hogy két szám összeszorzása például hogyan is valósítható meg).

Matroidokat, amint láttuk, persze nem csak függetlenekkel lehet megadni. Ha egy matroid például a bázisaival van definiálva, akkor egy matroid-algoritmusban a függetlenségi orákulum helyett előnyösebb, ha egy bázis orákulum áll rendelkezésre. Vagy esetleg egy rang-orákulum vagy kör-orákulum. A megelőző szakaszokban láttuk, hogy a függetlenségi-, bázis-, rang-, illetve kör-axióma rendszerek páronként ekvivalensek legalábbis abban az értelemben, hogy mindegyikük matroidot definiál.

Vizsgáljuk most meg azt a kérdést, hogy miképp viszonyulnak egymáshoz ezek az axióma-rendszerek algoritmikus szempontból. Más szóval, ha egy matroidnak adott valamelyik típusú orákuluma, akkor ennek felhasználásával tudunk-e gyártani egy másik típusú orákulumot. Kiderül, hogy bizonyos esetekben igen, máskor viszont nem a válasz.

Állítás 1.5.1 *A rang- és a függetlenségi orákulumok egymással polinomiálisan ekvivalensek.*

Biz. Tegyük fel először, hogy rendelkezésünkre áll egy függetlenségi orákulum és ennek felhasználásával polinom időben szeretnénk meghatározni egy adott $X \subseteq S$ halmaz rangját. E célból meghatározzuk az X egy maximális elemszámú független részhalmazát. Menjünk végig az X elemein egy (tetszőlegesen) megadott $x_1, \ldots, x_t$ sorrendben, és válasszuk ki az éppen tekintett elemet akkor, ha a már ezt megelőzően kiválasztott elemekkel együtt független halmazt alkot. Az (I3) függetlenségi axióma szerint így X-nek egy maximális, tehát $r(X)$ elemszámú független részhalmazát kapjuk, éspedig a függetlenségi orákulum $|X|$ darab hívásával.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a rang-orákulum áll rendelkezésünkre (amely tehát egy tetszőleges X halmaz megadásakor megmondja az X rangját). Ennek segítségével a függetlenségi orákulum rögtön realizálható, hiszen egy X halmaz pontosan akkor független, ha $r(X) = |X|$. •

Hogyan viszonylik egymáshoz a függetlenségi és a bázis orákulum, amely egy megadott halmazról dönti el, hogy bázis-e vagy sem?

Állítás 1.5.2 *A függetlenségi orákulum segítségével a bázis orákulum előállítható.*

Biz. Először meghatározzuk a fentebb leírt módon az alaphalmaz $r(S)$ rangját. Ezután egy bázisság eldöntésére beadott X halmazról megkérdezzük, hogy független-e, és ha a válasz igen és $|X| = r(S)$, úgy X bázis, különben pedig nem az. •

Állítás 1.5.3 *A bázis orákulum segítségével polinomiális lépésben válaszoló függetlenségi orákulum nem állítható elő.*

Biz. Azt látjuk be, hogy egyetlen bázist sem tudunk találni polinom időben (márpedig egy függetlenségi orákulum az tudna). Még akkor sem, ha a matroid r rangja előre ismert.

Tekintsük ugyanis azt a matroid osztályt, amelyben egyetlen egy r elemű bázis van, az ebbe nem tartozó elemek mind hurokelemek. Mármost, ha az algoritmusunk sorra kérdezgeti az r-elemű halmazokat az orákulumtól, vajon bázisok-e, és a válasz minden esetben nemleges, akkor amíg csak van még két meg nem kérdezett r elemű halmaz, az algoritmusunk nem tudhatja a helyes választ, hiszen ezen kettő bármelyike lehet az egyetlen bázis. •

Érdekes, hogy megváltozik a helyzet, ha a rang helyett előre meg van adva egy tetszőleges bázis. Nevezzük ezt **erős bázis orákulum**nak: ez tehát tetszőleges halmazról el tudja dönteni, hogy bázis-e továbbá rendelkezésére áll egy adott B bázis.

Állítás 1.5.4 *Az erős bázis orákulum segítségével egy függetlenségi orákulum előállítható polinom időben.*

Biz. Tegyük fel, hogy egy X halmazról kell eldöntenünk, hogy független-e. A megadott B_1 bázisból kiindulva olyan bázisokat igyekszünk konstruálni, melyeknek egyre több közös eleme van X-szel. Amennyiben az aktuális rendelkezésre álló B bázis magába foglalja X-t, úgy X független és az algoritmus futása véget ér. Ha létezik $x \in X - B$ elem, akkor minden egyes $y \in B - X$ elemre megkérdezzük, hogy $B' := B - y + x$ bázis-e. Amennyiben valamelyik y-ra igenlő a válasz, úgy a B' bázisnak eggyel több közös eleme van X-szel, és B'-re vonatkozólag iteráljuk az eljárást. Ha viszont minden y-ra nemleges a válasz, az azzal ekvivalens, hogy az x-nek az B-hez tartozó alapköre teljesen X-hez tartozik, vagyis X nem független. •

A **kör orákulum** egy megadott halmazról megmondja, hogy kör vagy sem.

Feladat 1.5.1 *Igazoljuk, hogy a függetlenségi orákulumból lehet kör orákulumot gyártani, de fordítva nem.*

1.5.2 A mohó algoritmus

Tegyük fel, hogy az M matroid S alaphalmazán adott egy $c : S \to \mathbf{R}$ súlyfüggvény (vagy költség-függvény). Készítsünk algoritmust maximális össz-súlyú bázis keresésére. Megjegyezzük, hogy egy ilyen algoritmus segítségével maximális súlyú független halmaz már könnyen kereshető. Valóban, ha c nemnegatív, akkor egy maximális súlyú bázis automatikusan maximális súlyú független, hiszen egy független halmaz mindig kibővíthető bázissá. Amennyiben vannak negatív súlyú elemek, úgy ezeket töröljük el a matroidból és a keletkező részmatroidnak keressük meg egy maximális súlyú bázisát. Ez nyilván az eredeti matroid maximális súlyú független halmaza lesz.

A maximális súlyú bázis előállításához a mohó algoritmus egymás után választ elemeket a következő szabály szerint. Az első lépésben kiválasztja az egyik maximális súlyú elemet, amely nem hurok. Az általános lépésben az addig kiválasztott F független halmazról eldönti, hogy bázis-e. Ha igen, az eljárás a kapott bázis kiadásával véget ér. Ha nem, akkor megnöveli F-t egy olyan maximális súlyú $x \in S - F$ elemmel, amelyre $F + x$ független. Amennyiben itt több (azonos súlyú) elem is rendelkezére áll, bármelyiket választhatjuk. Figyeljük meg, hogy az (I3) függetlenségi axióma pontosan azt mondja ki, hogy a mohó algoritmus minden $0-1$ értékű súlyfüggvény esetén maximális súlyú bázist ad.

TÉTEL 1.5.5 *A fenti mohó algoritmus maximális súlyú bázist szolgáltat.*

Biz. Jelölje B_{mo} az algoritmus által konstruált bázist. Legyen B_{max} egy olyan maximális súlyú bázis, amelynek B_{mo}-val maximális sok közös eleme van. Készen vagyunk, ha $B_{mo} = B_{max}$, ezért feltehetjük, hogy nem ez a helyzet. Tegyük fel, hogy az algoritmus a B_{mo} elemeit az $f_1, f_2, \ldots, f_r$ sorrendben találta meg, és legyen f_k az első olyan elem, amely nincs B_{max}-ban.

Az 1.4.3 tétel szerint létezik olyan $e \in B_{max} - B_{mo}$, amely kölcsönösen kicserélhető f_k-val. Ami azt jelenti egyrészt, hogy $\{f_1, \ldots, f_{k-1}, e\}$ független és így a mohó algoritmus előírása szerint $c(e) \leq c(f_k)$. Másrészt, B_{max} maximalitása miatt, $c(e) \geq c(f_k)$. Ezért $c(e) = c(f_k)$, és így $B_{max} - e + f_k$ is maximális súlyú bázis, aminek eggyel több közös eleme van B_{mo}-val, ellentmondásban B_{max} választásával. •

A mohó algoritmus tényleges végrehajtásához először rendezzük nagyság szerint csökkenő sorrendbe az elemeket, azaz feltehető, hogy az elemek úgy vannak indexelve, hogy $c(v_1) \geq c(v_2) \geq \ldots \geq c(v_n)$, ahol $n = |S|$. Azonos súlyú elemek egymás közti sorrendje tetszőleges lehet. Ebben a sorrendben végighaladva az elemeken mindegyikről eldöntjük, hogy kiválasztjuk-e vagy sem: az éppen aktuális elemet akkor választjuk ki, ha a már kiválasztott elemekhez véve még mindig független halmazt kapunk.

Következik, hogy az optimális bázis nem annyira a súlyozás tényleges értékeitől függ, hanem csupán az elemeknek súlyok által meghatározott sorrendjétől. Vagyis ha például két (vagy több) súlyfüggvényhez ugyanaz a csökkenő sorrend tartozik, akkor létezik olyan bázis, amely szimultán mindegyik súlyfüggvényre nézve maximális súlyú.

Feladat 1.5.2 *Igazoljuk, hogy tetszőleges maximális súlyú bázis megkapható a mohó algoritmus alkalmazásával* (abban az értelemben, hogy a mohó algoritmus futása során amikor több elem közül is választhatunk, úgy ezt alkalmasan tesszük).

Természetesen a mohó algoritmus minimális súlyú bázis megkeresésére is jó, hiszen ez ekvivalens a $-c$ súlyozásra vonatkozó maximális bázis problémával. Ilyenkor tehát minden lépésben a legkisebb súlyú elemet választjuk ki, amely a már kiválasztottakkal együtt független halmazt alkot.

A mohó algoritmust először a körmatroidra vonatkozó speciális esetben írták le, amikor is egy összefüggő gráfban kellett maximális súlyú feszítő fát keresni. Ismert e feladatnak a következő alternatív megoldása is, amely egyfajta „óvatos” algoritmusnak tekinthető. Tekintsük a gráf éleit növekvő súly szerinti sorrendben, és egy élt dobjunk ki, ha a maradék gráf még mindig összefüggő lesz. Végül egy feszítő fát kapunk, amelyről belátható, hogy maximális súlyú. Ez az algoritmus is kiterjeszthető matroidokra. Itt csökkenő súlyok szerint megyünk végig az elemeken, az aktuálisat akkor dobva ki, ha a megmaradó matroid még tartalmazza az eredetinek egy bázisát. Az algoritmus akkor fejeződik be, amikor már csak egy bázis maradt.

Feladat 1.5.3 *Igazoljuk, hogy a fenti óvatos algoritmus maximális súlyú bázist szolgáltat!*

A feladatot a mohó algoritmus igazolásánál használtakhoz hasonló eszközökkel lehet belátni. Ez tehát itt kijön. Látni fogjuk azonban, hogy ennek mélyebb oka is van, és valójában az óvatos algoritmus interpretálható egy másik matroidon, az úgynevezett duális matroidon dolgozó mohó algoritmusként is: lásd a 2.1.1 Tétel utáni megjegyzést.

Feladat 1.5.4 *Igazoljuk, hogy ha a súlyok páronként különbözőek, akkor a maximális súlyú bázis egyértelmű!*

Feladat 1.5.5 *Tegyük fel, hogy két súlyozásunk is adott: c_1 és c_2. Hogyan lehet a matroidnak olyan bázisát megtalálni, amely a c_1-re nézve maximális súlyú, és ezen belül a c_2-re nézve maximális súlyú? Mi a helyzet, ha kettő helyett $k \geq 3$ súlyozásunk van?*

Hasznos lesz a maximális súlyú bázisok alábbi jellemzése.

TÉTEL 1.5.6 *Egy B bázis akkor és csak akkor maximális súlyú, ha minden $y \in S - B$ és $x \in C(B, y)$ elemre $c(y) \leq c(x)$.*

Biz. Ha x benne van az y alapkörében, akkor $B - x + y$ is bázis, tehát ha B maximális súlyú, akkor $c(x) \geq c(y)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy B' egy maximális súlyú bázis. Alkalmazzuk az 1.4.5 tételt a $B_1 = B$ és $B_2 = B'$ szereposztással. A hipotézis szerint $c(f(x)) \leq c(x)$ minden $x \in B - B'$. Ebből adódik, hogy $c(B') \leq c(B)$. Mivel B' maximális súlyú volt, így $c(B) \leq c(B')$, azaz B is maximális súlyú. •

Feladat 1.5.6 *Igazoljuk az előző tételt az 1.4.3 tétel felhasználásával!*

TÉTEL 1.5.7 *Egy F független halmaz akkor és csak akkor maximális súlyú, ha minden elemének súlya nemnegatív, $c(y) \leq 0$ fennáll minden olyan $y \in S - F$ elemre, amelyre $F + y$ független, továbbá $c(y) \leq c(x)$ fennáll valahányszor $F + y$ függő és $x \in C(F, y)$.*

Biz. A feltételek nyilván szükségesek. Az elegendőségük igazolásához legyen S' a (szigorúan) pozitív súlyú elemek halmaza és legyen $F' := S' \cap F$. Mivel F minden elemének súlya nemnegatív, $c(F') = c(F)$, és így F akkor és csak akkor maximális súlyú, ha F' maximális súlyú független az $M' := M|S'$ matroidban, ami azzal ekvivalens, (mivel S' minden eleme pozitív), hogy F' maximális súlyú bázisa M'-nek. Az F-re tett feltételek nyomán az 1.5.6 tételbeli feltételek teljesülnek, így F' valóban maximális súlyú bázisa M'-nek, tehát F maximális súlyú független M-ben. •

Feladat 1.5.7 *Készítsünk algoritmust annak eldöntésére, hogy egy adott független halmaz kiegészíthető-e maximális súlyú bázissá.*

Feladat 1.5.8 *Készítsünk algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e olyan bázis, amely előre adott $c_1, \ldots, c_k$ súlyfüggvények mindegyikére nézve szimultán maximális súlyú.*

Feladat 1.5.9 *Igazoljuk, hogy bármely c súlyozásra a maximális súlyú bázisok kielégítik a bázisaxiómákat.*

Feladat 1.5.10 *Igazoljuk, hogy ha egy $G = (X, Y; E)$ páros gráfban pontosan egy teljes párosítás létezik, akkor mind az X, mind az Y elemei úgy sorbarendezhetők, hogy az azonos indexű elemek szomszédosak G-ben (és így az egyértelmű teljes párosítást adják), továbbá kisebb indexű $x \in X$ elem sohasem szomszédos nagyobb indexű $y \in Y$ elemmel.*

Feladat 1.5.11 *Legyen F egy matroid független halmaza, $X \subseteq F$ és $Y \subseteq S - F$ azonos elemszámú halmazok. Legyen $G = (X, Y; E)$ az a páros gráf, amelyben amelyben xy pontosan akkor él, ha $x \in C(F, y)$, vagyis ha a $F + y$ nem független, de $F + y - x$ az. Igazoljuk, hogy amennyiben G-nek pontosan egy teljes párosítása létezik, úgy $F \cup Y - X$ független.*

Feladat 1.5.12 *Legyen B egy maximális súlyú bázis a c súlyfüggvényre nézve. Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bázisbeli elemek és az $y_1, y_2, \ldots, y_k$ bázison kívüli elemek olyanok, hogy $x_i \in C(B, y_i)$ és $c(x_i) = c(y_i)$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra, és $h > j$, $c(x_h) = c(y_j)$ esetén $x_h \notin C(B, y_j)$. Ekkor $B' := B - \{x_1 \ldots, x_k\} \cup \{y_1, \ldots, y_k\}$ maximális súlyú bázis.*

1.5.3 Matroidok poliéderei

Ismeretes, hogy a maximális folyamra vagy a legolcsóbb útra min-max tételek fogalmazhatók meg. A maximális folyam minimális vágás (MFMC) tétel többek között arra jó, hogy tanúsítványt szolgáltasson egy adott folyam maximalitására: egy ugyanolyan nagyságú vágást. Egy ilyen vágás léte valóban bizonyítja az adott folyam maximalitását, függetlenül attól, hogy miként tudtuk kiszámítani akár a folyamot, akár a vágást. A mohó algoritmus annyira egyszerű volt a matroid maximális súlyú bázisának (vagy függetlenjének) meghatározására, hogy a bázis maximalitását könnyen igazoló tanúsítványnak nem is igazán érezzük szükségét: a tanúsítvány ellenőrzése nem egyszerűbb feladat, mint a mohó algoritmus egy esetleges újbóli lefuttatása. Mindamellett ilyen tétel megfogalmazható. Ehhez használni fogjuk az r rangfüggvény lineáris kiterjesztésének fogalmát, melyet az 1.4.2 részben az (1.8) képlettel definiáltunk.

TÉTEL 1.5.8 *Az $M = (S, r)$ matroidban tetszőleges $c : S \to \mathbf{R}$ súlyozásra a maximális bázis súlya $\hat{r}(c)$, ami definíció szerint*

$$\hat{r}(c) := r(S)c(s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r(S_i)[c(s_i) - c(s_{i+1})], \tag{1.13}$$

ahol $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \ldots \geq c(s_n)$ és $S_i := \{s_1, \ldots, s_i\}$.

Biz. Az ezen sorrend szerint lefuttatott mohó algoritmus olyan B bázist szolgáltat, amelyre $|B \cap S_i| = r(S_i)$ minden i-re fennáll. Egyszerű átösszegzéssel kapjuk, hogy $\hat{r}(c) = r(S)c(s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r(S_i)[c(s_i) - c(s_{i+1})] = |B \cap S|c(s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} |B \cap S_i|[c(s_i) - c(s_{i+1})] = \sum_{s \in B} c(s) = c(B)$. •

Feladat 1.5.13 *A mohó algoritmus segítségével igazoljuk, hogy egészértékű c esetén bármely $Z \subseteq S$ halmazra $\hat{r}(c + \chi_Z) = \hat{r}(c) + r_c(Z)$, ahol $r_c(Z)$ jelöli a Z és egy maximális súlyú bázis metszetének maximális elemszámát* (vagyis az *1.5.9* feladatban definiált matroidban Z rangját).

Feladat 1.5.14 *Igazoljuk, hogy egészértékű c-re $\hat{r}(c - \chi_Z) = \hat{r}(c) + r_c(S - Z) - r(S)$.*

Feladat 1.5.15 *Legyen $c : S \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű, és tegyük fel, hogy a $T \subseteq S$ halmaz olyan, hogy $x \in T, y \in S - T$ elemekre mindig $c(x) > c(y)$. Ekkor $\hat{r}(c - \chi_T) = \hat{r}(c) - r(T)$.*

Feladat 1.5.16 *Igazoljuk, hogy $\hat{r}$ szubadditív, azaz $\hat{r}(c_1) + \hat{r}(c_2) \geq \hat{r}(c_1 + c_2)$ minden c_1 és c_2 súlyozásra fennáll.*

TÉTEL 1.5.9 *A*

$$\max\{cx : x \in \mathbf{R}^S, x \geq 0, x(Z) \leq r(Z) \text{ minden } Z \subset S \text{ részhalmazra és } x(S) = r(S)\} \tag{1.14}$$

primál lineáris program illetve ennek duálisa a

$$\min\{\textstyle\sum_{Z\subseteq S} y(Z)r(Z) : \sum_{s\in Z} y(Z) \geq c(s), \text{ ha } s \in S, \text{ és } y(Z) \geq 0, \text{ ha } Z \subset S\} \tag{1.15}$$

lineáris program olyan, hogy a primál problémának mindig létezik egészértékű (ami automatikusan $0-1$-értékű) optimuma, míg a duál problémának létezik olyan optimális y megoldása, amelyre a $\{Z : y(Z) > 0\}$ halmazrendszer lánc. Továbbá egészértékű c esetén az optimális y is választható egészértékűnek.

Biz. Legyen B egy maximális súlyú bázis és x ennek karakterisztikus vektora. Legyen

$$y(S_n) := c(s_n) \tag{1.16}$$

és

$$y(S_i) = c(s_i) - c(s_{i+1}) \text{ minden } i = 1, \dots, n-1 \text{ -re.} \tag{1.17}$$

Ekkor x (egész) eleme a primál poliédernek és y (amely egész, ha c egész) eleme a duális poliédernek, és az 1.5.8 tétel szerint $cx = yr(:= \sum[y(Z)r(Z) : Z \subseteq S]$, azaz x primál optimum, y duál optimum. •

TÉTEL 1.5.10 *A* $\max\{cx : x \in \mathbf{R}^S, x \geq 0, x(X) \leq r(X)$ *minden* $X \subseteq S$ *részhalmazra*$\}$ *primál lineáris program illetve ennek duálisa a* $\min\{\sum[y(Z)r(Z) : Z \subseteq S] : y \geq 0, \sum[y(Z) : s \in Z] \geq c(s)$ *minden* $s \in S$*-re*$\}$ *lineáris program olyanok, hogy a primál problémának mindig létezik egészértékű (ami automatikusan $0-1$-értékű) optimuma, míg a duál problémának létezik olyan optimális y megoldása, amelyre a $\{Z : y(Z) > 0\}$ halmazrendszer lánc. Továbbá egészértékű c esetén az optimális y is választható egészértékűnek.*

Biz. Amennyiben c nemnegatív, úgy az 1.5.9 tételben kapott primál és duál optimumok itt is jók lesznek, hiszen ekkor az $y(S) = c(s_n)$ érték is nemnegatív. Ha c-nek minden komponense nem-pozitív, akkor $x = 0$ primál megoldás, $y = 0$ duál megoldás és ezek optimálisak. Tegyük most fel, hogy c-nek vannak pozitív és negatív komponensei is és legyen i az az index, amelyre $c(s_i) > 0 \geq c(s_{i+1})$. Legyen $S' := S_i$ és $M' := M|S'$. Legyen x' illetve y' az 1.5.9 tétel által az M'-ben biztosított primál és duál optimális megoldás. Ekkor az x'-t nullákkal kiegészítve kapott x és a változatlan y' primál illetve duális optimuma a 1.5.10 tételbeli program párnak. •

Legyen az M matroid rang-függvénye r és jelölje a független halmazok karakterisztikus vektorainak konvex burkát $P(r)$. Ezt a **matroid poliéder**ének vagy a **függetlenek poliéderé**nek nevezzük. A bázisok karakterisztikus vektorainak konvex burkát a matroid **bázis poliéderé**nek nevezzük és $B(r)$-rel jelöljük.

Ismeretes, hogy minden politop (:=véges sok pont konvex burka) poliéder, azaz előáll véges sok féltér metszeteként (másszóval egy egyenlőtlenség-rendszer megoldás halmazaként). Most explicit megadjuk a függetlenségi és a bázis poliédereket félterek metszeteként, azaz egyenlőtlenségekkel. Legyen

$$B' := \{x \in \mathbf{R}^S : x \geq 0, x(Z) \leq r(Z) \text{ minden } Z \subset S \text{ részhalmazra és } x(S) = r(S)\} \tag{1.18}$$

és legyen

$$P' := \{x \in \mathbf{R}^S : x \geq 0, x(Z) \leq r(Z) \text{ minden } Z \subseteq S \text{ részhalmazra}\}. \tag{1.19}$$

TÉTEL 1.5.11 *$B(r) = B'$ és $P(r) = P'$.*

Biz. Miután $B(r) \subseteq B'$ és $P(r) \subseteq P'$, csak azt kell látni, hogy B' illetve P' csúcsai egészek, hiszen egy B'-ben illetve P'-ben lévő egész (és így $0-1$-es) pont szükségképpen egy bázisnak illetve egy független halmaznak a karakterisztikus vektora. Az 1.5.9 és 1.5.10 tételek szerint viszont B' és P' valóban egész poliéderek. •

Egy alkalmazás

A poliéderes szemlélet hasznát a mohó algoritmus egy érdekes alkalmazásával mutatjuk be. Adott az S alaphalmazon egy M matroid, továbbá S részhalmazainak egy $\{S_1, \dots, S_k\}$ rendszere. Fejlesszünk ki algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e a matroidnak olyan B bázisa, amelyre

$$B \cap S_i \text{ feszíti } S_i\text{-t minden } i\text{-re.} \tag{1.20}$$

Egy teljes gráf körmatroidjára alkalmazva, ennek segítségével például el lehet dönteni, hogy egy adott hipergráf részfa hipergráf-e, azaz létezik-e a hipergráf ponthalmazán egy olyan F feszítő fa, hogy minden hiperél az F egy részfája.

Tekintsük a $c := \sum_i \chi_{S_i}$ súlyfüggvényt és legyen B^* egy maximális c-súlyú bázis, amit például a mohó algoritmus segítségével kereshetünk meg.

TÉTEL 1.5.12 *Akkor és csak akkor létezik* (1.20)*-t kielégítő bázis, ha a maximális c-súlyú B^* bázis ilyen.*

Biz. Az elegendőség semmitmondó. A szükségesség igazolásához tegyük fel, hogy létezik (1.20)-t kielégítő B' bázis. Tekintsük az 1.5.9 tételben megfogalmazott duális lineáris programot, és legyen $y'(Z) := 1$, ha $Z = S_i$ valamely $i = 1, \dots, k$-ra és $y'(Z) := 0$ különben. A c definíciója folytán y' duális megengedett megoldás. Így a maximális c-súlyú bázis súlya legfeljebb $\sum[r(S_i) : i = 1, \dots, k]$, és egy B bázisra pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha $r(S_i) = |B \cap S_i|$ minden i-re, ami épp (1.20). Miután létezik ilyen B' bázis, így minden maximális súlyú bázis teljesíti (1.20)-t. •

2007. május 6. ulmat14

2. Fejezet

MATROIDOK KÉSZÍTÉSE ÉS ELŐFORDULÁSA

Ebben a fejezetben áttekintjük azokat az egyszerűbb és összetettebb műveleteket, melyek segítségével gráfokból vagy meglévő matroidokból újabb matroidot gyárthatunk.

2.1 MATROID MŰVELETEK

2.1.1 Elemi műveletek

Párhuzamos többszörözés

Az M matroid egy s független elemének **párhuzamos többszörözés**én azt értjük, hogy az s elemet helyettesítjük az S-től diszjunkt $S' := \{s_1, \ldots, s_k\}$ halmazzal, és a létrejövő $S - s \cup S'$ alaphalmazon egy X részhalmazt akkor deklarálunk függetlennek, ha $X \subseteq S - s$ és X független M-ben, vagy ha $|X \cap S'| = 1$ és $X - S' + s$ független M-ben. Könnyen látható, hogy így matroidot kapunk, amelyben bármely két új elem kételemű kört alkot. Gráf körmatroidjában ez a konstrukció annak felel meg, hogy egy élt k párhuzamos éllel helyettesítünk. Hasznos a párhuzamos többszörözés egy másik szemléltetése. Tegyük fel, hogy $(S, T; E)$ páros gráf S ponthalmazán adott egy hurokmentes M matroid. Ekkor M-t „rátehetjük" a gráf élhalmazára, egy $F \subseteq E$ részhalmazt akkor tekintve függetlenek, ha az F-beli élek végpontjai S-ben különbözőek és függetlenek. Az így kapott M' matroid izomorf azzal, amit M-ből kapunk, ha minden $s \in S$ elemét fokszámnyiszor ($d_G(s)$-szer) párhuzamosan megtöbbszörözzük. Egy $F \subseteq E$ élhalmaz M'-beli rangja nem más, mint az F S-beli végponthalmazának M szerinti rangja.

Soros többszörözés

Az M matroid egy s elemének **soros többszörözés**én azt értjük, hogy az s elemet helyettesítjük az S-től diszjunkt $S' := \{s_1, \ldots, s_k\}$ halmazzal, és a létrejövő $S - s \cup S'$ alaphalmazon egy X részhalmazt akkor deklarálunk körnek, ha vagy $X \subseteq S - S'$ és X kör M-ben, vagypedig, ha $S' \subseteq X$ és $X - S' + s$ kör M-ben. Könnyen látható, hogy így egy (köreivel definiált) matroidot kapunk. Gráf körmatroidjában ez a konstrukció annak felel meg, hogy egy élt k élből álló úttal helyettesítünk.

Direkt összeg

Tegyük fel, hogy adott k matroid, $M_i = (S_i, \mathcal{F}_i)$ úgy, hogy az S_i alaphalmazok diszjunktak. Legyen $S := \cup_i S_i$ és $\mathcal{F} := \{I \subseteq S : I \cap S_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, \ldots, t\}$, vagyis I független, ha minden i-re az S_i-be eső része független az i-edik matroidban. Az axiómák ezúttal is könnyen ellenőrizhetőek. A keletkező matroidot az M_i matroidok **direkt összeg**ének vagy **diszjunkt unió**jának nevezzük. Rang-függvénye $r(X) = \sum_i r_i(X \cap S_i)$. A direkt összeg egy köre valamelyik M_i összeadandó egy köre, és M_i egy köre M-nek is köre. (Tehát M minden köre valamelyik S_i halmazban fekszik.) Könnyű ellenőrizni, hogy minden matroid blokkjainak direkt összegeként áll elő.

Gyakorlat 2.1.1 *Igazoljuk, hogy egy X halmazra akkor és csak akkor $r(X) = t(X)$, ha M az $M|X$ és $M - X$ matroidok direkt összege.*

Csonkolás

Legyen $M = (S, \mathcal{F})$ matroid és $g \geq 0$ egész szám. Az M matroid egy **csonkolt**ján (truncation) vagy g-**csonkolt**ján azt az M_g matroidot értjük, amelyben egy X halmaz akkor független, ha $\mathcal{F}$-hez tartozik és elemszáma legfeljebb g. Ez nyilván matroid lesz, melynek rangfüggvénye $r_g(X) = \min\{r(X), g\}$.

Nyújtás

Legyen $M = (S, \mathcal{F})$ matroid és $f \geq 0$ egész szám. Az M matroid egy **nyújtás**án (elongation) vagy f-**nyújtás**án azt az M^f matroidot értjük, amelyben egy X halmaz akkor független, ha M egy függetlenjéből keletkezik legfeljebb f elem hozzávételével. Ez matroid lesz, melynek rangfüggvénye $r^f(X) = \min\{r(X) + f, |X|\}$.

Adjungálás

Legyen $M = (S, \mathcal{F})$ matroid, $Z \subseteq S$, és z egy új elem. A z elem Z **szerinti adjungált**jában az $S + z$ halmaz egy X részhalmaza akkor legyen független, ha $X \in \mathcal{F}$ vagy ha $z \in X$ és Z-nek van olyan $z' \notin X$ eleme, amelyre $X - z + z' \in \mathcal{F}$. Ha Z az egyetlen z' pontból áll, akkor a Z szerinti adjungált nem más, mint a z' párhuzamos duplázása.

Feladat 2.1.2 *Igazoljuk, hogy az adjungált valóban matroid, melynek r' rangfüggvényére $X \subseteq S$ esetén $r'(X) = r(X)$, míg $z \in X$ esetén $r'(X) = \min\{r(X \cup Z - z), r(X - z) + 1)\}$.*

Affin matroidban az adjungálás annak felel meg, hogy a Z részhalmaz által feszített affin altérből a matroidhoz veszünk egy „általános helyzetben” lévő új z pontot. Ez azt jelenti, hogy z pontosan akkor van benne valamely X halmaz lezártjában, ha X minden eleme benne van Z lezártjában. Például a síkban, ha Z két pontból áll, akkor az adjungált elem a két pontot összekötő egyenesen van úgy, hogy különbözik minden S-beli ponttól és nincs rajta semelyik más egyenesen, amelyet S két pontja határoz meg.

2.1.2 Duális matroid

Gráfoknál találkoztunk azzal a jelenséggel, hogy a gráf körmatroidja és vágás-matroidja között igen szoros kapcsolat mutatkozik. Nevezetesen a körmatroidban a feszítő fák a bázisok, míg a vágás-matroid bázisai éppen a feszítő fák komplementerei. Valójában minden matroidhoz elkészíthető a duális matroidja.

Legyen $M = (S, \mathcal{B})$ matroid a bázisaival adva. Az M **duálisá**n azt az $M^* = (S, \mathcal{B}^*)$ matroidot értjük, ahol $\mathcal{B}^* := \{X : S - X \in \mathcal{B}\}$. Tehát M^* bázisai éppen az M bázisainak komplementerei. A definícióból világos, hogy a matroid duális matroidjának duálisa önmaga. Természetesen be kell látnunk, hogy M^* tényleg matroidot alkot.

TÉTEL 2.1.1 *$\mathcal{B}^*$ kielégíti a bázis axiómákat. A duális matroid r^* rangfüggvénye:*

$$r^*(X) = |X| + r(S - X) - r(S). \tag{2.1}$$

Biz. Az első bázis-axióma triviálisan teljesül. (B2) igazolásához legyen $B_1^* = S - B_1$ és $B_2^* = S - B_2$ a $\mathcal{B}^*$ két tagja, azaz, B_1 és B_2 az M bázisai. Bármely $x \in B_1^* - B_2^*$ elemre meg kell mutatnunk, hogy létezik egy $y \in B_2^* - B_1^*$ elem, amelyekre $B_1^* - x + y \in \mathcal{B}^*$. Ez azzal ekvivalens, hogy az $x \in B_2 - B_1$ elemhez létezik olyan $y \in B_1 - B_2$ elem, amelyre $B_1 + x - y$ bázisa M-nek, ami éppen a 1.4.2 állítás.

(2.1) igazolásához figyeljük meg, hogy egy X halmaz rangja azt méri, maximum mennyire tud egy bázis X-be belemetszeni. Mármost $|B^* \cap X|$ maximumát, ahol B^* duális bázis, úgy határozhatjuk meg, hogy veszünk M-nek egy olyan B bázisát, amelyre $|B \cap X|$ minimális, azaz amelyre $|B - X|$ maximális. Ez a maximum nyilván $r(S - X)$. Így a minimális $|B \cap X|$ értéke $r(S) - r(S - X)$, amiből a keresett $|B^* \cap X|$ maximuma, azaz $r^*(X) = |X| - r(S) + r(S - X)$. •

A definícióból rögtön látszik, hogy egy $X \subseteq S$ halmaz akkor és csak akkor függetlenje M-nek, ha a komplementere generátora a duálisnak.

Megjegyezzük, hogy most már világos, miért is „kellett” az 1.5.3 feladat szerint az óvatos algoritmusnak maximális súlyú bázis meghatározására helyesen működnie. Ugyanis ez az algoritmus pontosan azt teszi, amit a mohó algoritmus tesz a duális matroid minimális súlyú bázisának megkeresésekor. Márpedig a maximális súlyú eredeti bázisok és a minimális súlyú duális bázisok nyilván egymás komplementerei.

Gyakorlat 2.1.3 *Igazoljuk, hogy $r^*(X) + t(X) = |X|$, ahol t a matroid ko-rangfüggvénye, míg r^* a duális rangfüggvénye.*

Gyakorlat 2.1.4 *A matroid egy B bázisához tartozó páros gráf ugyanaz, mint a duális matroid $B^* := S - B$ bázisához tartozó páros gráf.*

Gyakorlat 2.1.5 *Igazoljuk, hogy egy matroid akkor és csak akkor összefüggő, ha a duálisa is az.*

Gyakorlat 2.1.6 *Igazoljuk, hogy az első szakaszban leírt csonkolási és emelési műveletek egymás duálisai abban az értelemben, hogy egy matroid csonkoltjának a duálisa nem más, mint a duális matroid emeltje. Hasonlóképp, az emelt duálisa ugyanaz, mint a duális csonkoltja.*

Gyakorlat 2.1.7 *Igazoljuk, hogy egy matroid köre a duális matroid vágása, egy vágása pedig a duális matroid köre.*

Mátrix-matroid duálisa

TÉTEL 2.1.2 *Ha egy $M = (S, \mathcal{F})$ matroid valamely F test feletti mátrix-matroid, akkor duálisa is F feletti mátrix matroid.*

Biz. Legyen $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Legyen A olyan mátrix, melynek elemei F-ből valók, oszlopai megfelelnek az S elemeinek, és az oszlopok egy részhalmaza pontosan akkor lineárisan független, ha a megfelelő részhalmaza S-nek $\mathcal{F}$-hez tartozik. Azt mondjuk, hogy az A mátrix reprezentálja az M matroidot.

Világos, hogy ha az A sorát megszorozzuk egy nem-nulla elemmel, akkor az oszlopok lineáris függősége ill. függetlensége változatlan marad. Ugyanez érvényes, ha egy sort hozzáadunk egy másikhoz, vagy ha két sort felcserélünk. Hasonlóképp, ha az A egy sora lineárisan függ a többi sortól, akkor a sor kihagyásával keletkező mátrix is reprezentálja M-t.

Legyen $B := \{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ a matroid egy bázisa. A fenti műveletek egymás utáni alkalmazásával (magyarul a Gauss eliminációval) elérhetjük, hogy az A mátrix r sorból álljon és az első r oszlopa egységmátrixot alkosson. Jelölje C az A mátrix maradék $r * (n-r)$-es részét. Tekintsük az $A' := (C^T, E_{n-r})$ mátrixot, ahol C^T a C transzponáltja, E_{n-r} pedig az $(n-r) * (n-r)$-es egységmátrix.

Az A' mátrix rangja nyilván $n-r$. Azt állítjuk, hogy A' mátrix M' mátrix-matroidja éppen az M duálisa. Legyen P egy r elemű részhalmaza S-nek. Feltehetjük, hogy $P = \{s_i, \dots, s_{i+r-1}\}$. Amennyiben $P = B$, úgy $S - B$-nek az E_{n-r} egységmátrix felel meg A'-ben, vagyis ebben az esetben P bázisa M-nek és $S - P$ bázisa M'-nek.

Ha $P \neq B$, akkor legyen k a legkisebb index, amelyre $s_k \notin B$. Ugyanazt a P betűt használhatjuk az A mátrixban a P részhalmaznak megfelelő $r * r$-es részmátrix jelölésére. Jelölje P^- a P mátrixnak azt a részmátrixát, amely a P első $k-i$ oszlopának és utolsó $k-i$ sorának elhagyásával keletkezik. Mivel P^- egy egységmátrix kihagyásával keletkezik P-ből, ezért a P részhalmaz akkor és csak akkor bázisa M-nek, ha P^- nem-szinguláris.

Tekintsük most az $S-P$-nek megfelelő oszlopokat A'-ben és legyen T az A'-nek az első $r-(k-i)$ oszlopa és az első $r-(k-i)$ sora által meghatározott részmátrixa. Mivel T az $S-P$-nek megfelelő négyzetes mátrixból egy egységmátrix kihagyásával keletkezik, $S-P$ akkor és csak akkor független M'-ben, ha T mátrix nem-szinguláris. De a konstrukció miatt a T mátrix éppen P^- transzponáltja, így megkaptuk, hogy P akkor és csak akkor bázis M-ben, ha $S-P$ bázis M'-ben. •

A valós számok teste felett reprezentálható duális matroid pároknak szemléletes geometriai tartalmuk van: egymásra ortogonális kiegészítő altereknek felelnek meg. Legyen A_1 egy $r * n$-es valós mátrix, melynek sorai lineárisan függetlenek és legyen M_1 az oszlophalmazon értelmezett mátrix-matroid. Létezik egy $(n-r) * n$ méretű A_2 mátrix, amelynek sorai lineárisan függetlenek és minden sora ortogonális az A_1 minden sorára. Vagyis az A_1 és A_2 mátrixok sor-terei egymás ortogonális kiegészítő alterei. Jelölje M_2 az oszlopok halmazán az A_2 által definiált mátrix-matroidot.

Azt állítjuk, hogy M_1 és M_2 egymásnak duálisai. A dolog szimmetriája miatt ehhez elég azt belátni, hogy ha B_1 az M_1 bázisa, akkor $B_2 := S - B_1$ független M_2-ben. Tegyük fel indirekt, hogy nem az. Ekkor létezik egy $x \neq 0$ vektor, amelyben a B_1-nek megfelelő komponensek nullák és amelyre $A_2x = 0$. Ez azt jelenti, hogy x ortogonális az A_2 minden sorára és így benne van van az A_1 sor-terében, vagyis létezik y (r-dimenziós) vektor, amelyre $x = yA_1$. Mivel $x \neq 0$, így $y \neq 0$. De ez azt jelenti, hogy az y ortogonális a B_1-nek megfelelő A_1-beli oszlopokra, vagyis ezen oszlopok nem lineárisan függetlenek, ellentmondásban a feltevéssel, hogy B_1 bázisa M_1-nek.

Grafikus matroid duálisa, síkgráf síkduálisa

Látjuk tehát, hogy reprezentálható matroid duálisa is reprezentálható. Felvetődik a kérdés, hogy egy grafikus matroid duálisa mikor grafikus. Érdekes módon ez gráfok síkbarajzolhatóságával van kapcsolatban. Legyen G összefüggő síkbarajzolható gráf és tekintsünk egy konkrét síkbarajzolását. Ehhez elkészíthető a G^* sík-duális gráf oly módon, hogy minden tartományba elhelyezzük a G^*-nak egy csúcsát és kettőt α párhuzamos éllel összekötünk, ha a megfelelő tartományoknak α közös éle van G-ben. A konstrukcióból adódik, hogy G^* síkbarajzolt gráf, amelynek annyi csúcsa van, mint ahány tartománya a síkbarajzolt G-nek, és az élei egy-egy értelmű megfeleltetésben vannak a G éleivel. Hangsúlyozzuk, hogy a sík-duális a gráf egy konkrét síkbarajzolásához rendel egy síkbarajzolt gráfot, és előfordulhat, hogy G két különböző síkbarajzolásához tartozó sík-duális gráfok nem izomorfak egymással. (Tétel: *3-összefüggő gráfoknál ez már nem fordulhat elő.*)

Hurokélnek a duálisban elvágó él felel meg és megfordítva. Általánosabban, nem nehéz bebizonyítani, hogy a síkgráf egy körének a sík-duális gráf egy elemi vágása felel meg, míg egy elemi vágásának a sík-duális gráf egy köre. (A dolog azon a megfigyelésen múlik, hogy egy síkbarajzolt gráf köre a síkot belső és külső részre osztja.) Ebből rögtön következik, hogy ha F a $G = (V, E)$ síkgráf feszítő fája, akkor az $E - F$-nek megfelelő élhalmaz a duális gráfnak feszítő fája. Ebből adódik, hogy síkbarajzolt gráf és sík-duális gráfjának körmatroidjai egymásnak (matroid-) duálisai. Továbbá, hogy a G különböző síkbarajzolásaihoz tartozó síkduális gráfok bár nem biztosan izomorfak, de körmatroidjuk ugyanaz (nevezetesen G körmatroidjának duálisa).

Megállapítottuk tehát, hogy *síkgráf körmatroidjának duálisa mindig grafikus*. Ezen kijelentés megfordítása is érvényes, vagyishogy *nem síkbarajzolható gráf körmatroidjának duálisa nem grafikus*. (A bizonyítás vázlata a következő. Először kimutatja az ember, hogy ha egy gráf körmatroidjának duálisa grafikus, akkor ugyanez érvényes egy él elhagyásával vagy összehúzásával keletkező gráfra. A Kuratowski tétel szerint, ha egy gráf nem síkbeli, akkor élek egymás utáni elhagyásával illetve összehúzásával megkaphatjuk a két Kuratowski gráf egyikét. Elég tehát kimutatni, hogy a K_5 és a $K_{3,3}$ körmatroidjainak duálisa nem grafikus. Nézzük például a K_5 ötpontú teljes gráfot. A körmatroid M^* duálisának rangja $6(= 10 - 4)$. Ha M^* grafikus, azaz egy G' (összefüggő) gráf körmatroidja, akkor G'-nek 7 pontja van. Mivel K_5-ben minden kör legalább három elemű, az M' matroidban minden vágás legalább három elemű, és így G' minden pontjának a foka legalább 3. De akkor G'-nek legalább $\lceil 7 * 3/2 \rceil = 11$ éle kell hogy legyen, holott csak 10 éle van. Hasonló meggondolással látható, hogy $K_{3,3}$ körmatroidjának M' duálisa sem grafikus. Valóban, ha M' valamely összefüggő G' gráf körmatroidja lenne, akkor G'-nek 5 pontja van (merthogy M' rangja 9-5=4). Mivel $K_{3,3}$-ban mindegyik kör legalább 4 elemű, az M'-ben mindegyik vágás legalább 4 elemű, és ezért G'-ben mindegyik pont foka legalább 4. G'-ben tehát legalább $5 * 4/2 = 10$ élnek kell lennie, de csak 9 van.)

Mivel egy feszítő fa élszáma eggyel kisebb, mint a pontszáma, azt kapjuk, hogy F eggyel kevesebb élből áll, mint a G csúcsainak száma, és $E - F$ eggyel kevesebb élből áll, mint G^* csúcsainak száma, ami épp a G tartományainak száma. E kettő összeadásával nyerjük az Euler formulát, amely szerint *egy síkbarajzolt gráf csúcsainak és tartományainak együttes száma kettővel nagyobb, mint a gráf éleinek a száma.*

2.1.3 Minorok: elhagyás és összehúzás

Az S alaphalmazon adott az M matroid, melynek rang-függvénye r. Rögtön a bevezetőben már megismerkedtünk az elhagyás vagy részmatroid fogalmával. Most ennek egyfajta értelemben duális műveletét, az összehúzást vezetjük be. Legyen Z az S valódi, nemüres részhalmaza és $S' := S - Z$. Definiáljuk az $r' : 2^{S'} \to \mathbf{Z}_+$ halmaz-függvényt a következőképpen.

$$r'(X) := r(X \cup Z) - r(Z). \tag{2.2}$$

Gyakorlat 2.1.8 *Igazoljuk, hogy r' teljesíti a rang axiómákat.*

A gyakorlat alapján az r' egy M' matroidot határoz meg az S' halmazon. Azt mondjuk, hogy az M' matroid az M-ből a Z halmaz **összehúzás**ával keletkezik, vagy azt, hogy M' az M **összehúzott**ja $(S - Z)$-re. Jelölésben $M' = M/Z$ vagy $M' = M \cdot (S - Z)$.

TÉTEL 2.1.3 *A következők ekvivalensek.*

(1) *$F \subseteq S'$ független M'-ben,*
(2) *Z-nek mindegyik I maximális, M-ben független részhalmazára $I \cup F$ független M-ben.*
(3) *Létezik Z-nek egy I maximális M-ben független részhalmaza, amelyre $I \cup F$ független M-ben.*

Biz. (1) $\to$ (2). Legyen I a Z-nek egy maximális M-ben független részhalmaza. Ez kiegészíthető az $F \cup Z$-nek egy $F' \cup I$ maximális M-ben független részhalmazává. (1) szerint F független M'-ben, így $r(F \cup Z) - r(Z) = |F|$, amiből $|F \cup I| \geq |F' \cup I| = r(F \cup Z) = |F| + r(Z) = |F| + |I|$. Itt szükségképpen egyenlőség van, ezért $F' = F$ és (2) következik.

A (2) $\to$ (3) irány semmitmondó. Tegyük fel most (3)-t. Most $r(F \cup I) = |F \cup I|$ és $r(Z) = |I|$, így $r'(F) = r(F \cup Z) - r(Z) \geq r(F \cup I) - r(Z) = |F \cup I| - |I| = |F| \geq r'(F)$. Végig egyenlőségnek kell teljesülnie és ezért F független M'-ben, vagyis (3) fennáll. •

Gyakorlat 2.1.9 *Igazoljuk, hogy a fenti konstrukció egy $G = (V, E)$ gráf körmatroidjában annak felel meg, hogy az élek egy F részhalmazának elemeit összehúzzuk.*

Könnyen igazolható, hogy egy M mátrix-matroidban valamely a (nem-hurok, azaz nem-nulla) elem összehúzása azt jelenti, hogy a többi vektort az a-ra merőleges hipersíkra vetítjük. Konkrétan ez azt jelenti, hogy ha a matroid elemei az A mátrix oszlopvektorai, akkor (sorokra vonatkozó) Gauss eliminációval és sorcserével elérhető, hogy az a oszlopában az első elem 1-es a többi 0. Ezzel persze az oszlopok lineáris függősége vagy függetlensége nem változik. A merőleges vetítés most azt jelenti, hogy elhagyjuk az első sort, valamint az a oszlopát. A kapott mátrix matroidja éppen az M'.

A definícióból rögtön látszik, hogy ha Z_1, Z_2 két diszjunkt részhalmaza S-nek, akkor ugyanahhoz az M' matroidhoz jutunk, ha először összehúzzuk Z_1-t majd töröljük Z_2-t, mint ha először töröljük Z_2-t és azután húzzuk össze Z_1-t. Azt mondjuk, hogy M' az M matroid **minor**ja.

Gyakorlat 2.1.10 *Igazoljuk, hogy $t(X)$ az $S - X$ halmaz összehúzásával keletkező matroid rangja.*

Gyakorlat 2.1.11 *Igazoljuk, hogy egy $X \subseteq S - Z$ halmaz $M' = M/Z$-beli $t'(X)$ ko-rangja $t(X)$.*

Feladat 2.1.12 *Legyen $Z_1 \subset Z \subset S$ és $Z_2 := Z - Z_1$. Igazoljuk, hogy $M/Z = (M/Z_1)/Z_2 = (M/Z_2)/Z_1$ és $(M - Z_1)/Z_2 = (M/Z_2) - Z_1$.*

Feladat 2.1.13 *Igazoljuk, hogy $(M/Z)^* = M^* - Z$ és $(M - Z)^* = M^*/Z$.*

A feladat értelmében elhagyás és összehúzás duális fogalmak. Speciális eset, amikor egy G sík-gráf és G^* duálisának körmatroidjait tekintjük, amelyek (mint tudjuk) egymás duálisai. Egyszerű gráfelméleti megfontolásból adódik, hogy egy G-beli e (nem-elvágó) él elhagyásával keletkező gráf duálisa ugyanaz, mint a G^*-ból az e-nek megfelelő e^* él összehúzásával keletkező gráf.

Gráfelméletben ismert tétel, hogy egy 2-összefüggő hurokmentes irányítatlan gráfnak bármely élét elhagyva vagy összehúzva 2-összefüggő gráfot kapunk. A matroid összehúzási művelet alkalmazásaként megmutatjuk, hogy ez az eredmény matroidokra is kiterjeszthető.

TÉTEL 2.1.4 ($*-$) *Egy $M = (S, r)$ felbonthatatlan matroid bármely s elemének az elhagyása vagy az összehúzása felbonthatatlan matroidot eredményez.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy $M - s$ és M/s mindegyike felbontható. Ekkor az $S' = S - s$ halmaznak létezik egy $\{X, Y\}$ partíciója és egy $\{A, B\}$ partíciója nemüres halmazokra, amelyekre $r(X) + r(Y) = r(S')$ illetve $r'(A) + r'(B) = r'(S')$, ahol r' az összehúzott M/s matroid rangfüggvényét jelöli, azaz $r'(Z) = r(Z + s) - 1$. Feltehetjük, hogy $X \cap A$ nem üres. Azt is feltehetjük, hogy $B \cap Y$ nem üres, mert ha az volna, akkor $B = S' - A \subset X$ és így A és B nevének felcserélése után $A \cap X$ és $B \cap Y$ egyike sem üres.

Felhasználva, hogy mind $\{X \cap A, Y \cup B + s\}$, mind $\{Y \cap B, X \cup A + s\}$ nemüres halmazokra történő partíciója S-nek, az M felbonthatatlansága alapján kapjuk: $[r(S)+1]+[r(S)+1] \leq [r(X \cap A)+r(Y \cup B+s)]+[r(Y \cap B)+r(X \cup A+s)] = r(X \cap (A+s))+r(X \cup A+s)+r(Y \cap (B+s))+r(Y \cup B+s) \leq [r(X)+r(Y)]+[r(A+s)+r(B+s)] = r(S') + [r'(A) + 1 + r'(B) + 1] = r(S') + r'(S') + 2 = r(S') + r(S) + 1 \leq r(S) + r(S) + 1$, ellentmondás. •

2007. május 6. ulmat21

2.2 MATROIDOK SPECIÁLIS HALMAZRENDSZEREKBŐL

Az alábbi konstrukciókban szereplő matroidok mind úgy állnak elő, hogy megadunk egy bizonyos halmazrendszert, és egy részhalmazt akkor deklarálunk függetlennek, ha a rendszer minden tagjából legfeljebb egy előre adott számú elemet tartalmaz.

2.2.1 Partíciós matroid és rokonai

Teljes és üres matroid

Akkor beszélünk **teljes** vagy **szabad** matroidról, ha minden részhalmaz független, míg az **üres** vagy **triviális** matroidban az üres halmaz az egyetlen független halmaz.

Uniform matroid

Legyen az S halmaz n elemű és k egy egész szám, amelyre $0 \leq k \leq n$. Álljon $\mathcal{F}$ az S összes legfeljebb k elemű részhalmazából. Könnyen ellenőrizhetően mindhárom axióma fennáll. A kapott matroidot **uniform matroidnak** hívják és $U_{n,k}$-val jelölik. Egy X halmaz rangja $r(X) = \min\{|X|, k\}$. A teljes és az üres matroid nyilván speciális uniform matroidok.

Partíciós matroid

Legyen $\{S_1, \ldots, S_t\}$ az S alaphalmaz partíciója, és legyenek $g_1, \ldots, g_t$ nemnegatív egészek. Egy I halmazt deklaráljunk függetlennek, ha $|I \cap S_i| \leq g_i$ minden i-re. Az axiómákat ismét könnyű ellenőrizni: a kapott matroid neve **partíciós matroid**. A $t = 1$ esetben visszajutunk az uniform matroidhoz, másrészt egy partíciós matroid uniform matroidok direkt összege. A partíciós matroid rang-függvénye $r(X) := \sum_i [\min\{g_i, |X \cap S_i|\}]$.

Gyakorlat 2.2.1 *Igazoljuk, hogy egy $Z \subseteq S$ halmaz akkor és csak akkor zárt, ha minden $i = 1, \ldots, t$-re vagy $S_i \subseteq Z$ vagy $|Z \cap S_i| < g_i$.*

Gyakorlat 2.2.2 *Egy irányított gráf éleinek egy részhalmazát deklaráljuk függetlennek, ha minden pontba legfeljebb egy belépő élt tartalmaz. Igazoljuk, hogy ez matroidot határoz meg.*

A továbbiakban a partíciós matroid különféle általánosításait tekintjük át.

Lamináris matroid

A partíciós matroid fogalma általánosítható. Egy $\{S_1, \ldots, S_t\}$ halmaz-családról akkor mondjuk, hogy **lamináris**, ha bármely két tagja vagy diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat.

Feladat 2.2.3 *Igazoljuk, hogy az*

$$\mathcal{I} := \{I : |I \cap S_i| \leq g_i, i = 1, \ldots, t\} \tag{2.3}$$

halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat.

Az így definiált matroidot **lamináris matroid**nak nevezzük.

Gyakorlat 2.2.4 *Határozzuk meg a lamináris matroid rang-függvényét.*

Általánosított partíciós matroid

($*-$) A partíciós matroidok egy más irányú általánosítása a következő. Legyen $\{S_1, \ldots, S_t\}$ az S alaphalmaz partíciója. Adottak a $g_1, \ldots, g_t$ valamint az $f_1, \ldots, f_t$ nemnegatív egészek ($0 \leq f_i \leq g_i \leq |S_i|$) és még egy k egész.

Feladat 2.2.5 *Igazoljuk, hogy az $\mathcal{B} := \{X : |X| = k, f_i \leq |S_i \cap X| \leq g_i$ minden $i = 1, \ldots, t$-re$\}$ halmazrendszer, amennyiben nemüres, kielégíti a bázis axiómákat.*

A kapott matroid neve **általánosított partíciós matroid**. Az $f_i :\equiv 0$ és $k := \sum_i \min\{g_i, |S_i|\}$ speciális esetben visszajutunk a partíciós matroid fogalmához.

Feladat 2.2.6 *Akkor és csak akkor létezik olyan k elemű B halmaz, amelyre*
(i) $|S_i \cap B| \leq g_i$ $(i = 1, \ldots, t)$, ha $\sum_i g_i \geq k$,
(ii) $|S_i \cap B| \geq f_i$ $(i = 1, \ldots, t)$, ha $\sum_i f_i \leq k$,
(iii) $f_i \leq |S_i \cap B| \leq g_i$ $(i = 1, \ldots, t)$, ha külön-külön létezik (i)-t kielégítő és (ii)-t kielégítő halmaz, azaz ha $\sum_i f_i \leq k \leq \sum_i g_i$.

A feladat nagymérvű általánosítását tartalmazza majd a 3.3.5 tétel, amely arról szól, hogy egy előre adott matroidnak mikor létezik olyan B bázisa, amely kielégíti az (i) illetve (ii) feltételeket.

TÉTEL 2.2.1 *Egy F halmaz akkor és csak akkor független az általánosított partíciós matroidban, ha*

$$|F \cap S_i| \le g_i \text{ minden } i \text{ -re} \tag{2.4}$$

és

$$\sum_i \max\{f_i, |F \cap S_i|\} \le k. \tag{2.5}$$

Biz. Ha F független, akkor létezik egy B bázis, amely magában foglalja. Ekkor $|F \cap S_i| \le |B \cap S_i| \le g_i$ és $\sum_i \max\{f_i, |F \cap S_i|\} \le \sum_i \max\{f_i, |B \cap S_i|\} = \sum_i |B \cap S_i| = |B| = k$, vagyis a feltételek valóban szükségesek.

Tegyük most fel, hogy egy F halmaz teljesíti a feltételeket. Be kell látnunk, hogy benne van bázisban. Ezt elég olyan F halmazokra igazolni, melyek maximálisak abban az értelemben, hogy már nem bővíthetők a feltételek megsértése nélkül. Azt látjuk be, hogy egy ilyen F halmaz bázis.

A (2.4) feltevés miatt $|F \cap S_i| \le g_i$ teljesül. Belátjuk, hogy $|F \cap S_i| \ge f_i$ is fennáll minden i-re. Valóban, ha valamely j indexre ez nem teljesülne, akkor $S_j - F$ egy elemét F-hez véve a keletkező F'-re $\max\{f_j, |F' \cap S_j|\} = \max\{f_j, |F \cap S_j|\}$, vagyis F' is teljesítené (2.5)-t (és persze (2.4)-t is), ellentétben F maximális választásával.

Azt kell még igazolnunk, hogy $|F| = k$. Miután most $|F \cap S_i| \ge f_i$ minden i-re, így $\max\{f_i, |F \cap S_i|\} = |F \cap S_i|$, és ezért $|F| = \sum_i |F \cap S_i| = \sum_i \max\{f_i, |F \cap S_i|\} \le k$. Ha itt, indirekt, szigorú egyenlőtlenség állna, akkor $\sum_i g_i \ge k$ miatt az egyik S_j halmazra $|F \cap S_j| < g_j$ teljesülne, és így létezne egy $s \in S_j - F$ elem, és ezzel F-t ki lehetne bővíteni a (2.4) és (2.5) feltételek megsértése nélkül, ellentmondásban F maximális választásával. •

Az előbbi tétel nagyfokú általánosítását tartalmazza majd a 2.5.12 tétel.

TÉTEL 2.2.2 *Az általánosított partíciós matroid r rang-függvényét az alábbi formula adja meg.*

$$r(X) = \min\{r_1(X), r_2(X)\}, \tag{2.6}$$

ahol $r_1(X) := k - \sum_i \max\{0, f_i - |S_i \cap X|\}$ *és* $r_2(X) := \sum_i \min\{g_i, |S_i \cap X|\}$.

Biz. Rögtön látszik, hogy $r(X) \le r_2(X)$. Az is könnyen adódik, hogy $r(X) \le r_1(X)$ hiszen tetszőleges bázis legalább $\sum_i \max\{0, f_i - |S_i \cap X|\}$ elemet tartalmaz az X komplementeréből, így legfeljebb $k - \sum_i \max\{0, f_i - |S_i \cap X|\}$ elemet X-ből.

Az egyenlőség igazolásához X elemszáma szerinti indukciót használunk. Tegyük fel először, hogy X független. Ekkor egyrészt $\sum_i (f_i - |S_i \cap X|)^+ + |X| = \sum_i \max\{f_i, |S_i \cap X|\} \le k$, amiből $r_1(X) = k - \sum_i \max\{0, f_i - |S_i \cap X|\} \ge |X|$, másrészt $|X \cap S_i| \le g_i$ miatt $r_2(X) = \sum_i \min\{g_i, |S_i \cap X|\} = \sum_i |S_i \cap X| = |X|$ tehát valóban $r(X) = |X|$.

Tegyük most fel, hogy X nem független. Ekkor (2.4) és (2.5) valamelyike megsérül. Amennyiben valamelyik j-re $|X \cap S_j| > g_j$ áll, úgy $X \cap S_j$ valamely elemét X-ből kihagyva a keletkező X' halmazra $r_1(X') = r_1(X)$ és $r_2(X') = r_2(X)$, így ekkor indukcióval kész vagyunk. Így tehát (2.4) fennáll és (2.5) nem. Ekkor azon S_i halmazokra, melyekre $|S_i \cap X| < f_i$, egészítsük ki a metszeteket f_i eleművé, míg a többi $S_i$ben hagyjunk ki elemeket, úgy hogy még legalább f_i maradjon és összesen r elemünk legyen. Ez megtehető. Így egy olyan bázist kaptunk, amely pontosan $\sum_i \max\{0, f_i - |S_i \cap X|\}$ darab elemet tartalmaz s-en kívülről, vagyis X-ből pont $r_1(X)$-t. •

Megjegyzendő, hogy a tételben előforduló r_1 nem rang-függvény, hiszen az üres halmazon az értéke $r - \sum_i f_i$, ami lehet pozitív. A lamináris illetve az általánosított partíciós matroid a partíciós matroid két lehetséges általánosítása. Most e kettőt vonjuk közös ernyő alá.

Keresztezés-mentes matroid

($*-$) A lamináris halmazrendszernél általánosabb fogalom a keresztezés-mentes. Az S halmaz rész-halmazainak egy $\mathcal{F}$ családját akkor nevezzük **keresztezés-mentes**nek, ha bármely két X, Y tagjára az $X - Y, Y - X, X \cap Y, S - (X \cup Y)$ halmazok közül legalább az egyik üres. Könnyen látható, hogy $\mathcal{F}$ akkor és csak akkor keresztezés-mentes, ha S valamely s elemére az s-t tartalmazó tagokat a komplementerükre cserélve lamináris halmazrendszert kapunk.

Kérdés, hogy a lamináris matroid fogalmát nem lehet-e tovább általánosítani keresztezés-mentesre. Amennyiben a definíciót mechanikusan átmásoljuk, azaz adott $\mathcal{K} := \{S_1, \dots, S_t\}$ keresztezés-mentes halmazrendszerhez és $g_1, \dots, g_t$ nemnegatív egészekhez rendelendő matroidban egy I halmazt akkor deklarálunk függetlennek, ha $|I \cap S_i| \le g_i$ minden i-re, akkor már nem feltétlenül kapunk matroidot! Az $S := \{a, b, c\}$ alaphalmazon legyen ugyanis $S_1 := \{a, b\}, S_2 := \{b, c\}$, és $g_1 = g_2 = 1$: most az egyelemű $\{b\}$ halmaz és a kételemű $\{a, c\}$ halmaz is nem bővíthető független. Sikerrel járunk azonban, ha a függetlenek helyett a bázisokat definiáljuk:

Feladat 2.2.7 *Valamely k egészre a*

$$\mathcal{B} := \{B : |B| = k,\ |B \cap S_i| \leq g_i, i = 1, \ldots, t\} \tag{2.7}$$

halmazrendszer, amennyiben nemüres, kielégíti a bázisaxiómákat.

Az így definiált matroid neve **keresztezés-mentes matroid**.

Gyakorlat 2.2.8 *A keresztezés-mentes matroid miért általánosítása a laminárisnak?*

Állítás 2.2.3 *Legyen $\{S_1, \ldots, S_t\}$ az keresztezés-mentes az S alaphalmazon, legyenek $f_i \leq g_i, (i = 1, \ldots, t)$ egészek és k egész. Ekkor a*

$$\mathcal{B} := \{B : |B| = k, f_i \leq |B \cap S_i| \leq g_i, i = 1, \ldots, t\} \tag{2.8}$$

halmazrendszer, amennyiben nemüres, egy keresztezés-mentes matroid bázisait alkotja.

Biz. Könnyen látható hogy az $\{S_1, \ldots, S_t, \bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_t\}$ halmazrendszer is keresztezés-mentes, ahol $\bar{S}_i = S - S_i$. Legyen $\bar{g}_i := r - f_i$. Ekkor $\mathcal{B} = \{B : |B| = k, |B \cap S_i| \leq g_i, |B \cap \bar{S}_i| \leq \bar{g}_i, i = 1, \ldots, t\}$. •

Az állításból persze rögtön adódik, hogy az általánosított partíciós matroid speciális keresztezés-mentes matroid.

2.2.2 Nagykörű matroidok

Nevezzünk egy r rangú matroidot **nagykörű**nek, ha minden köre legalább r elemű (azaz r vagy $r+1$ elemű, vagy még másként minden legfeljebb $r-1$ elemű halmaz független). Ilyen például az uniform matroid, amelyben minden r elemű halmaz bázis. A legfeljebb 1 rangú matroidok nyilván nagykörűek, és a hurokmentes 2 rangú matroidok is azok. A 3 rangú matroidok közül pontosan az egyszerűek (azaz a hurok és párhuzamos elemeket nem tartalmazók) a nagykörűek. Az alábbiakban megadjuk az összes nagykörű matroid leírását, amely tehát speciális esetként tartalmazza az összes egyszerű 3 rangú matroid leírását.

TÉTEL 2.2.4 *Legyen $r \geq 2$ egész és S egy legalább r elemű halmaz. Legyen $\mathcal{H} := \{H_1, \ldots, H_t\}$ az S valódi részhalmazainak egy olyan* (esetleg üres) *rendszere, amelyben mindegyik H_i halmaz legalább r elemű, és bármely két H_i, H_j halmaz metszete legfeljebb $r-2$ elemű. Álljon $\mathcal{B}_\mathcal{H}$ azon r elemű részhalmazokból, melyeket $\mathcal{H}$ egyik tagja sem tartalmaz részhalmazként. Ekkor $\mathcal{B}_\mathcal{H}$ kielégíti a bázis axiómákat és az $M_\mathcal{H} = (S, \mathcal{B}_\mathcal{H})$ matroid nagykörű. Minden nagykörű matroid előáll ilyen alakban.*

Biz. $(*-)$ Legyen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\mathcal{H}$ és $x \in B_1 - B_2$. A $\mathcal{H}$-nak legfeljebb csak egy olyan tagja létezhet, amelynek részhalmaza a $B_1 - x$ halmaz, mert két ilyen tagnak a metszete legalább $|B_1| - 1 = r - 1$ elemű lenne, ellentétben a feltevéssel. Ha egyáltalán nincs ilyen halmaz, akkor bármely $y \in B_2 - B_1$ elemre $B_1 - x + y$ bázis. Ha viszont mondjuk H_1 ilyen, akkor van olyan $y \in B_2 - B_1$ elem, amely nincs H_1-ben, mert különben H_1 tartalmazná a teljes B_2-t, ellentétben azzal, hogy B_2 bázis. Ebben az esetben is $B_1 - x + y$ bázis, és így $\mathcal{B}_\mathcal{H}$ kielégíti a (B2) bázis-axiómát.

Lássuk be, hogy tetszőleges $r-1$ elemű I halmaz kibővíthető egy elemmel $(S, \mathcal{B}_\mathcal{H})$ egy tagjává. Miután $\mathcal{H}$ bármely két tagjának legfeljebb $r-2$ közös eleme van, I-t az $\mathcal{H}$-nak legfeljebb csak egy tagja tartalmazhatja. Mivel S nincs $\mathcal{H}$-ban, van olyan $x \in S - I$ elem, amelyre $I + x$ nem része $\mathcal{H}$ egyik tagjának sem. Vagyis $I + x \in \mathcal{B}_\mathcal{H}$. Ebből tehát egyrészt következik, hogy bármely legfeljebb $r-1$ elemű halmaz kiegészíthető bázissá, és fennáll a (B1) bázis-axióma is, másrészt a $\mathcal{B}_\mathcal{H}$ bázisokkal definiált matroid valóban nagykörű.

A második részhez legyen M tetszőleges nagykörű matroid, melynek rang-függvénye r. Álljon $\mathcal{H}$ a matroid legalább r elemű hipersíkjaiból (hipersík: $r(S)-1$ rangú zárt halmaz, azaz nem-bővíthető $r(S)-1$ rangú halmaz). Állítjuk, hogy két különböző A, B hipersíknak legfeljebb csak $r(S)-2$ közös eleme lehet. Valóban, $r(A \cup B) = r(S)$, és ha $|A \cap B| \geq r(S) - 1$ állna fenn, akkor a matroid nagykörűsége miatt $A \cap B$ minden $r(S)-1$ elemű részhalmaza független, és így $r(A \cap B) \geq r(S) - 1$. Ezért $(r(S)-1) + (r(S)-1) = r(A) + r(B) \geq r(A \cap B) + r(A \cup B) \geq r(S) - 1 + r(S)$, ami lehetetlen.

A tétel első fele alapján tudjuk, hogy $M_\mathcal{H}$ matroid, és hogy rangja $r(S)$. Azt állítjuk, hogy $M = M_\mathcal{H}$. Miután mindkét matroid nagykörű, elég csak az $r(S)$ elemű X részhalmazokat tekinteni. Ha X bázis M-ben, akkor $r(X) = r(S)$, és így nem lehet semelyik hipersíknak része, vagyis ekkor X bázis $M_\mathcal{H}$-ban is. Fordítva, legyen X egy $r(S)$ elemű függő halmaz M-ben. Ekkor a nagykörűség miatt $r(X) = r(S) - 1$, így az X halmaz $\sigma(X)$ lezártja hipersík, amelynek legalább $|X| = r(S)$ eleme van. $\sigma(X)$ tehát benne van $\mathcal{H}$-ban és ezért X nem bázis $M_\mathcal{H}$-ban sem. •

Gyakorlat 2.2.9 *Igazoljuk, hogy a* 2.2.4 *tételben megadott matroidban egy I halmaz pontosan akkor független, ha*

$$|I| \leq r, |I \cap H_i| \leq r - 1,\ (i = 1, \ldots, t). \tag{2.9}$$

A nagykörű matroidoknak ebben a gyakorlatban leírt megadása valójában egy sokkal általánosabb matroid konstrukció speciális esetének tekinthető. Definiáljuk ugyanis az S részhalmazain a következő b halmazfüggvényt. Legyen $b(X) = r - 1$, ha $X = H_i$ valamelyik $i = 1, \ldots, t$-re és $b(X) = \min\{|X|, r\}$ különben. Ekkor a (2.9) feltétel azzal ekvivalens, hogy $|I \cap X| \leq b(X)$ minden $X \subseteq S$-re. Könnyen ellenőrizhető, hogy amennyiben a H_i halmazok kielégítik a 2.2.4 tételben megadott feltételeket, akkor b szubmoduláris. A 2.5.1 tételben látni fogjuk, hogy valójában tetszőleges szubmoduláris függvény esetén az $\mathcal{F}_b := \{I \subseteq S : |I \cap X| \leq b(X)$ minden $X \subseteq S$-re$\}$ halmazrendszer kielégíti a függetlenségi axiómákat. Vagyis a nagykörű matroidokra vonatkozó 2.2.4 tétel a 2.5.1 tétel speciális esetének tekinthető, és ráadásul ezen általánosabb eredmény bizonyítása (ahogy az nemritkán lenni szokott) rövidebb és egyszerűbb, mint a fenti bizonyítás.

Figyeljük meg, hogy egy 3 rangú affin matroid nagykörű. Ebben S különböző síkbeli pontok véges halmaza, amelyben függetlenek a legfeljebb kételemű részhalmazok valamint azon hármasok, melyek nem egy egyenesen vannak. Valójában itt az egyeneseknek csak annyi a szerepük, hogy egy pontban metszik egymást. Egy másik érdekes példa a Fano matroid, amelynek alaphalmaza $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ és a 2.2.4 tételben szereplő $\mathcal{H}$ halmazrendszer a következő. $\mathcal{H} := \{abc, cde, efa, agd, bge, fgc, bdf\}$. (Ezen konstrukció jelzi, miért hívják néha az egyszerű matroidokat **kombinatorikus geometriá**nak.)

A nagykörű matroidok egyszerű szerkezetűnek tűnnek, hiszen valamennyi legfeljebb $r - 1$ elemű halmaz független. Ugyanakkor már az ilyen matroidokból is „nagyon sok" van.

TÉTEL 2.2.5 *Dupla exponenciálisan sok nagykörű matroid létezik.*

Biz. Legyen $r \geq 2$ páros szám és vegyünk egy $2r$ elemű S alaphalmazt, melynek elemei r párba vannak rendezve. Nevezzünk egy halmazt párosnak, ha bizonyos párok uniója. Nyilván két páros halmaz metszete is páros, így két r elemű páros halmaz metszete sohasem $r - 1$ elemű. Emiatt tetszőleges r-elemű páros halmazokból álló $\mathcal{H}$ hipergráf nagykörű matroidot definiál, amelynek a bázisai tehát pontosan azok az r-elemű (nem feltétlenül páros) halmazok, melyek nincsenek $\mathcal{H}$-ban. Emiatt két különböző ilyen hipergráf különböző matroidot határoz meg, továbbá, ezen hipergráfok száma $2^{\binom{2r}{r}} \geq 2^{2^{r/2}}$. Vagyis a $2r$ elemű alaphalmazon legalább ennyi r rangú nagykörű matroid létezik. •

A tételnek fontos következménye, hogy nem lehetséges a matroidokat (az alaphalmaz elemszámában) polinomiális méretben elkódolni.

2007. május 6. ulmat22

2.3 MATROIDOK PÁROSÍTÁSOKBÓL ÉS UTAKBÓL

Az alábbiakban olyan konstrukciók szerepelnek, amelyek (di)gráfok párosításaival és útrendszereivel kapcsolatos matroidokat eredményeznek.

2.3.1 Transzverzális matroidok és deltoidok

Először vizsgáljuk meg, hogy páros gráfok ponthalmazán milyen matroidokat készíthetünk. Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf. Egy $I \subseteq S$ részhalmazt **párosítható**nak mondunk, ha létezik G-ben egy olyan párosítás, amely fedi az I elemeit. (A G éleinek egy X részhalmazát **párosítás**nak nevezik, ha minden pontot legfeljebb egy X-beli él fed. Ha pontosan egy, **teljes párosítás**ról beszélünk.)

TÉTEL 2.3.1 *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban az S párosítható részhalmazai matroidot alkotnak.*

Biz. (Vázlat) Az első két axióma triviálisan teljesül. (I3) pedig következik a közismert alternáló utas módszerből, amely egy páros gráf bármely nem teljes P párosításához megkonstruál egy olyan nagyobb P' párosítást, amelyre az S-ben fedett pontok halmaza bővebb, mint a P által fedetteké. •

A 2.3.1 tételben szereplő matroidot **transzverzális matroid**nak nevezik. A név eredete a következő. Legyen $\mathcal{T} := \{A_1, A_2, \dots, A_t\}$ az S alaphalmaz részhalmazainak tetszőleges családja. Azt mondjuk, hogy az $I \subseteq S$ halmaz **résztranszverzális**, ha I minden x eleméhez hozzá lehet rendelni egy x-et tartalmazó A_i halmazt úgy, hogy minden halmazt legfeljebb egy elemhez rendeljük.

Rendeljünk a szóbanforgó részhalmazrendszerhez egy $G_{\mathcal{T}} := (S, T; E)$ páros gráfot, ahol $|T| = t$, a T elemei az A_i halmazoknak felelnek meg, és egy A_i halmaznak megfeleltetett t_i pont akkor szomszédos az $s \in S$ ponttal, ha $s \in A_i$. A definícióból rögtön látszik, hogy $\mathcal{T}$ résztranszverzálisai és az S párosítható részhalmazai ugyanazok. Ezért a résztranszverzálisok kielégítik a függetlenségi axiómákat.

A transzverzális matroid még egy ekvivalens módon bevezethető. Legyen $(S, \mathcal{T})$ egy hipergráf. Hiperélek egy $\mathcal{F}$ részhalmazát **reprezentálható**nak mondunk, ha $\mathcal{F}$-nek minden tagjából kiválasztható annak egy pontja úgy, hogy különböző hiperélből különböző pontot választunk. (Hall tétel alapján ez pontosan akkor lehetséges, ha $\mathcal{F}$-ből bárhogyan kivéve j hiperélt, ezek egyesítése legalább j elemű).

Következmény 2.3.2 *A $\mathcal{T}$ alaphalmazon a reprezentálható részhipergráfok egy matroid független halmazait alkotják.*

Gyakorlat 2.3.1 *Igazoljuk a* 2.3.2 *következményt, majd mutassuk meg, hogy a következmény is implikálja a* 2.3.1 *tételt.*

Feladat 2.3.2 *Igazoljuk, hogy a négypontú teljes gráf körmatroidja nem transzverzális matroid.*

A Kőnig tételből, illetve a vele ekvivalens deficites alakból rögtön kiolvasható a transzverzális matroid rangfüggvénye.

TÉTEL 2.3.3 *A $G = (S, T; E)$ páros gráf által az S halmazon definiált transzverzális matroid rangfüggvénye a következő.*

$$r(S') = \min\{|S' - X| + |\Gamma(X)| : X \subseteq S'\}. \tag{2.10}$$

Párosítások segítségével egy $G = (S, T; E)$ páros gráf teljes $S \cup T$ ponthalmazán is definiálhatunk matroidot, éspedig a bázisaival. Álljon $\mathcal{B}$ az $S \cup T$ alaphalmaz azon $|S|$ elemű részhalmazaiból, amelyek az S halmaz és valamely párosítás ponthalmazának szimmetrikus differenciájaként állnak elő.

Feladat 2.3.3 *Igazoljuk, hogy az előbbi definíció egy matroid bázisait adja.*

Az így nyert matroidot a $G = (S, T; E)$ páros gráf S **bázisú deltoid**jának nevezzük. Egy deltoid duálisa is deltoid, hiszen az S bázisú illetve a T bázisú deltoidok egymás duálisai. Az is nyilvánvaló, hogy az S-n definiált transzverzális matroid a T bázisú deltoid részmatroidja. Másrészt az S bázisú deltoid könnyen látható módon a $\{\Gamma(s) + s : s \in S\}$ halmazrendszer által definiált transzverzális matroid (ahol $\Gamma(s)$ az s pont G-beli szomszédainak a halmaza).

Következmény 2.3.4 *Egy matroid pontosan akkor transzverzális, ha egy deltoid részmatroidja.*

Emlékeztetünk a páros gráfok Mendelsohn-Dulmage tulajdonságára:

Lemma 2.3.5 *Ha a $G = (S, T; E)$ páros gráf pontjainak egy $X \subseteq S$ halmaza és egy $Y \subseteq T$ halmaza külön-külön fedhető egy-egy párosítással, akkor létezik $X \cup Y$-t fedő párosítás is.*

Biz. Legyen M_X egy X-et fedő, míg M_Y egy Y-t fedő maximális (azaz $\nu(G)$) elemszámú párosítás olyan, hogy $|M_X \cap M_Y|$ maximális. Ekkor $M_X = M_Y$, mert különben az $M_X \cup M_Y$ halmaz tartalmazna egy C alternáló kört és így az M_X elemeit C-mentén kicserélve a kapott M'_X olyan X-t fedő $\nu(G)$ elemszámú párosítás volna, melyre $|M'_X \cap M_Y| > |M_X \cap M_Y|$. Ezért az $M_X = M_Y$ párosítás fedi $X \cup Y$-t. •

Feladat 2.3.4 *Igazoljuk, hogy egy t rangú transzverzális matroid az S halmazon mindig megadható egy olyan $(S, T; E)$ páros gráf által definiált transzverzális matroidként, amelyben $|T| = t$.*

Következmény 2.3.6 *A $G = (S, T; E)$ páros gráf által az S-n illetve a T-n definiált transzverzális matroidok direkt összegében egy halmaz pontosan akkor független, ha fedhető G egy párosításával.*

Ezek szerint egy páros gráf pontjainak azon részhalmazai, melyek fedhetők párosítással egy matroidot alkotnak. Valójában ez a konstrukció minden gráfra átvihető.

2.3.2 Párosítás matroid

Legyen $G = (V, E)$ egyszerű irányítatlan gráf. G párosítás matroidja a V ponthalmazon van definiálva úgy, hogy csúcsoknak egy U részhalmaza akkor tartozzék $\mathcal{F}$-hez, ha létezik G-ben olyan párosítás, amely U minden pontját fedi. A $(V, \mathcal{F})$ párról mindjárt belátjuk, hogy matroid, a G gráf **párosítás matroid**ja.

TÉTEL 2.3.7 *A fent definiált $(V, \mathcal{F})$ pár matroidot alkot.*

Biz. Az (I1) és (I2) axióma a definícióból rögtön adódik. Jelölje ν a gráf legnagyobb párosításának elemszámát. Az (I3$'''$) axiómához először figyeljük meg, hogy ha M és M' párosítások, melyekre $|M'| < |M| = \nu$, akkor a két párosítás szimmetrikus differenciájának egyik komponense szükségképpen egy olyan P alternáló út, amely két M' által fedetlen pontot köt össze. Így az $M' \Delta P$ párosítás által fedett csúcsok halmaza bővebb (két elemmel), mint az M' által fedetteké. Ebből rögtön adódik, hogy a nem bővíthető függetlenek elemszáma ugyanaz: 2ν.

Az (I3$'''$) axióma második feléhez igazolnunk kell, hogy egy $2\nu - 1$ elemű K és egy 2ν elemű N független halmaz esetén K függetlenné bővíthető $N - K$-ból. Léteznek M_K és M_N párosítások, melyek fedik K-t illetve N-t. Az elemszámok miatt szükségképpen mindkét párosítás maximális, ezért M_K-nak van olyan uv eleme, amelyre $u \in K, v \notin K$. Ekkor $K + v$ független, így ha $v \in N$, akkor kész is vagyunk. Ha $v \notin N$, akkor legyen P az a maximális alternáló út, amelynek egyik végpontja v. Az M_N maximalitása miatt P másik, y-nal jelölt végpontja $N - K$-ban van. Így a $P \Delta M_K$ szimmetrikus differencia egy olyan (maximális) párosítás, amelynek végponthalmaza $K + y$. •

Feladat 2.3.5 *Igazoljuk, hogy egy $G = (S, T; E)$ páros gráf párosítás matroidja a G által az S-en illetve a T-n definiált transzverzális matroidok direkt összege.*

Figyeljük meg, hogy a feladatban megfogalmazott állítás nem más, mint a Mendelsohn-Dulmage tulajdonság (miszerint, ha az $X \subseteq S$ és az $Y \subseteq T$ halmazok külön-külön fedhetők egy-egy párosítással, akkor egyetlen párosítással is fedhetők).

A párosítás matroid rangja

A párosítás matroidnak tehát nemcsak a definíciója egyszerű, hanem matroidságának bizonyítása is. Azonban természetesen adódnak nehezebb kérdések: miképp lehet felismerni például egy $X \subseteq V$ részhalmazról, hogy független-e, vagy általánosabban, milyen formula adható a párosítás matroid rangfüggvényre. A kérdés komolyságát érzékelteti, hogy csupán az alaphalmaz rangjának meghatározása a gráf maximális elemszámú párosításának meghatározását jelenti. Kezdjük ezzel.

W.T. Tutte adta meg a teljes párosításokkal nem rendelkező gráfok jellemzését. Ezt általánosítva C. Berge adott formulát (a Berge-Tutte formula) egy G gráfban lévő maximális párosítás $\nu(G)$ elemszámára (ami tehát a párosítás matroid rangjának fele). Ez indukcióval könnyen következik Gallai Tibornak egy lemmájából, amelyet az alább egyszerű matroidelméleti eszközöket használva belátunk. A matroid vágásán egy olyan tartalmazásra nézve minimális halmazt értettünk, amely metsz minden bázist. Ez azt jelenti, hogy a matroid vágásai éppen a duális matroid körei.

Állítás 2.3.8 *Tetszőleges hurokmentes matroidban, ha $r(A) = r(B) = 1$ és $A \cap B$ nemüres, akkor $r(A \cup B) = 1$.*

Biz. A szubmodularitást és a monotonitást használva $1+1 = r(A)+r(B) \geq r(A\cap B)+r(A\cup B) \geq 1+r(A\cup B) \geq 1 + 1$ amiből $r(A \cup B) = 1$ következik. •

Emlékezzünk vissza, hogy a párosítás matroid egy $G = (V, E)$ gráf ponthalmazán volt definiálva úgy, hogy egy halmaz akkor független, ha G-nek valamely párosítása lefedi. Egy összefüggő gráfot **faktor-kritikus**nak neveznek, ha bármely pontját kihagyva a maximális párosítás elemszáma nem csökken, másszóval minden csúcsot elkerül egy maximális párosítás.

Lemma 2.3.9 (Gallai) *G faktor-kritikus gráfban van olyan párosítás, amely egyetlen pontot hagy fedetlenül.*

Biz. Az, hogy egy összefüggő gráf faktor-kritikus, éppen azt jelenti, hogy bármely pontján kívül van a párosítás matroidnak bázisa, ami azzal ekvivalens, hogy semelyik pont sem hurok G párosítás matroidjának M^* duálisában. Világos, hogy G tetszőleges uv élére az u és v pontokat kihagyva ν csökken, vagyis az $\{u, v\}$ kételemű halmaz nem lehet független M^*-ban, és így $r^*(\{u, v\}) = 1$.

A lemma állítása azzal ekvivalens, hogy $r^*(V) = 1$. Ennek igazolására legyen A maximális olyan halmaz, amelyre $r^*(A) = 1$. Ha indirekt $A \neq V$ áll fenn, akkor G összefüggősége folytán létezik olyan uv él, amelyre $u \in A, v \in V - A$. Alkalmazva a 2.3.8 állítást az r^* rang-függvényre az A és $B := \{u, v\}$ választással, azt kapjuk, hogy $r^*(A + v) = 1$, ellentmondásban az A maximális választásával. •

A Berge-Tutte formula levezetéséhez innentől már nem kellenek matroidok. Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf, amelyben $\nu = \nu(G)$ jelöli a független élek maximális számát és $q(X)$ az $X \subseteq V$ elhagyásával keletkező páratlan pontszámú komponensek számát.

TÉTEL 2.3.10 (Berge-Tutte formula)

$$\nu(G) = \min\{|V| - q(X) + |X| : X \subseteq V\}/2. \tag{2.11}$$

Biz. Tetszőleges M párosítás és $X \subseteq V$ halmaz esetén legalább $q(X) - |X|$ pont marad fedetlen, azaz M legfeljebb $|V| - (q(X) - |X|)$ pontot fed, így az M elemszáma legfeljebb $(|V| - q(X) + |X|)/2$. Így (2.11)-ban $\nu(G) \leq$ min következik.

A fordított irány bizonyításához V elemszáma szerinti indukciót alkalmazunk. Ha $|V| = 0$, akkor (2.11) mindkét oldala 0. Tegyük fel tehát, hogy $|V| \geq 1$ és azt, hogy a (2.11) formula érvényes minden kisebb gráfra. Nyilván feltehető, hogy G összefüggő. Azt kell kimutatnunk, hogy létezik egy olyan $X_0 \subseteq V$ halmaz, amelyre

$$\nu(G) \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2. \tag{2.12}$$

1. eset *G nem faktor-kritikus*, azaz van olyan v pontja, amelyet elhagyva a keletkező G' gráfra $\nu(G') \leq \nu(G) - 1$. Legyen $V' := V - v$. Indukciót használva kapjuk, hogy létezik olyan $X'_0 \subseteq V - v$, amelyre $\nu(G') = (|V'| - q'(X'_0) + |X'_0|)/2$, ahol $q'(X'_0)$ a $G' - X'_0$-ben jelöli a páratlan komponensek számát. Legyen $X_0 := X'_0 + v$. Nyilván $q(X_0) = q'(X'_0)$. Ezeket összevetve kapjuk: $\nu(G) - 1 \geq \nu(G') = (|V'| - q'(X'_0) + |X'_0|)/2 = (|V| - q(X_0) + |X_0| - 2)/2$, ami éppen (2.12).

2. eset *G faktorkritikus*. A Gallai lemma alapján $\nu(G) = (|V| - 1)/2$. Tehát $X_0 := \emptyset$ választással $\nu(G) = (|V| - 1)/2 \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2$, azaz (2.12) fennáll. • •

Nevezzünk **gát**nak egy olyan X halmazt, amelyre a minimum a Berge-Tutte formulában felvétetik.

TÉTEL 2.3.11 *Egy $U \subseteq V$ halmaz akkor és csak akkor független a $G = (V, E)$ gráf párosítás matroidjában, ha*

$$q_U(X) \leq |X| \text{ minden } X \subseteq V\text{-re,} \tag{2.13}$$

ahol $q_U(X)$ jelöli az X elhagyásával keletkező azon páratlan elemszámú komponensek számát, melyek minden pontja U-hoz tartozik.

Biz. Egy halmazt vagy egy komponenst, melynek valamennyi pontja U-ban van röviden U-belinek fogunk nevezni. Az X kihagyásával keletkező U-beli páratlan komponensek közül egy párosítás legfeljebb $|X|$ darabot tud teljesen lefedni, $q_U(X) \leq |X|$, vagyis a feltétel szükséges. Az elegendőség igazolásához feltehetjük, hogy $V - U$ klikket feszít, hiszen a $V - U$ két összekötetlen pontja közé behúzott új él nem befolyásolja az U párosítással való fedhetőségét.

Nincs mit bizonyítanunk, ha G-nek létezik teljes párosítása, így tegyük fel, hogy nem létezik, és legyen S egy maximális elemszámú gát. (Ez független U-tól.) Az S elhagyásával egyáltalán nem keletkezik páros komponens, hiszen annak egy pontját S-hez véve nagyobb gátat kapnánk. Az S elhagyásával keletkező páratlan komponensek mindegyike faktor-kritikus, hiszen ha az egyik ilyen K komponens nem az, akkor Tutte tétele alapján K tartalmaz egy olyan nemüres (!) X' részhalmazt, amire a $K - X'$ által feszített részgráf $|X'|$-nél több páratlan komponenst tartalmaz, és akkor $S \cup X'$ egy S-nél nagyobb gát lenne. Érvényes továbbá, hogy $G - S$-nak legfeljebb egy kivételével minden komponense teljesen U-hoz tartozik, hiszen $V - U$ klikk. Mivel a feltétel szerint S kihagyásával legfeljebb $|S|$ teljesen U-ba eső páratlan komponens keletkezik, azt kapjuk, hogy $G - S$ pontosan $|S| + 1$ faktor-kritikus komponensből áll, melyek közül $|S|$ darab U-beli, a maradék K_0-lal jelölt komponens pedig nem.

Létezik olyan M' párosítás, amely ezen $|S|$ darab komponenst párosítja S elemeivel, mert ha nem, akkor Hall tétele szerint a komponensek között van j darab, amelyeknek S-ben j-nél kevesebb szomszédja van. Ez azt jelenti, hogy a szomszédok X halmazát G-ből kihagyva $j > |X|$ darab U-beli páratlan komponens keletkezik, ellentétben a tétel feltevésével.

Legyen $v \in K_0 - U$. Miután $G - S$ komponensei faktor-kritikusak, M'-t ki lehet egészíteni a G egy olyan párosításává, amely egyedül a v-t nem fedi. •

TÉTEL 2.3.12 *Az $U \subseteq V$ halmaz rangja a $G = (V, E)$ gráf párosítás matroidjában egyenlő a*

$$\min\{|U| - q_U(X) + |X| : X \subseteq V\} \tag{2.14}$$

értékkel.

Biz. Ha X kihagyásával $q_U(X)$ darab U-hoz tartozó páratlan komponens keletkezik, akkor egy párosítás ezek közül legfeljebb $|X|$ darabot tud teljesen lefedni, így legalább $q_U(X) - |X|$ darab U-beli pont fedetlen marad, és így legfeljebb $|U| - q_U(X) + |X|$ pont lesz fedve, vagyis a párosítás matroidban U rangja legfeljebb ezen kifejezés minimuma lehet.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához legyen $\mu := \max\{q_U(X)-|X| : X \subseteq V\}$. Azt kell kimutatnuk, hogy létezik egy olyan párosítás, amely legfeljebb μ darab U-beli pontot nem fed. Ennek érdekében egészítsük ki a gráfot egy μ darab új csúcsból álló Z halmazzal, és ennek minden elemét kössük össze egymással és V minden elemével. Az így kapott G' gráfban ha egy X' halmaz megsérti a (2.13) feltételt, akkor X' szükségképpen tartalmazza mind a μ új pontot, hiszen ezek mindennel össze vannak kötve. Legyen $X := X' - Z$. Ekkor $G' - X' = G - X$, és mivel $G' - X'$ az $|X'|$-nél több U-ban fekvő páratlan komponenst tartalmaz, így $q_U(X) - |X| > \mu$, ellentétben μ definíciójával.

A 2.3.11 tétel alapján adódik, hogy G'-ben létezik egy U-t fedő M' párosítás. M'-nek legfeljebb μ új éle van, amiket kihagyva G-nek egy olyan párosítását kapjuk, amely U-nak legfeljebb μ pontot hagyja fedetlenül. •

Feladat 2.3.6 *A Gallai-Edmonds féle dekompozíció segítségével igazoljuk, hogy minden párosítás matroid transzverzális matroid.*

2.3.3 Gammoidok

A transzverzális matroidok egy másirányú általánosítását kaphatjuk irányított gráfok segítségével. Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf és $T \subseteq V$ a csúcsok egy részhalmaza. $X, Y \subseteq V$ esetén azt mondjuk, hogy X **elvezethető** az Y-hoz, ha $|X| = |Y|$ és létezik $|X|$ darab (esetleg egypontú) diszjunkt irányított út X-ből Y-ba.

TÉTEL 2.3.13 *A V azon részhalmazai, amelyekhez a T valamely részhalmaza elvezethető egy matroidot alkotnak, éspedig egy transzverzális matroid duálisát.*

Biz. Legyen V' és V'' a V illetve a $V-T$ halmazok egy-egy példánya. Azzal a jelölési konvencióval élünk, hogy egy V-beli v elem vagy X részhalmaz V'-beli megfelelőjét v'-vel illetőleg X'-vel jelöljük, míg egy $V - T$-beli v elem vagy X részhalmaz V''-beli megfelelőjét v''-vel illetve X''-vel. Készítsünk el egy $G' = (V', V''; E)$ páros gráfot, amelyben az $u' \in V'$ és $v'' \in V''$ csúcsok akkor vannak éllel összekötve, ha $u = v$ vagy ha uv éle D-nek. Tekintsük a G' által V'-n definiált M' transzverzális matroidot.

Állítás 2.3.14 *Egy $B' \subseteq V'$ halmaz pontosan akkor bázisa M'-nek, ha T elvezethető a $V - B$ halmazhoz.*

Biz. Legyen először B' az M' egy bázisa és P egy olyan párosítás, amely fedi B'-t. A konstrukció miatt $|B| = |V - T|$. Tetszőleges $v' \in V' - B'$ ponthoz a P párosítás segítségével megkonstruálhatunk D-ben egy T-ből induló és v-ben végződő utat, a következőképpen. Ha $v' \in T'$, úgy az út álljon az egyetlen v pontból. Tegyük fel, hogy $v' \notin T'$. Miután P fedi V''-t, a v'' pontot fedi párosítás él, melynek másik, v_1' végpontja olyan, hogy vagy v_1 benne van T-ben, vagy ha nincs, akkor v_1''-t fedi párosítás él. Ezt az eljárást ismételve valóban egy utat definiálunk T egy pontjából v-be. Könnyű ellenőrizni, hogy a $V' - B'$ különböző pontjaihoz így definiált utak páronként diszjunktak D-ben, tehát T valóban elvezethető $V - B$-hez.

Megfordítva, tekintsünk egy $|T|$ darab diszjunkt útból álló rendszert D-ben, amely a T halmazt valamely $X \subseteq V$ halmazhoz vezeti. Tekintsük G' azon éleit, melyek az útrendszer éleinek felelnek meg együtt az olyan $v'v''$ típusú élekkel, melyekre $v \in V - T$ nincs egyik úton sem. Könnyen ellenőrizhető, hogy így a páros gráfnak egy olyan V''-t fedő M' párosítását kapjuk, amely által fedetlen V'-beli pontok halmaza $V' - X'$, azaz $V' - X'$ a transzverzális matroid egy bázisa. •

Az M' duálisában egy $Y' \subseteq V'$ halmaz akkor független, ha $V' - Y'$ magában foglalja M' egy bázisát. Így az állításból adódóan Y' pontosan akkor független a duálisban, ha T-nek valamely részhalmaza elvezethető az $Y \subseteq V$ halmazhoz. • •

A 2.3.13 tételben szereplő matroid neve **szoros gammoid**. Ennek egy megszorítását (D pontjainak egy S részhalmazára) **gammoid**nak nevezik.

TÉTEL 2.3.15 *A szoros gammoidok éppen a transzverzális matroidok duálisai.*

Biz. A 2.3.13 tétel második része szerint minden szoros gammoid egy transzverzális matroid duálisa. A megfordításhoz tekintsünk egy $G = (V', V''; E)$ páros gráf által a V' halmazon definiált transzverzális matroidot. A 2.3.4 feladat szerint feltehető, hogy $|V''|$ a matroid rangja, azaz, hogy G-nek létezik V''-t fedő P párosítása. Jelölje T' a V' fedetlen pontjainak halmazát. Készítsünk el egy $D = (V, A)$ irányított gráfot, amelyben V a V' egy példánya, és xy akkor éle D-nek, ha $x' \in V', y'' \in V''$. Jelölje T a T'-nek megfelelő V-beli részhalmazt. A 2.3.13 tételben használt bizonyítás gondolatát követve nem nehéz ellenőrizni, hogy az így kapott digráfban a T által meghatározott gammoid izomorf a kiindulási transzverzális matroid duálisával. •

Miután a szoros gammoidok épp a transzverzális matroidok duálisai, a transzverzális matroidok pedig épp a deltoidok részmatroidjai, és a deltoidok duálisa is deltoid, kapjuk:

Következmény 2.3.16 *A szoros gammoidok éppen a deltoidok összehúzottjai.*

Következmény 2.3.17 *A gammoidok pontosan a deltoidok minorjai és pontosan a transzverzális matroidok összehúzottjai.*

Következmény 2.3.18 *Gammoidok duálisa gammoid.*

Biz. Egy gammoid duálisa egy deltoid minorjának duálisa, azaz egy duális deltoid minorja, és így egy deltoid minorja, tehát gammoid. •

2007. május 6. ulmat23

2.4 MATROIDOK MATROIDOKBÓL

A 2.1 szakaszban áttekintettük a matroidokra vontakozó alapműveleteket. Most további olyan érdekes konstrukciókat mutatunk be, melyek segítségével meglévő matroidokból újakat gyárthatunk.

2.4.1 Maximális súlyú bázisok matroidja

Egy matroidból az elemek tetszőleges c súlyozása segítségével egy új matroidot nyerhetünk.

TÉTEL 2.4.1 *Bármely $c : S \to \mathbf{R}$ súlyozásra a maximális súlyú bázisok kielégítik a bázis axiómákat.*

Biz. Legyen B_1 és B_2 két maximális súlyú bázis és legyen $x \in B_1 - B_2$. Az 1.4.3 tétel alapján létezik olyan $y \in B_2 - B_1$ elem, amelyre mind $B_1' := B_1 - x + y$, mind $B_2' = B_2 - y + x$ bázis. Ekkor szükségképpen $c(x) = c(y)$, így B_1' és B_2' maximális súlyú bázisok. •

A 2.4.1 tételben definiált matroidot jelöljük M_c-vel.

Gyakorlat 2.4.1 *Legyen $Z \subseteq S$. Igazoljuk, hogy a $c := \chi_Z$ súlyozásra $M_c|Z = M|Z$, míg a $c := -\chi_Z$ súlyozásra $M_c|Z = M/(S - Z)$.*

Tetszőleges c-re az M_c matroidot konkrétan előállíthatjuk, mint az M bizonyos minorjainak direkt összege. Tegyük fel, hogy a c különböző értékei $c_1 > c_2 > \ldots > c_t$ $(t \geq 1)$. Legyen $Z_i := \{s \in S : c(s) \geq c_i\}$. Legyen $P_1 = Z_1$ és $P_i := Z_i - Z_{i-1}$. Legyen $M_1 := M|P_1$, míg $i = 2, \ldots, t$ esetén M_i legyen az a matroid a P_i alaphalmazon, amely M-ből keletkezik a Z_{i-1} halmaz összehúzásával és az $S - Z_i$ elhagyásával.

TÉTEL 2.4.2 *A maximális súlyú bázisok M_c matroidja az M_i matroidok direkt összege. Az M_c rang-függvénye:*

$$r_c(X) = \sum_{i=1}^{t} [r((X \cap P_i) \cup Z_{i-1}) - r(Z_{i-1})]. \tag{2.15}$$

Biz. Legyen B maximális súlyú bázis. Állítjuk, hogy M-ben $B \cap Z_i$ feszíti Z_i-t minden $i = 1, \ldots, t$-re. Legyen indirekt i a legkisebb index, amelyre ez nem teljesül. Ekkor van olyan $x \in Z_i - B$, amelyre $B \cap Z_i + x$ független M-ben. A kicserélési axióma miatt létezik olyan $y \in B$, amelyre $B - y + x$ bázis. Most $y \notin Z_i$, így $c(x) > c(y)$, ellentmondásban azzal, hogy B maximális súlyú bázis. Tehát $B \cap Z_i$ valóban feszíti Z_i-t, és emiatt $B \cap P_i$ bázisa az M_i matroidnak, vagyis B bázisa a direkt összegnek.

Megfordítva, ha B bázisa a direkt összegnek, akkor látható, hogy B bázisa M-nek, és ráadásul olyan bázisa, amit a mohó algoritmus választhatott, ezért maximális súlyú. A rangformula közvetlenül adódik a minor és a direkt összeg rang-függvényére megismert alakból. •

Feladat 2.4.2 *Igazoljuk, hogy a* 2.4.1 *tételben szereplő M_c matroid bázis-poliédere az M bázis-poliéderének egy oldala, és megfordítva, minden ilyen oldal alkalmas c-re előáll, mint az M_c matroid bázis-poliédere.*

Feladat 2.4.3 *Legyen c egészértékű nemnegatív súlyozás az M matroid S alaphalmazán. Minden $X \subseteq S$ részhalmazra jelölje $b_c(X)$ az X-be eső független halmazok maximális súlyát. Igazoljuk, hogy a b_c szubmoduláris.*

2.4.2 Homomorf kép

A most következő ártatlannak tetsző konstrukciónak komoly alkalmazásai lesznek. Legyen $M = (S, \mathcal{F})$ egy függetlenjeivel adott matroid, T egy (S-től nem feltétlenül diszjunkt) halmaz és $\varphi : S \to T$ leképezés. Tekintsük az $\mathcal{F}' := \{X' \subseteq T :$ létezik olyan $X \in \mathcal{F}$ halmaz, amelyre $\varphi(X) = X'\}$ halmazrendszert. Magyarán az $\mathcal{F}'$ a T azon részhalmazaiból áll, melyek előállnak M-beli független halmazok képeként.

TÉTEL 2.4.3 (Nash-Williams) *A $(T, \mathcal{F}')$ pár matroidot alkot.*

Biz. Az első két függetlenségi axióma nyilván teljesül. Az (I3$'$) axióma igazolásához legyenek $K', N' \in \mathcal{F}'$ olyan részhalmazai T-nek, melyekre $|K'| < |N'|$. Ekkor léteznek $K, N \in \mathcal{F}$ halmazok, melyekre $\varphi(K) = K'$ és $\varphi(N) = N'$. Feltehetjük, hogy $|K| = |K'|$ és $|N| = |N'|$, mert ha mondjuk $|K| > |K'|$ volna, azaz K-nak volna két olyan e és f eleme, melyek képe ugyanaz a K'-beli elem lenne, akkor e és f egyikét kihagyhatnánk K-ból.

Válasszuk K-t és N-t olyannak, hogy metszetük maximális legyen! Az (I3$'$) axiómát K-ra és N-re alkalmazva kapjuk, hogy létezik olyan $e \in N - K$, amelyre $K + e \in \mathcal{F}$. Állítjuk, hogy az $e' := \varphi(e)$ nincs K'-ben. Ha ugyanis $e' \in K'$, akkor létezik K-nak egy olyan k eleme, amelyre $\varphi(k) = e'$, és $|N| = |N'|$ miatt $k \notin N$. De ekkor $K_1 := K + e - k \in \mathcal{F}$, $\varphi(K_1) = K'$ és $|K_1 \cap N| > |K \cap N|$, ellentmondásban $|K \cap N|$ maximális választásával.

Adódik tehát, hogy $K' + e'$ a $K + e$ független halmaz képe, vagyis (I3$'$) valóban fennáll. •

A 2.4.3 tételben szereplő matroidot az M matroid **homomorf kép**ének nevezzük és $\varphi(M)$-mel jelöljük, rangfüggvényét pedig r_φ-vel. Annak érdekében, hogy a homomorf kép rangfüggvényére formulát adjunk illetve a független halmazokat jellemezhessük kis kitérőt teszünk.

Rado tétele

Legyen $G = (S, T; E)$ egyszerű páros gráf, M az S-n lévő matroid. G egy párosítását akkor nevezzük **M-függetlenn**ek, ha az általa fedett S-beli pontok halmaza független M-ben. (Az M-függetlenség nem alkot matroidot már akkor sem, ha M a szabad matroid.) A Hall tétel egy lehetséges általánosításaként megkérdezhető, hogy mikor létezik T-t fedő M-független párosítás. Valamely $X \subseteq T$ halmazra jelölje $\Gamma(X)$ az X szomszédainak halmazát, azaz $\Gamma(X) := \{v \in S : v\text{-nek van szomszédja } X\text{-ben}\}$.

TÉTEL 2.4.4 (Rado) *Legyen $M = (S, r)$ matroid. A $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik T-t fedő M-független párosítás, ha minden $X \subseteq T$ esetén teljesül a Rado-féle feltétel, azaz*

$$r(\Gamma(X)) \geq |X|. \tag{2.16}$$

Biz. T elemszáma szerinti indukció. Az állítás nyilvánvaló, ha $|T| \leq 1$, így tegyük fel, hogy $|T| \geq 2$, és azt, hogy kisebb esetekre a tétel érvényes.

1. eset *Létezik T-nek olyan valódi nemüres T_1 részhalmaza, amelyre* (2.16) *egyenlőséggel teljesül, azaz $r(S_1) = |T_1|$, ahol $S_1 := \Gamma(T_1)$.* Indukcióval létezik az S_1 és T_1 által feszített részgráfnak egy P_1 M-független párosítása, mely T_1-t fedi.

Az $S_2 := S - S_1$ alaphalmazon jelölje M_2 az S_1 összehúzásával keletkező matroidot, rangfüggvénye legyen r_2. Legyen $T_2 := T - T_1$. Állítjuk, hogy az $S_2 \cup T_2$ által feszített G_2 páros gráfban az M_2 matroidra vonatkozóan teljesül a Rado feltétel. Valóban, bármely $X_2 \subseteq T_2$ halmazra legyen $X := T_1 \cup X_2$. Ekkor $\Gamma(X) = S_1 \cup \Gamma_2(X_2)$ és mivel X-re teljesül (2.16), azt kapjuk, hogy $r_2(\Gamma_2(X_2)) = r(\Gamma_2(X_2) \cup S_1) - r(S_1) = r(\Gamma(X)) - r(S_1) \geq |X| - |T_1| = |X_2|$. Így indukcióval G_2-ben létezik olyan P_2 M_2-független párosítás, amely T_2-t teljesen fedi. De ekkor a $P := P_1 \cup P_2$ párosítás M-független és fedi T-t.

2. eset *T-nek minden valódi nemüres részhalmazára* (2.16) *szigorú egyenlőtlenséggel teljesül.* Legyen ab ($a \in S, b \in T$) a G gráf egy éle, amelyre $r(a) = 1$. Jelölje M' az a összehúzásával M-ből keletkező matroidot és G' az a és b pontok elhagyásával keletkező páros gráfot. A feltevésből adódik, hogy G'-re és M'-re teljesül a Rado feltétel, hiszen valamely $X \subseteq T'$ nemüres halmazra $r'(\Gamma'(X)) = r(\Gamma'(X) + a) - 1 \geq r(\Gamma(X)) - 1 \geq |X|$. Így indukció miatt létezik G'-nek $T - b$-t fedő M'-független párosítása. Ekkor a $P' + ab$ párosítás M-független és fedi T-t. •

Kérdés, hogy ha az egész T-t fedő M-független párosítás nem is létezik, mekkora lehet a legnagyobb. Az alábbi tétel tartalma az, hogy a válasz csak a (2.16) feltétel megsérülésének mértékén múlik, vagyis hogy létezik egy olyan független párosítás, amelynek $|T|$-nél csupán annyival kevesebb elemű, mint a $\Delta := \max\{|X| - r(\Gamma(X)) : X \subseteq T\}$ érték.

TÉTEL 2.4.5 (Rado, deficites alak) *Legyen adva a $G = (S, T; E)$ páros gráf S pont-osztályán egy M matroid. Az olyan párosítás maximális elemszáma, amely S-ben a matroid egy független ponthalmazát fedi egyenlő a*

$$\mu := \min_{X \subseteq T} \{r(\Gamma(X)) + |T - X|\} \tag{2.17}$$

értékkel.

Biz. Bővítsük ki az S halmazt Δ $(= |T| - \mu)$ új elemmel egy S' halmazzá és az új elemek mindegyikét kössük össze T minden pontjával. Az S'-n az M' matroid legyen az M és az új elemek halmazán lévő szabad matroid direkt összege. A konstrukció miatt a létrejövő G' gráfra és M' matroidra teljesül a (2.16) feltétel, így Rado tétele alapján létezik egy M'-re nézve független párosítás, ami fedi T-t. Ebből kihagyva a legfeljebb Δ új élt, a G-nek egy olyan független párosítását kapjuk, amely legalább $|T| - \Delta = \mu$ élből áll. •

A deficites alak valóban kiterjesztése a Rado tételnek, mert ha $\mu = |T|$, akkor egy μ elemű független párosítás fedi T-t, míg ha $\mu < |T|$, akkor egy (2.17)-t minimalizáló X halmaz megsérti a Rado feltételt, hiszen $r(\Gamma(X)) + |T - X| = \mu < |T|$, azaz $r(\Gamma(X)) < |X|$.

A homomorf kép rangja

TÉTEL 2.4.6 *Az $M = (S, r)$ matroid $\varphi(M) = (T, r_\varphi)$ homomorf képének r_φ rangfüggvényét a következő formula adja. Minden $Z \subseteq T$ halmazra*

$$r_\varphi(Z) = \min\{r(\varphi^-(X)) + |Z - X| : X \subseteq Z\}. \tag{2.18}$$

Biz. Elég a formulát a $Z = T$ speciális esetben igazolni. Jelölje $G = (S, T : E)$ azt a páros gráfot, amelyben $st \in E$, ha $t = \varphi(s)$. Ekkor $\varphi^-(X) = \Gamma(X)$, így $r_\varphi(T) = \min\{r(\varphi^-(X)) + |T - X| : X \subseteq T\}$ ekvivalens a (2.17) képlettel és a 2.4.5 tétel alkalmazható. •

Következményként rögtön megkapjuk a függetlenség jellemzését.

TÉTEL 2.4.7 *Az $M = (S, r)$ matroid $\varphi(M)$ homomorf képében egy $I \subseteq T$ halmaz akkor és csak akkor független, ha*

$$r(\varphi^-(X)) \geq |X| \text{ minden } X \subseteq I\text{-re.} \tag{2.19}$$

Gyakorlat 2.4.4 *Igazoljuk, hogy a transzverzális matroidok éppen a partíciós matroidok homomorf képei.*

Homomorf kép és adjungált kapcsolata

Tekintsük ismét az S-n definiált M matroidot és a $\varphi : S \to T$ leképezést, ahol $T = \{t_1, \ldots, t_k\}$. A T ősképe meghatározza az S egy $\{S_1, \ldots, S_k\}$ partícióját. A definícióból könnyen látható, hogy a $\varphi(M)$ homomorf kép úgy is származtatható, hogy a $t_1, \ldots, t_k$ elemeket rendre adjungáljuk az $S_1, \ldots, S_k$ halmazokhoz, majd a keletkező matroidot megszorítjuk T-re.

Megfordítva, az adjungálás művelete is származtatható homomorf képből. Tegyük fel ugyanis, hogy az M' matroid M-ből áll elő az új z elem $Z \subseteq S$ szerinti adjungálásával. Bővítsük ki az M matroidot úgy, hogy a Z minden elemének egy párhuzamos másodpéldányát bevesszük. Jelölje a Z^+ az új, párhuzamos elemek halmazát, míg a kapott matroidot M^+. Legyen $T := S + z$ és definiáljuk a $\varphi : S \cup Z^+ \to T$ leképezést a következőképp: $x \in S$ esetén $\varphi(x) = x$, míg $x \in Z^+$ esetén $\varphi(x) = z$. Ekkor M' adjungált matroid éppen $\varphi(M^+)$ homomorf kép.

2.4.3 Matroidok összege és kompozíciója

Összeg

A homomorf kép alkalmazásaképp ismerkedjünk meg az összegmatroid fogalmával, amely jóval izgalmasabb matroid-konstrukció, mint a már megismert direkt összeg. A közös S alaphalmazon legyenek adva az $M_1, \ldots, M_k$ matroidok. Az S azon részhalmazait, amelyek előállnak az M_i matroidokból vett egy-egy független halmaz egyesítéseként (vagy ekvivalensen, partíciójaként) **partícionálható** halmazoknak hívjuk (az M_i matroidokra nézve).

TÉTEL 2.4.8 *Legyenek $M_1, M_2, \ldots, M_k$ matroidok a közös S alaphalmazon. A partícionálható halmazok $\mathcal{F}_\Sigma$ rendszere kielégíti a függetlenségi axiómákat.*

Biz. Készítsük el az S alaphalmazt k diszjunkt példányban, tekintsük az i-dik matroidot az S_i alaphalmazon és jelölje ezen matroidok direkt összegét M_{nagy}. Tekintsük az $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$ halmaznak azt a φ leképezését S-be, amelynél az S_i minden eleme, minden i-re, a neki megfelelő S-beli elemre képződik le. A konstrukcióból könnyen látszik, hogy az M_{nagy} matroid függetlenjeinek képei éppen az $\mathcal{F}_\Sigma$ halmazrendszer tagjai, így a 2.4.3 tétel alapján valóban kielégíti a függetlenségi axiómákat. •

Az $(S, \mathcal{F}_\Sigma)$ matroidot az $M_1, M_2, \ldots, M_k$ matroidok **összeg**ének (néha **unió**jának) nevezik. Amennyiben $M = M_1 = M_2 = \ldots = M_k$, úgy az $(S, \mathcal{F}_\Sigma)$ matroidot az M matroid k-**szoros**ának mondjuk.

TÉTEL 2.4.9 (Edmonds és Fulkerson) *Az összegmatroid rangfüggvényét a következő összegformula adja meg.*

$$r_\Sigma(Z) = \min_{X \subseteq Z} \{|Z - X| + \sum_i r_i(X)\}. \tag{2.20}$$

Biz. Alkalmazzuk a (2.18) formulát az előbbi bizonyításban szereplő homomorf képre. •

A 2.4.9 tételt néha **matroid partíciós tétel**nek hívják. A 4.1 szakaszban az összegmatroid rangformulájára direkt bizonyítást is adunk majd.

TÉTEL 2.4.10 (Edmonds és Nash-Williams) *Adott az S alaphalmazon k matroid, melyek rangfüggvénye $r_1, \ldots, r_k$. S akkor és csak akkor bomlik fel k halmaz egyesítésére úgy, hogy az i-edik halmaz független az i-edik matroidban, ha*

$$\sum_i r_i(X) \geq |X| \tag{2.21}$$

fennáll minden $X \subseteq S$ részhalmazra.

Biz. Az S pontosan akkor partícionálható, ha az összegmatroid rangja $|S|$. A 2.4.9 tétel alapján ez azzal ekvivalens, hogy $\min_{X \subseteq S}\{\sum_i r_i(X) + |S - X|\} \geq |S|$, azaz $\sum_i r_i(X) \geq |X|$ fennáll minden $X \subseteq S$ részhalmazra. •

Megjegyezzük, hogy a matroid összeg fogalmát könnyen kiterjeszthetjük arra az esetre is, amikor az összeadandó matroidok alaphalmaza nem feltétlenül ugyanaz. Egyszerűen minden matroidot terjesszünk ki az alaphalmazok uniójára úgy, hogy az új elemek mindegyike hurok.

Feladat 2.4.5 *Igazoljuk, hogy egy matroidban akkor és csak akkor létezik két diszjunkt egymást feszítő nemüres független halmaz, ha minden nemüres $X \subseteq S$-re $|X| \leq 2r(X) - 1$, azaz bármely elemet párhuzamosan duplázva felbomlik két független egyesítésére.*

Kompozíció

Legyen $M_i = (S_i, \mathcal{F}_i)$ $(i = 1, 2)$ két matroid, melyek alaphalmazai diszjunktak. Az $S := S_1 \cup S_2$ alaphalmazon definiáljuk az $M_1 \circ M_2$ matroidot a bázisaival a következőképp. Minden $F_1 \in \mathcal{F}_1$ és $F_2 \in \mathcal{F}_2$ halmazra, melyekre $|F_1| = |F_2|$, legyen $S_1 - F_1 \cup F_2$ egy bázis.

Feladat 2.4.6 *Az így definiált bázisok kielégítik a bázisaxiómákat.*

A keletkező matroidot az M_1 és az M_2 **kompozíció**jának nevezzük és $M_1 \circ M_2$-vel jelöljük. Figyeljük meg, hogy $M_1 \circ M_2$ és $M_2 \circ M_1$ egymás duálisai.

Feladat 2.4.7 *Igazoljuk, hogy az $M_1 \circ M_2$ matroid r-rel jelölt rangfüggvényére $r(X) = |S_1 \cap X| + \min\{r_2(S_2 \cap X), r_1(S_1 - X)\}$.*

2.4.4 Páros és irányított gráf indukálta matroid

Páros gráfok

Legyen $G = (S, T; E)$ páros gráf, és legyen M_1 az S alaphalmazon egy tetszőleges matroid. A T egy Y részhalmazát deklaráljuk függetlennek, ha létezik G-ben olyan Y-t fedő párosítás, amely S-ben az M_1 egy független halmazát fedi.

Feladat 2.4.8 *Igazoljuk, hogy az így definiált független halmazok kielégítik a függetlenségi axiómákat.*

Az így előálló M' matroidot az M_1 matroid páros gráf által **indukált matroid**jának nevezzük. Amikor M_1 a szabad matroid, az indukált matroid éppen a transzverzális matroid.

Az indukált M' matroid származtatható homomorf képként is. Tegyük ugyanis az M_1 matroidot a páros gráf élhalmazára (lásd a párhuzamos többszörözés műveletét a 2.1 szakaszban), és tekintsük a keletkező M_1' matroid $\varphi(M_1')$ homomorf képét a $\varphi : E \to T$ leképezés szerint, ahol φ minden élhez annak T-beli végpontját rendeli. A definíciókból rögtön látszik, hogy $\varphi(M_1')$ éppen az M_1 matroidnak a G páros gráf által indukált matroidja. A homomorf képre adott rangformulát alkalmazva kapjuk a következőt.

TÉTEL 2.4.11 *Az S-n értelmezett M_1 matroidból a $G = (S, T; E)$ páros gráf által T-n indukált M' matroidban egy $Z \subseteq T$ halmaz rangja egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq Z}\{r_1(\Gamma(X)) + |Z - X|\} \tag{2.22}$$

értékkel.

Biz. Az X halmaz φ szerinti ősképe az X-ben végződő élek $E(X)$ halmaza. Ennek M_1'-beli rangja pedig az $E(X)$ S-beli végpontjai halmazának M_1-beli rangja, vagyis $r_1'(\varphi^{-1}(X)) = r_1(\Gamma(X))$. Így a 2.4.6 tételből a (2.22) formula következik. •

Irányított gráfok

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf és $M_1 = (V, r_1)$ egy matroid. Deklaráljunk egy $r_1(V)$ elemű $Y \subseteq V$ halmazt bázisnak, ha létezik M_1-nek egy olyan X bázisa, amelyre létezik D-ben $|X|$ pontdiszjunkt irányított út X-ből Y-ba, (azaz M_1 egy bázisa Y-hoz vezethető).

Feladat 2.4.9 *Igazoljuk, hogy az előbbi konstrukció matroidot eredményez.*

Az így előálló M' matroidot az M_1 matroid D által **indukált matroid**jának nevezzük.

Gyakorlat 2.4.10 *M'-ben egy halmaz pontosan akkor független, ha kapcsolható az M_1 egy független halmazához.*

A szoros gammoidot speciális esetként kaphatjuk, amikor az M_1 matroidnak egyetlen $S \subseteq V$ bázisa van. Vizsgáljuk meg, mi a kapcsolat a páros gráf és a digráf indukálta matroidok között.

TÉTEL 2.4.12 *Egy M_1 matroidból páros gráf által indukált matroid előáll, mint az M_1-ből egy digráf által indukált matroid részmatroidja. Az M_1-ből egy digráf által indukált matroid előáll, mint az M_1^* duális matroidból egy páros gráf által indukált matroid duálisa.*

Biz. Az M_1 matroid $G = (S, T; E)$ páros gráf által indukált M' matroidja nem más, mint az M_1' matroid D digráf által indukált matroidjának T-re való megszorítása, ahol D úgy keletkezik G-ből, hogy annak valamennyi élét S-től T felé irányítjuk, míg M_1'-t az M_1-ből kapjuk úgy, hogy a T elemeit hurkokként hozzávesszük.

Megfordítva, tekintsük most az $M_1 = (V, \mathcal{B})$ matroid $D = (V, A)$ digráf által indukált $M' = (V, \mathcal{B}')$ matroidját. Készítsük el a $G = (V', V''; E)$ páros gráfot, amelyben a V' és V'' a V halmaz egy-egy példánya, és amelyben $u''v'$ akkor él, ha $uv \in A$ vagy $u = v$ (ahol egy $z \in V$ pont V'-beli illetve V''-beli példányát z' illetve z'' jelöli).

Lemma 2.4.13 *Az $X, Y \subseteq V$ azonos elemszámú halmazokra pontosan akkor létezik D-ben $|X|$ darab diszjunkt irányított út X-ből Y-ba, ha G-ben a $V' - X'$ és $V'' - Y''$ halmazok összepárosíthatók.*

Biz. Tegyük fel először, hogy a szóbanforgó útrendszer létezik. Ekkor az ebben szereplő éleknek megfelelő G-beli élek, együtt az olyan $u'u''$ élekkel, melyekre $u \in V$ nincs az útrendszerben, G-nek egy $V' - X'$-t és $V'' - Y''$-t fedő párosítását adják. Megfordítva, legyen P egy párosítás G-ben, amely a $V' - X'$ és $V'' - Y''$ halmazokat párosítja össze. Könnyen ellenőrizhető, hogy a P olyan $u''v'$ élei, melyekre $u \neq v$ olyan diszjunkt utakból és körökből álló rendszert határoznak meg D-ben, melyben $|X - Y|$ út van, és ezek az $X - Y$ halmazból vezetnek az $Y - X$ halmazba. Ezeket kiegészítve az $X \cap Y$ pontjaiból álló egypontú utakkal megkapjuk a keresett $|X|$ diszjunkt utat X-ből Y-ba. •

A lemmából rögtön következik, hogy a D digráf által M_1-ből indukált matroid nem más, mint a G páros gráf által a duális M_1^* matroidból indukált matroid duálisa. • •

2.4.5 Matroid indukálta matroid

Legyen S és T két diszjunkt halmaz, az S alaphalmazon egy M_1 matroid, míg az $S \cup T$ alaphalmazon egy olyan M matroid, melynek S bázisa.

Külső indukált

Tekintsük a T alaphalmazon az M és M_1 összegéből az S összehúzásával előálló M' matroidot, amelyre azt mondjuk, hogy az M_1 matroid M általi **külső indukált**ja.

TÉTEL 2.4.14 *Az M' külső indukált matroidban egy $F' \subseteq T$ halmaz akkor és csak akkor független, ha létezik olyan $F_1 \in \mathcal{F}_1$, melyre $S - F_1 \cup F'$ bázisa M-nek.*

Biz. Először tegyük fel, hogy F'-höz létezik a szóbanforgó F_1 halmaz. Mivel $S - F_1 \cup F'$ bázisa M-nek és F_1 független M_1-ben, így $S \cup F'$ független $M + M_1$-ben,és ezért F' független M'-ben.

Megfordítva, tegyük fel, hogy F' független M'-ben. Akkor $F' \cup S$ független $M + M_1$-ben, azaz felbomlik, egy M-ben független B halmaz és egy M_1-ben független F_1 halmaz diszjunkt egyesítésére. Itt feltehető, hogy B bázisa M-nek, ami épp azt jelenti, hogy F'-höz találtunk olyan $F_1 \in \mathcal{F}_1$ halmazt, melyre $B = S - F_1 \cup F'$ bázisa M-nek. •

Feladat 2.4.11 *Igazoljuk, hogy az M' külső indukált matroid r' rangfüggvényére fennáll az $r'(Z) = \min_{X \subseteq S}\{r(Z \cup X) + r_1(X) - |X|\}$ összefüggés.*

Bővítő indukált

Rokon konstrukció az M_1 matroid M **általi bővített** (vagy **bővítő**) **indukált**ja, amelynek $S \cup T$ az alaphalmaza, és amelyben az olyan $F_1 - F \cup F'$ alakú halmazok a függetlenek, melyekre $F \subseteq F_1 \subseteq S, F' \subseteq T$, $|F| = |F'|$, az F_1 független M_1-ben és $(S - F) \cup F'$ bázisa M-nek.

Feladat 2.4.12 *Igazoljuk, hogy a bővített indukált valóban matroid.*

Könnyű látni, hogy a külső indukált matroid a bővített indukált matroid T-re való megszorítása. Ennek egyfajta megfordítása a következő eredmény (amelyből egyúttal következik, hogy a külső indukált valóban matroid).

TÉTEL 2.4.15 *A bővített indukált matroid előáll, mint külső indukált matroid.*

Biz. Legyen S' az S halmaz egy $S \cup T$-től diszjunkt másolata. Legyen M_1' az M_1 matroid másolata S'-n. Bővítsük ki az M matroidot úgy, hogy az S és az S' egymásnak megfelelő elemei párhuzamosak, és jelölje M^+ az így kapott matroidot az $S \cup S' \cup T$ alaphalmazon. Tekintsük most az M_1' matroid M^+ általi külső indukáltját, melynek alaphalmaza $S \cup T$.

Ebben egy $A \cup B$ halmaz, ahol $A \subseteq T, B \subseteq S$), definíció szerint akkor független, ha S'-nek van egy $X' \cup B'$ részhalmaza, amely független M_1'-ben, és amelyre $S' - (X' \cup B') \cup (A \cup B)$ független M^+-ban. Mivel S' párhuzamos kópiája S-nek M^+-ban, ezen utóbbi azzal ekvivalens, hogy $S - X \cup A$ bázis M-ben, ahol X az X'-nek megfelelő részhalmaza S-nek. •

Speciális esetként tekintsük az $(S, T; E)$ páros gráf S bázisú M deltoidját és egy tetszőleges M_1 matroidot S-n. Ekkor a páros gráf által az M_1-ből indukált külső matroid éppen az M_1 matroid M által indukált külső matroidja.

Feladat 2.4.13 *Legyen $M_1 = (S, \mathcal{F}_1)$ és $M_2 = (T, \mathcal{F}_F)$ két matroid. Definiáljuk az $S \cup T$ alaphalmazon az M matroidot mint az M_2 és és az S-n vett szabad matroid direkt összegének az S elemszámával vett csonkoltja. Igazoljuk, hogy az $M_1 \circ M_2$ kompozíció nem más, mint az M_1 matroid M általi bővítő indukáltja.*

2007. május 6. ulmat24

2.5 MATROIDOK SZUBMODULÁRIS FÜGGVÉNYEKBŐL

Matroidok használatához nélkülözhetetlen volt a rang-függvény, melynek jellemző tulajdonságait az 1.4.7 tétel adta meg. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ezen tulajdonságok némelyike nélkülözhető, amikor halmazfüggvényeket használunk matroidok definiálására. Természetesen a kapott matroid már nem lesz képes visszaadni az őt definiáló függvényt.

2.5.1 Teljesen szubmoduláris függvények

Legyen b nem-negatív, egészértékű halmazfüggvény az S részhalmazain, amelyre $b(\emptyset) = 0$. Azt mondjuk, hogy b **polimatroid függvény**, ha kielégíti az (R1), (R2), (R4) rang-axiómákat, (de az (R3) szubkardinalitás nincs megkövetelve).

TÉTEL 2.5.1 *Adott b polimatroid függvényre legyen*

$$\mathcal{F}_b := \{I \subseteq S : b(Y) \geq |Y \cap I| \text{ minden } Y \subseteq S\text{-re}\}. \tag{2.23}$$

Ekkor $M = (S, \mathcal{F}_b)$ matroid, amelynek rang-függvénye

$$r_b(Z) = \min\{b(X) + |Z - X| : X \subseteq Z\}. \tag{2.24}$$

A bizonyítás előtt jegyezzük meg, hogy b monotonitása miatt (2.23) ekvivalens a következővel.

$$\mathcal{F}_b := \{I \subseteq S : b(Y) \geq |Y| \text{ minden } Y \subseteq I\text{-re}\}. \tag{2.25}$$

Biz. Az első két függetlenségi axióma evidens. A bizonyítás ügyes fogása, hogy az (I3) függetlenségi axiómát és a (2.24) formulát egyszerre látjuk be. Először is figyeljük meg, hogy $\mathcal{F}_b$ bármely $I \subseteq Z$ tagjának elemszáma legfeljebb $b(X) + |Z - X|$, ahol $X \subseteq Z$. Valóban, (2.25) szerint $|I \cap X| \leq b(I \cap X) \leq b(X)$ és innen

$$|I| = |I \cap X| + |I - X| \leq b(X) + |Z - X|. \tag{2.26}$$

Itt akkor és csak akkor áll egyenlőség, ha

$$|I \cap X| = b(X) \text{ és } Z - X \subseteq I. \tag{2.27}$$

Ebből adódóan, ha I valamely X halmazra kielégíti (2.27)-t, akkor $|I|$ a (2.24)-beli minimummal egyenlő. Legyen $I \subseteq Z$ halmaz olyan tagja $\mathcal{F}_b$-nek, amely már nem bővíthető Z-beli elemmel. Az $X \subseteq Z$ részhalmazra vezessük be az $m(X) := |I \cap X|$ jelölést. Triviálisan $m(X) + m(Y) = m(X \cap Y) + m(X \cup Y)$. $I \in \mathcal{F}_b$ azt jelenti, hogy $m(X) \leq b(X)$ fennáll Z minden X részére. Nevezzük X-t (I-re nézve) **pontos**nak, ha $m(X) = b(X)$. Az üres halmaz biztosan pontos.

Lemma 2.5.2 *Két pontos halmaz metszete és uniója is pontos.*

Biz. Legyen X, Y pontos. Ekkor $m(X)+m(Y) = b(X)+b(Y) \geq b(X\cap Y)+b(X\cup Y) \geq m(X\cap Y)+m(X\cup Y) = m(X) + m(Y)$ és a lemma következik. •

Miután I nem bővíthető, $Z - I$ minden z eleméhez létezik egy olyan $X_z \subseteq I + z$ halmaz, amelyre $b(X_z) \leq |X_z| - 1 = m(X_z)$. Ezen X_z-nek tartalmaznia kell z-t és ezért $b(X_z) \geq b(X_z - z) \geq |X_z - z| = |X_z| - 1 \geq b(X_z)$. Következésképpen X_z pontos.

A lemma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy létezik egy olyan pontos X halmaz, amely tartalmazza $Z - I$ valamennyi elemét vagyis X kielégíti (2.27)-t. Amint már megjegyeztük ebből következik, hogy (2.26) egyenlőséggel teljesül, tehát I elemszáma kizárólag X-től függ. Így a harmadik függetlenségi axióma is fennáll és egyúttal (2.24) is igazolást nyert. • •

Gyakorlat 2.5.1 *Igazoljuk, hogy a* 2.2.4 *tételben szereplő nagykörű matroid származtatható* 2.5.1 *tétel segítségével.*

Azt fogjuk mondani, hogy a (2.23) által definiált $(S, \mathcal{F}_b)$ matroid a **b-hez tartozik**. Legyen például az S alaphalmazon adva k matroid és jelölje $b := \sum r_i$ a rang-függvényeik összegét. A b nyilván polimatroid függvény. A hozzátartozó matroid rangfüggvénye az 2.5.1 tétel alapján

$$r_\Sigma(Z) = \min_{X \subseteq Z}\{\sum_i r_i(X) + |Z - X|\}, \tag{2.28}$$

vagyis a (2.20) formula szerint a $\sum r_i$-hez tartozó matroid éppen a k matroid összege.

Az alábbi tétel azt mutatja, hogy a polimatroid függvény monotonitása sem lényeges követelmény ahhoz, hogy $(S, \mathcal{F}_b)$ matroid legyen.

TÉTEL 2.5.3 *Legyen $b : 2^S \to \mathbf{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ nemnegatív, egészértékű, teljesen szubmoduláris függvény, amelyre $b(\emptyset) = 0$. Legyen*

$$\mathcal{F}_b := \{I \subseteq S : |Y \cap I| \le b(Y) \text{ minden } Y \subseteq S\text{-re}\}. \tag{2.29}$$

Ekkor $M = (S, \mathcal{F}_b)$ matroid, amelynek rang-függvénye

$$r_b(Z) = \min\{b(X) + |Z - X| : X \subseteq S\}. \tag{2.30}$$

Biz. Legyen

$$b_{\min}(Z) := \min\{b(X) : X \supseteq Z\} \tag{2.31}$$

Ekkor $b_{\min}$ polimatroid függvény. A monotonitás könnyen látszik $b_{\min}$ definíciójából. A szubmodularitás igazolásához legyen $X, Y \subseteq S$. Léteznek olyan $X' \supseteq X, Y' \supseteq Y$ halmazok, melyekre $b_{\min}(X) = b(X')$ és $b_{\min}(Y) = b(Y')$. Miután $X' \cup Y' \supseteq X \cup Y$ és $X' \cap Y' \supseteq X \cap Y$, következik, hogy $b_{\min}(X \cup Y) \le b(X' \cup Y')$ és hogy $b_{\min}(X \cap Y) \le b(X' \cap Y')$. Összevetve ezeket és b szubmodularitását használva azt kapjuk, hogy $b_{\min}(X) + b_{\min}(Y) = b(X') + b(Y') \ge b(X' \cap Y') + b(X' \cup Y') \ge b_{\min}(X \cap Y) + b_{\min}(X \cup Y)$.

A tételhez már csak azt kell belátni, hogy $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_{b_{\min}}$. Miután a definícióból adódóan $b_{\min} \le b$, így $\mathcal{F}_b \supseteq \mathcal{F}_{b_{\min}}$. A fordított irányú tartalmazáshoz legyen Z olyan halmaz, amely nincs $\mathcal{F}_{b_{\min}}$-ben. Ekkor van olyan X, amelyre $b_{\min}(X) < |X \cap Z|$. Az X halmazhoz van olyan X', amelyre $b_{\min}(X) = b(X')$. Most $b(X') = b_{\min}(X) < |X \cap Z| \le |X' \cap Z|$, tehát Z nem tartozhat $\mathcal{F}_b$-hez sem. •

A fenti tételben megengedtük, hogy a b függvény $+\infty$ értéket is felvegyen. Azon halmazok rendszere, melyeken b véges, zárt a metszet és unió képzésre. (Egy ilyen halmazrendszert néha **gyűrű család**nak neveznek). Ezért az esetleg végtelen értéket is felvevő, minden részhalmazon értelmezett szubmoduláris függvények azonosíthatók azon véges értékű szubmoduláris halmazfüggvényekkel, melyek csak egy gyűrű családon vannak értelmezve. Egy $h : 2^S \to \mathbf{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ halmazfüggvényt akkor nevezünk **monoton növő**nek, ha $X \subseteq Y$, $h(X), h(Y)$ végessége esetén $h(X) \le h(Y)$.

2.5.2 Polimatroid függvények matroidokból

A 2.5.1 szakaszban láttuk, hogy miként lehet matroidokat polimatroid függvényekből előállítani. De hogyan lehet polimatroid függvényeket gyártani? Egy lehetséges mód a következő. Legyen az M matroid alaphalmaza S, rangfüggvénye r. Legyen adott továbbá egy T halmaz és egy $\varphi : S \to T$ leképezés. Definiáljunk a T részhalmazain a $b_r(X) := r(\varphi^-(X))$ halmazfüggvényt, ahol $\varphi^-(X)$ az X ősképét jelöli, vagyis mindazon S-beli elemek halmazát, melyeknek képe X-ben van.

Gyakorlat 2.5.2 *Igazoljuk, hogy b_r polimatroid függvény.*

A gyakorlat megoldása könnyű. Annál izgalmasabb a fordított irányú állítás, amely szerint minden polimatroid függvény előáll ilyen alakban.

TÉTEL 2.5.4 (Lovász) *Legyen b a T alaphalmazon értelmezett (egészértékű) polimatroid függvény. Ekkor létezik egy (S, r) matroid és S-nek egy T-re történő φ leképezése, amelyekre $b(X) = r(\varphi^-(X))$ minden $X \subseteq T$-re.*

Biz. A T halmaz minden t elemét készítsük el $b(t)$ példányban. Legyen az új elemek halmaza S és minden $s \in S$-re legyen $\varphi(s)$ az az eleme T-nek, amelynek „felfújásából” készült. Definiáljuk S-en a $b_S(X) := b(\varphi(X))$ halmazfüggvényt. Ez nyilván polimatroid függvény. A b_S-hez tartozó (S-n értelmezett) matroid rangfüggvényét jelölje r. A 2.5.1 tételből tudjuk, hogy

$$r(Z) = \min\{b_S(X) + |Z - X| : X \subseteq Z\}. \tag{2.32}$$

Legyen $Y \subseteq T$ és $Z := \varphi^-(Y)$. Azt állítjuk, hogy (2.32)-ben a minimum az $X := Z$ halmazon is felvétetik. Jelölje X_m a legnagyobb olyan halmazt, amelyen a minimum felvétetik. Ekkor nincsenek olyan $u \in X_m, v \in Z - X_m$ elemek, amelyekre $\varphi(u) = \varphi(v) \in Y$, mert különben $X' := X_m + v$ olyan halmaz volna, amelyre $b_S(X') + |Z - X'| = b_S(X_m) + |Z - X'| < b_S(X_m) + |Z - X_m|$, ellentmondásban X_m minimalizáló voltával. Így tehát egy tetszőleges $t \in Y - \varphi(X_m)$ elemre $\varphi^-(t) \subseteq Z - X_m$. Legyen $X' := X_m \cup \varphi^-(t)$. Ekkor a szubmodularitás miatt $b_S(X') \le b_S(X_m) + b_S(\varphi^-(t)) = b_S(X_m) + b(t) = b_S(X_m) + |\varphi^-(t)|$. Ebből $b_S(X') + |Z - X'| = b_S(X') + |Z - X_m| - |\varphi^-(t)| \le b_S(X_m) + |\varphi^-(t)| + |Z - X_m| - |\varphi^-(t)| = b_S(X_m) + |Z - X_m|$. Emiatt X' is minimalizáló halmaz, ellentétben X_m legbővebb választásával.

Azt kaptuk tehát, hogy $r(Z) = b_S(Z)$. A b_S definíciója szerint $b(Y) = b_S(Z)$, és így $b(Y) = r(Z) = r(\varphi^-(Y))$, vagyis az (S, r) matroid valamint a $\varphi : S \to T$ leképezés kielégítik a tétel kívánalmait. •

2.5.3 Metsző szub- és szupermoduláris függvények reszeltje

Alkalmazásokban hasznosnak bizonyul majd, hogy a (2.23) definíció olyan halmazfüggvényekre is matroidot adhat, amelyekre még a szubmodularitás sincs mindenütt megkövetelve. Legyen $b : 2^V \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ az S alaphalmaz részhalmazain értelmezett olyan függvény, amelyre $b(\emptyset) = 0$ és amely minden nemüres metszetű X, Y párra teljesíti a szubmodularitási egyenlőtlenséget. Az ilyen b függvényt **metsző** vagy **metszőn szubmoduláris függvény**nek mondjuk. Definiáljuk a

$$b^\vee(X) := \min\{\textstyle\sum_i b(X_i) : \{X_i\} \text{ az } X \text{ partíciója}\} \tag{2.33}$$

függvényt, amelyet a b **reszeltjé**nek fogunk nevezni. Ez tulajdonképpen az ún. **alsó reszelt**. Ha min helyett max szerepel, akkor **felső reszelt**ről beszélünk. A felső reszeltet mindig metsző szupermoduláris függvényre alkalmazzuk. A reszelt segítségével meg fogjuk mutatni, hogy metsző szubmoduláris függvények révén is definiálhatunk matroidokat. Kezdjük egy egyszerű megfigyeléssel.

Lemma 2.5.5 *Tetszőleges b halmazfüggvényre a b-hez tartozó $\mathcal{F}_b$ halmazrendszer megegyezik a reszeltjéhez tartozó $\mathcal{F}_{b^\vee}$ halmazrendszerrel.*

Biz. Miután $b^\vee \leq b$, így $\mathcal{F}_b \supseteq \mathcal{F}_{b^\vee}$. Másrészt legyen $I \in \mathcal{F}_b$. Valamely $Z \subseteq S$ halmazra tekintsük azt a $\{Z_i\}$ partícióját Z-nek, amelyre $b^\vee(Z) = \sum_i b(Z_i)$. Most $|I \cap Z| = \sum_i |I \cap Z_i| \leq \sum_i b(Z_i) = b^\vee(Z)$, azaz $I \in \mathcal{F}_{b^\vee}$ és így $\mathcal{F}_b \subseteq \mathcal{F}_{b^\vee}$, tehát $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_{b^\vee}$. •

Az alábbi lemma kulcsfontosságú.

Lemma 2.5.6 (Reszelési lemma) *Egy metszőn szubmoduláris b függvény $b^\vee$ (alsó) reszeltje teljesen szubmoduláris.*

Biz. A szubmodularitás bizonyításához legyen $A, B \subseteq S$ két tetszőleges halmaz. A $b^\vee$ definíciójából adódóan létezik A-nak egy olyan $\{A_1, \dots, A_k\}$ partíciója és B-nek egy olyan $\{B_1, \dots, B_l\}$ partíciója, melyekre $b^\vee(A) = \sum_i b(A_i)$ és $b^\vee(B) = \sum_j b(B_j)$. Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l\}$. Ekkor $\mathcal{F}$ halmazrendszer olyan, hogy

$(*)$ $A \cap B$ minden elemét kétszer fedi és $(A - B) \cup (B - A)$ minden elemét egyszer.

Jelölje $b(\mathcal{F}) := \sum[b(X) : X \in \mathcal{F}]$. Amennyiben $\mathcal{F}$-ben létezik két metsző halmaz, akkor helyettesítve őket a metszetükkel és az uniójukkal olyan új $\mathcal{F}_1$ rendszert kapunk, amely továbbra is kielégíti $(*)$-t, és $b(\mathcal{F}_1) \leq b(\mathcal{F})$. Ez utóbbi azért érvényes, mert b metszőn szubmoduláris.

Alkalmazzuk ezt a „kikeresztezési” eljárást egészen addig, amíg van a rendszerben két metsző halmaz. Miután a $\sum[|X|^2 : X \in \mathcal{F}]$ minden lépésben szigorúan növekszik, az eljárás véges sok lépés után véget ér. A végső $\mathcal{F}_0$ rendszer lamináris, kielégíti $(*)$-t és $b(\mathcal{F}_0) \leq b(\mathcal{F})$.

Azt állítjuk, hogy $\mathcal{F}_0$ felbontható két diszjunkt részre, $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$-re úgy, hogy $\mathcal{P}_1$ az $A \cap B$ partíciója és $\mathcal{P}_2$ az $A \cup B$ partíciója. Valóban, álljon $\mathcal{P}_1$ az $\mathcal{F}_0$ azon minimális tagjaiból, melyek $A \cap B$-be esnek, míg $\mathcal{P}_2$ álljon az $\mathcal{F}_0$ többi tagjából, azaz $\mathcal{P}_2 := \mathcal{F}_0 - \mathcal{P}_1$. (Amennyiben valamely $X \subseteq A \cap B$ halmaznak két példánya is $\mathcal{F}_0$-hoz tartozik, úgy X egyik példányát vegyük $\mathcal{P}_1$-be, a másikat pedig $\mathcal{P}_2$-be.)

A laminaritás miatt $\mathcal{P}_1$ részpartíciója $A \cap B$-nek, sőt valójában partíciója. Ha ugyanis valamely $x \in A \cap B$ elem nem tartozna egyik $\mathcal{P}_1$-beli halmazhoz sem, akkor x benne volna két, X és Y-nal jelölt $\mathcal{P}_2$-beli halmazban. A laminaritás miatt ezek egyike része a másiknak, mondjuk $X \subseteq Y$. Ha most X része $A \cap B$-nek, akkor magában foglal egy $\mathcal{P}_1$-beli halmazt és így X-nek volna $\mathcal{F}_0$ által háromszor fedett pontja. Ha viszont X tartalmaz pontot $A \cap B$-n kívül, akkor ez kétszer volna fedve. Mindkét eset ellentmondana $(*)$-nak.

$\mathcal{P}_1$ tehát partíciója $A \cap B$-nek, és így, $(*)$ miatt, $\mathcal{P}_2$ partíciója $A \cup B$-nek. A $b^\vee$ függvény definíciójából $b^\vee(A \cap B) \leq b(\mathcal{P}_1)$ és $b^\vee(A \cup B) \leq b(\mathcal{P}_2)$. Ezért $b^\vee(A) + b^\vee(B) = b(\mathcal{F}) \geq b(\mathcal{F}_0) = b(\mathcal{P}_1) + b(\mathcal{P}_2) \geq b^\vee(A \cap B) + b^\vee(A \cup B)$, tehát $b^\vee$ valóban teljesen szubmoduláris. •

Feladat 2.5.3 *Igazoljuk, hogy monoton növő* (és így nemnegatív)*, metsző szubmoduláris függvény reszeltje is monoton növő!*

A 2.5.5 és a 2.5.6 lemma valamint a 2.5.3 tétel összevetéséből kapjuk a következőt.

TÉTEL 2.5.7 *Legyen b nemnegatív, egészértékű, metszőn szubmoduláris függvény. Legyen*

$$\mathcal{F}_b := \{I \subseteq S : |Y \cap I| \leq b(Y) \textit{ minden } Y \subseteq S\textit{-re}\}. \tag{2.34}$$

Ekkor $M = (S, \mathcal{F}_b)$ matroid, amelynek rang-függvénye

$$r_b(Z) = \min\{\textstyle\sum_i b(Z_i) + |Z - \cup_i Z_i| : \{Z_i\} \textit{ az } S \textit{ részpartíciója.}\} \tag{2.35}$$

Ha b ráadásul monoton növő, úgy (2.35)*-ben a minimumot elég a Z részpartícióira venni. Ha még ezen túl $b(s) \leq 1$ is fennáll minden $s \in S$ elemre, akkor* (2.35)*-ben a minimumot elég Z partícióira venni, azaz ilyenkor $r_b(Z) = b^\vee(Z)$.* •

Gyakorlat 2.5.4 *Milyen b metsző szubmoduláris függvényhez tartozik a 2.2 szakaszban definiált lamináris matroid?*

Feladat 2.5.5 *Legyen $G = (V, E)$ hurok-mentes irányítatlan gráf. Az élek egy $F \subseteq E$ nemüres részhalmazára legyen $b(F)$ az F-beli élekkel érintkező pontok száma minusz 1. Igazoljuk, hogy b metsző szubmoduláris és a b-hez tartozó matroid éppen a gráf körmatroidja.*

Feladat 2.5.6 *Igazoljuk, hogy a nagykörű matroidok a (2.34) alakban származtathatók metsző szubmoduláris függvényekből.*

Érdemes összefoglalni az eddigi eredményeket egyetlen tételbe.

TÉTEL 2.5.8 *Amennyiben b metsző szubmoduláris, úgy $\mathcal{F}_b$ kielégíti a függetlenségi axiómákat. A kapott $M = (S, \mathcal{F}_b)$ matroid rangfüggvénye a következő:*

$$r_b(Z) = \min\{\textstyle\sum_{i=1}^t b(X_i) + |Z - (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_t)| : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ részpartíciója } S\text{-nek}\}. \tag{2.36}$$

Ha b teljesen szubmoduláris, úgy

$$r_b(Z) = \min\{b(X) + |Z - X| : X \subseteq S\}. \tag{2.37}$$

Ha b monoton növő, akkor a metsző szubmoduláris esetben elég a minimumot a Z részpartícióira venni, azaz

$$r_b(Z) = \min\{\textstyle\sum_{i=1}^t b(X_i) + |Z - (X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_t)| : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ részpartíciója } Z\text{-nek}\}, \tag{2.38}$$

míg a teljesen szubmoduláris esetben elég a minimumot a Z részhalmazaira venni, azaz

$$r_b(Z) = \min\{b(X) + |Z - X| : X \subseteq Z\}. \tag{2.39}$$

Matroidok szupermoduláris függvényekből

Alkalmazásokban néha szupermoduláris függvények szerepelnek szubmoduláris helyett (lásd például a 2.6.3 tételt) és ilyenkor kényelmesebb a matroid generátorait megadni a független halmazok helyett. Legyen $p : 2^S \to \mathbf{Z}$ (nem feltétlenül nemnegatív) metsző szupermoduláris halmazfüggvény, amelyre $p(\emptyset) = 0$ és

$$p(X) \leq |X| \text{ minden } X \subseteq S \text{ halmazra} \tag{2.40}$$

fennáll. Tekintsük a $\mathcal{G}^p := \{Z \subseteq S : |Z \cap X| \geq p(X) \text{ minden } X \subseteq S \text{ halmazra}\}$ halmazrendszert. Mivel (2.40) miatt $p(S) \leq |S|$, ezért az S halmaz benne van $\mathcal{G}^p$-ben.

TÉTEL 2.5.9 *A $\mathcal{G}^p$ halmazrendszer egy M^p matroid generátorainak rendszere. A matroid ko-rangja*

$$\max\{\textstyle\sum_i p(X_i) : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ részpartíciója } S\text{-nek}\}. \tag{2.41}$$

Biz. Legyen $b(X) := |X| - p(X)$. Ekkor b metsző szubmoduláris és (2.40) miatt nemnegatív A b-hez tartozó $\mathcal{F}_b$ halmazrendszernek egy I halmaz definíció szerint akkor tagja, ha $|I \cap X| \leq b(X)$ minden $X \subseteq S$-re fennáll, ami $|X - I| \geq p(X)$-szel ekvivalens, azaz $Z := S - I$-re $|Z \cap X| \geq p(X)$. Tehát I pontosan akkor van $\mathcal{F}_b$-ben, ha $S - I$ $\mathcal{G}^p$-ben van. Miután $\mathcal{F}_b$ egy M_b matroid függetlenjeinek a halmaza, kapjuk, hogy $\mathcal{G}^p$ a duális matroid generátorainak a halmaza.

Az M_b matroid rangja (2.36) szerint $\min\{\sum_i b(X_i) + |S - \cup X_i| : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ részpartíció}\}$. Így M^p rangja $|S| - (\min\{\sum_i b(X_i) + |S - \cup X_i| : \{X_1, \ldots, X_t\} \text{ részpartíció}\}) = \max\{-\{\sum_i [|X_i| - p(X_i)] : \{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíció $] - |\cup X_i|\}\} = \max\{\sum_i p(X_i) : \{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciója S-nek$\}$. •

A 2.5.9 tétel általánosításaként megadjuk az M^p ko-rang függvényét.

TÉTEL 2.5.10 *Az M^p matroid t^p ko-rang függvényére érvényes a következő formula:*

$$t^p(Z) = \max\{\textstyle\sum_i p(X_i) - |\cup_i X_i - Z| : \{X_1, \ldots, X_q\} \text{ az } S \text{ részpartíciója}\}. \tag{2.42}$$

Biz. Tetszőleges $\{X_1, \ldots, X_q\}$ részpartíció esetén egy B bázis legalább $p(X_i)$ elemet tartalmaz mindegyik X_i-ből, így legalább $p(X_i) - |X_i - Z|$ elemet $Z - X_i$-ből, amiből a $t^p(Z) \geq \max$ irány következik.

Egy X halmazt nevezzünk pontosnak egy B bázisra nézve, ha $|B \cap X| = p(X)$. Az előző becslésből kapjuk, hogy az egyenlőség igazolásához egy olyan $\{X_1, \ldots, X_q\}$ részpartíciót és egy olyan B bázist kell találnunk, melyekre $X_i - Z \subseteq B \cap X_i$, $|B \cap X_i| = p(X_i)$ és $B \cap Z \subseteq \cup X_i$. Más szóval, $B \cup Z$-ben fekvő diszjunkt pontos halmazokkal kell fednünk $B \cap Z$-t.

Legyen B olyan bázis, amelyre $|B \cap Z|$ minimális. Minden $v \in Z \cap B$-re a v-t tartalmazó (egyértelmű) legszűkebb $P(v)$ pontos halmaz teljesen $B \cup Z$-ben van, mert ha volna egy $u \in P(v) - (B \cup Z)$ elem, akkor $B' := B - v + u$ olyan bázis lenne, amelyre $|B' \cap Z| < |B \cap Z|$ volna. Igy léteznek olyan $X_1, \ldots, X_q$ diszjunkt pontos halmazok $B \cup Z$-ben (nevezetesen a $\{P(v) : v \in B \cap Z\}$ hipergráf komponensei), melyek fedik $B \cap Z$-t. •

A mohó algoritmus

Legyen b metsző szubmoduláris függvény, és tekintsük az $M_b = (S, \mathcal{F}_b)$ matroidot. Adott c nemnegatív súlyozásra hogyan tudjuk meghatározni ezen matroid egy maximális súlyú bázisát? Elvileg a mohó algoritmus alkalmazható, ha a függetlenségi orákulum egy változata rendelkezésre áll. Egyszerűség kedvéért most feltesszük, hogy b monoton növő. Feltehetjük, hogy $c(s_1) \geq \ldots \geq c(s_n)$. Tekintsük egymás után az elemeket, és tegyük fel, hogy S_i-ből az algoritmus már kiválasztotta az F független halmazt. Az s_{i+1} elemet akkor vesszük F-hez, ha $F + s_{i+1}$ független M_b-ben, és ez pontosan akkor áll fenn, ha

$$\text{nincs olyan } X \text{ halmaz, amelyre } s_{i+1} \in X \subseteq S_{i+1},\ b(X) = |X \cap F|. \tag{2.43}$$

A mohó algoritmus tehát használható az M_b matroidra, ha rendelkezésünkre áll egy (2.43)-t eldöntő szubrutin. A 2.6 részben látunk majd példákat, amikor ez a szubrutin rendelkezésre áll.

Minimális módosítással akkor is használható az eljárás, ha egy metsző szupermoduláris függvénnyel adott matroid minimális súlyú generátorát (vagy bázisát) akarjuk meghatározni.

2.5.4 Keresztező szub- és szupermoduláris függvények

Kérdés, hogy nem gyengíthető-e még tovább a szubmodularitás. Legyen ismét $b : 2^S \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ az S alaphalmaz részhalmazain értelmezett olyan függvény, amelyre $b(\emptyset) = 0$. Tegyük fel, hogy minden olyan $\{X, Y\}$ halmaz párra, amelyre $X \cap Y \neq \emptyset, X \cup Y \neq S$, teljesül a szubmodularitási egyenlőtlenség. Az ilyen b függvényt **keresztező** vagy **keresztezőn szubmoduláris függvény**nek mondjuk.

Gyakorlat 2.5.7 *Igazoljuk, hogy ha egy keresztező halmazfüggvény értékét az alaphalmazon, vagy az egyelemű halmazokon illetve azok komplementerein csökkentjük, úgy keresztező szubmoduláris függvényt kapunk.*

Keresztező szubmoduláris függvények esetén a (2.23) által definiált $\mathcal{F}_b$ halmaz-rendszer immár nem feltétlenül elégíti ki a függetlenségi axiómákat. Valóban, az $\{x, y, z\}$ alaphalmazon legyen $b(x, y) := 1, b(x, z) := 1$ és egyéb részhalmazokra $b(X) := |X|$. Azonban függetlenek helyett bázisokat definiálva, mégiscsak készíthetünk matroidokat keresztező szubmoduláris függvényekből.

TÉTEL 2.5.11 *Legyen $b \geq 0$ keresztező szubmoduláris, egészértékű halmazfüggvény, melyre $b(\emptyset) = 0$ és $r := b(S)$. Legyen*

$$\mathcal{B}_b := \{B \subseteq S : |B| = r, |Y \cap B| \leq b(Y) \text{ minden } Y \subseteq S\text{-re}\}. \tag{2.44}$$

Ekkor $\mathcal{B}_b$, amennyiben nemüres, kielégíti a bázisaxiómákat.

Biz. Legyen B_1 és B_2 a $\mathcal{B}_b$ két tagja és $x \in B_1 - B_2$. Legyen $m_1(X) := |B_1 \cap X|$ és nevezzünk egy X halmazt B_1-pontosnak, ha $b(X) = m_1(X)$. A 2.5.2 lemma mintájára kapjuk, hogy két keresztező B_1-pontos halmaz metszete és uniója is B_1-pontos, amiből adódik, hogy az x elemet nem tartalmazó legbővebb B_1 pontos halmazok egy $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_k\}$ részpartíciót alkotnak. Jelölje a P_i halmazok unióját P.

Ha valamely $y \in B_2 - B_1$ elemre $B_1 - x + y$ nincs $\mathcal{B}_b$-ben, úgy létezik egy y-t tartalmazó, x-t nem tartalmazó B_1-pontos halmaz. Így, ha indirekt nem érvényes a báziskicserélési axióma, akkor P teljesen fedi $B_2 - B_1$-t, de x miatt persze $B_1 - B_2$-t nem. Emiatt, $|B_1 - B_2| = |B_2 - B_1|$-t kihasználva $|P \cap B_1| < |P \cap B_2|$. Másrészt $|P \cap B_1| = \sum_i |P_i \cap B_1| = \sum_i b(P_i) \geq \sum_i |P_i \cap B_2| = |P \cap B_2|$, ellentmondás. •

A (2.44) definícióval analóg módon, adott p halmazfüggvényhez hozzárendelhetjük a

$$\mathcal{B}'_p := \{B \subseteq S : |B| = p(S), |Y \cap B| \geq p(Y) \text{ minden } Y \subseteq S\text{-re}\} \tag{2.45}$$

halmazrendszert.

TÉTEL 2.5.12 *Legyen $b \geq 0$ keresztező szubmoduláris, egészértékű halmazfüggvény, melyre $b(\emptyset) = 0$ és $r := b(S)$. Tegyük fel, hogy $\mathcal{B}_b$ nemüres. Ekkor az $M = (S, \mathcal{B}_b)$ matroidban egy $F \subseteq S$ halmaz akkor és csak akkor független, ha az alaphalmaz minden $\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_t\}$ $(t \geq 1)$ partíciójára*

$$|Z_0 \cap F| + \sum_{i=1}^{t} [r - b(S - Z_i)] \leq r. \tag{2.46}$$

Biz. Tegyük fel, hogy F független. Ekkor létezik $B \in \mathcal{B}_b$, amelyre $F \subseteq B$, és így $r = |B| = |B \cap Z_0| + \sum_{i=1}^{t} |B \cap Z_i| \geq |B \cap Z_0| + \sum_{i=1}^{t} [r - |B \cap (S - Z_i)| \geq |F \cap Z_0| + \sum_{i=1}^{t} [r - b(S - Z_i)]$, tehát (2.46) szükséges.

Az elegendőséghez tekintsük a $p(X) := r - b(S - X)$ által definált p függvényt és annak $p^\wedge$ felső reszeltjét. Ekkor $r = p(S) \leq p^\wedge(S)$, és itt nem állhat szigorú egyenlőtlenség, hiszen az $\mathcal{B}_b$ valamely B tagjára és az S azon $\{S_1, \ldots, S_t\}$ partíciójára, amelyre $p^\wedge(S) = \sum_i p(S \cap B_i)$, fennáll $r \geq |B| = \sum_i |S \cap B_i| \geq \sum_i p(S \cap B_i) = p^\wedge(S)$. Ebből adódik, hogy

$$\mathcal{B}_b = \mathcal{B}'_p = \mathcal{B}'_{p^\wedge} \tag{2.47}$$

Állítjuk, hogy $p^\wedge$ ko-metsző szupermoduláris, azaz X,Y halmazokra $X \cup Y \neq S$ esetén $p^\wedge$ teljesíti a szupermodularitási egyenlőtlenséget. Valóban, p keresztező szupermoduláris, ezért p az S bármely valódi részhalmazára megszorítva metsző szupermoduláris. Speciálisan $S' = X \cup Y$-n is az, így a reszelési tétel (szupermoduláris függvényre vonatkozó változata) szerint $p^\wedge$ teljesen szupermoduláris S'-n. (Itt felhasználjuk azt a trivialitást, hogy az S'-re megszorított függvény reszeltje ugyanaz, mint a reszelt S'-re való megszorítása).

Legyen $b'(X) := r - p^\wedge(S - X)$ $(X \subseteq S)$. Mivel $p^\wedge(S) = r$, így $b'(\emptyset) = 0$. A b' definíciójából világos, hogy metsző szubmoduláris, és (2.47) alapján $\mathcal{B}_b = \mathcal{B}_{b'}$.

Miután $\mathcal{B}_{b'}$ nemüres, a bázisaival definiált $M = (S, \mathcal{B}_{b'})$ matroid és a függetlenjeivel definiált $(S, \mathcal{F}_{b'})$ matroid ugyanaz. Emiatt M-ben egy F halmaz pontosan akkor független, ha minden $Z_0 \subseteq S$ halmazra $|F \cap Z_0| \leq b'(Z_0)$, azaz $|F \cap Z_0| \leq r - p^\wedge(S - Z_0)$. Ez a felső reszelt definíciója alapján azzal ekvivalens, hogy az $S - Z_0$ minden $\{Z_1, \ldots, Z_t\}$ partíciójára $|F \cap Z_0| \leq r - \sum_{i=1}^t p(Z_i) = r - \sum_{i=1}^t [r - b(S - Z_i)]$, ami épp (2.46). •

Gyakorlat 2.5.8 *A 2.2 szakaszban definiált keresztezés-mentes matroid miért speciális esete a fenti konstrukciónak?*

Feladat 2.5.9 *Vezessük le a 2.2.1 tételt a 2.5.12 tételből.*

Következmény 2.5.13 *Legyen p keresztező (speciálisan metsző) szupermoduláris, egészértékű halmazfüggvény, melyre $p(\emptyset) = 0$ és $r := p(S)$. Ekkor a*

$$\mathcal{B}'_p := \{B \subseteq S : |B| = r, |Y \cap B| \geq p(Y) \text{ minden } Y \subseteq S\text{-re}\} \tag{2.48}$$

halmazrendszer, amennyiben nemüres, kielégíti a bázisaxiómákat.

Biz. Könnyen ellenőrizhető, hogy a $b(X) =: r - p(S - X)$ halmazfüggvény keresztező szubmoduláris, továbbá, hogy egy r elemű B halmazra $|B \cap X| \geq p(X)$ ekvivalens a $|B \cap (S - X)| \leq r - p(X)$ egyenlőtlenséggel. Emiatt a (2.48) által definiált halmazrendszer éppen $\mathcal{B}_b$, így a 2.5.11 tétel valóban implikálja a következményt. •

A 2.5.11 tétel felveti a kérdést, hogy mi a feltétele $\mathcal{B}_b$ nemürességének. A választ bizonyítás nélkül közöljük.

TÉTEL 2.5.14 *Legyen $b \geq 0$ keresztező szubmoduláris, egészértékű halmazfüggvény, melyre $b(\emptyset) = 0$ és $r := b(S)$. A (2.44) által definiált $\mathcal{B}_b$ halmazrendszer akkor és csak akkor nemüres, ha S minden $\{S_0, S_1, \ldots, S_t\}$ partíciójára* (ahol egyedül S_0 lehet üres) $|S_0| + \sum_{i=1}^t b(S_i) \geq r$ *és S minden $\{S_1, \ldots, S_t\}$ partíciójára $\sum_{i=1}^t [r - b(S - S_i] \geq (t-1)r$.*

Egy rokon konstrukció a következő. A (p, b) párról azt mondjuk, hogy **keresztező paramoduláris**, ha p keresztező szupermoduláris, b keresztező szubmoduláris, és keresztező X, Y halmazokra érvényes az (1.10)-ban bevezetett $b(X) - p(Y) \geq b(X - Y) - p(Y - X)$ kereszt-egyenlőtlenség.

TÉTEL 2.5.15 *Legyen (p, b) keresztező paramoduláris pár, p és b egészértékűek. Legyen r pozitív egész. Ekkor a*

$$\mathcal{B}_{(p,b)} := \{B \subseteq S : |B| = r, p(Y) \leq |Y \cap B| \leq b(Y) \text{ minden } Y \subseteq S\text{-re}\} \tag{2.49}$$

halmazrendszer, amennyiben nemüres, kielégíti a bázisaxiómákat.

Biz. Definiáljuk a $b^* : 2^S \to \mathbf{Z}$ halmazfüggvényt a következőképp: $b^*(X) := \min\{b(X), r - p(S - X)\}$ ha X nemüres és $b^*(\emptyset) := 0$. Könnyen látszik, hogy b^* keresztező szubmoduláris függvény és hogy $\mathcal{B}_{b^*} = \mathcal{B}_{(p,b)}$, és így a 2.5.11 tétel alkalmazható. •

Feladat 2.5.10 *Igazoljuk az alábbi eredményt.*

TÉTEL 2.5.16 *Legyen (p, b) metsző paramoduláris pár, p és b egészértékűek. Legyen $r = b(S)$. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{B}_{(p,b)} := \{B \subseteq S : |B| = r, p(Y) \leq |Y \cap B| \leq b(Y)$ minden $Y \subseteq S$-re$\}$ halmazrendszer nemüres. Az $M = (S, \mathcal{B}_{(p,b)})$ matroidban egy F halmaz akkor és csak akkor független, ha S minden $\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_t\}$ részpartíciójára*

$$|F \cap Z_0| + \sum_{i=1}^t p(Z_i) \leq b(Z_0 \cup \ldots \cup Z_t). \tag{2.50}$$

2.6 ALKALMAZÁSOK, KÖVETKEZMÉNYEK, I

A szubmoduláris függvényekről szerzett ismeretekkel felvértezve gráfokhoz illetve hipergráfokhoz kapcsolódó újabb matroid konstrukciókat mutatunk be, összefüggőségekre vonatkozó érdekes alkalmazásokkal.

2.6.1 Fenyőpakolások gyökérzete

Az irányított $D = (V, E)$ gráf pontjainak egy k elemű B részhalmazát nevezzük k-**gyökérzet**nek, ha létezik D-ben k élidegen feszítő fenyő úgy, hogy a B minden pontja az egyiknek a gyökere. Hogyan lehet meghatározni egy minimális súlyú k-gyökérzetet, amikor D csúcsai súlyozva vannak? Szükségünk lesz Edmonds diszjunkt fenyő tételének gyenge alakjára, amelyet most bizonyítás nélkül közlünk.

TÉTEL 2.6.1 (Diszjunkt fenyő tétel) *Egy s gyökerű $D = (V, E)$ digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen s gyökerő feszítő fenyő, ha minden $X \subseteq V - s$ nemüres halmaz $\varrho(X)$ befoka legalább k.*

Ennek segítségével könnyen jellemezhetjük a k-gyökérzeteket.

Lemma 2.6.2 *Egy k elemű B halmaz akkor és csak akkor k-gyökérzet, ha $|X \cap B| \geq k - \varrho(X)$ fennáll minden $\emptyset \subset X \subseteq V$ halmazra.*

Biz. Egészítsük ki a digráfot egy új s ponttal, vezessünk egy-egy új élt s-ből B pontjaiba, majd a megnövelt digráfra alkalmazzuk a fenyő tételt. •

TÉTEL 2.6.3 *Ha egy $D = (V, E)$ digráfban létezik k-gyökérzet, akkor a k-gyökérzetek egy matroid bázisait képezik.*

Biz. Definiáljuk a p_k halmazfüggvényt: legyen $p_k(\emptyset) := 0$, és nemüres X-re $p_k(X) := k - \varrho(X)$. Mivel létezik k-gyökérzet, a 2.6.2 lemma miatt $p_k(X) \leq |X|$. Miután ϱ teljesen szubmoduláris, a p_k metszőn szupermoduláris. Tekintsük a 2.5.9 tételben szereplő M^{p_k} matroidot. Mivel $p_k(V) = k$, így minden generátor legalább k elemű, és a 2.6.2 lemma nyomán a k-gyökérzetek éppen a k elemű generátorok, vagyis a bázisok. •

A 2.6.3 tétel alapján a matroid mohó algoritmus alkalmazható a minimális súlyú k-gyökérzet kiszámítására. Így csak az a kérdés marad, hogy mikor létezik egyáltalán k-gyökérzet.

TÉTEL 2.6.4 *Egy $D = (V, E)$ digráfnak akkor és csak akkor van k-gyökérzete* (más szóval akkor és csak akkor létezik D-ben k élidegen feszítő fenyő, melyek gyökerei különbözőek)*, ha V minden nemüres X részhalmazára*

$$|X| \geq k - \varrho(X) \tag{2.51}$$

és minden $\{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$ részpartíciójára

$$\sum_i \varrho(X_i) \geq k(t-1). \tag{2.52}$$

Biz. A lemma miatt a (2.51) feltétel szükséges. Ha létezik k élidegen feszítő fenyő, akkor ezek mindegyike a t darab X_i halmaz közül legalább $t-1$-be belép, így az X_i halmazokba belépő élek össz-száma legalább $k(t-1)$, azaz (2.52) is szükséges.

A 2.6.3 tétel bizonyításában bevezetett p_k függvényre (2.51) miatt $p_k(X) \leq |X|$, így tekinthetjük a 2.5.9 tételben szereplő M^{p_k} matroidot. A 2.6.2 lemma folytán pontosan akkor létezik k-gyökérzet, ha az M^{p_k} matroid rangja k, ami a 2.5.9 tétel nyomán és $p_k(V) = k$ miatt azzal ekvivalens, hogy $\sum_i p_k(X_i) \leq k$ fennáll V minden $\{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciójára, ami viszont épp a (2.52) egyenlőtlenséggel ekvivalens. •

Feladat 2.6.1 *Adott $U \subseteq V$ ponthalmazhoz mikor létezik k különböző gyökerű élidegen feszítő fenyő, melyek gyökerei U-ban vannak?*

Feladat 2.6.2 *Tegyük fel, hogy a $D = (V, A)$ digráf gyökeresen k-élösszefüggő valamely s gyökérpontjára nézve. Az s-ből kilépő élek A_s halmazán definiáljunk egy matroidot, amelyben A_s egy részhalmaza akkor független, ha kihagyása nem rontja el a gyökeresen k-élösszefüggést. Igazoljuk, hogy így valóban matroidot kapunk. Mutassuk meg, hogy a matroid rangját a* $\max\{\sum[k - \varrho'(X_i)] : \{X_1, \ldots, X_q\}$ *a $V - s$ részpartíciója$\}$ képlet adja meg, ahol ϱ' a $D - s$ digráf befok függvényét jelöli.*

2.6.2 Irányított gráfok forráshalmazai

Legyen $D = (V, A)$ olyan irányított gráf, amelynek legalább $k+1$ csúcsa van és amelyben nincsenek egyirányú párhuzamos élek. A $Z \subseteq V$ halmazra és $v \in V$ csúcsra jelölje $\kappa^+(Z, v)$ a Z-ből v-be vezető (v-től eltekintve) diszjunkt irányított utak maximális számát. Nevezzünk egy Z halmazt k-**forrás**nak, ha $\kappa^+(Z, v) \geq k$ minden $v \in V - Z$ csúcsra fennáll. Eszerint V mindig k-forrás.

Hogyan lehet egy minimális elemszámú (vagy pontsúlyozott esetben egy minimális össz-súlyú) k-forrást meghatározni? Kimutatjuk, hogy a k-források komplementerei egy matroid független halmazait alkotják (azaz a k-források a duális matroid generátorai), és emiatt a mohó algoritmus alkalmazható a minimális súlyú k-forrás kiszámítására.

A Menger tétel irányított változatából közvetlenül kiolvasható az alábbi:

Állítás 2.6.5 *Egy Z halmaz pontosan akkor k-forrás, ha $|\Gamma^-(X)| \geq k$ fennáll minden nemüres $X \subseteq V - Z$ halmazra, ahol $\Gamma^-(X)$ jelöli azon $V - X$-beli pontok halmazát, melyekből vezet X-be él.* •

TÉTEL 2.6.6 *A k-források komplementerei egy matroid független halmazait alkotják. Más szóval a k-források egy matroid generátorait alkotják.*

Biz. Jelölje S a legalább k befokú pontok halmazát. Mivel egy k-forrás tartalmazza valamennyi k-nál kisebb befokú pontot, a k-források komplementerei részhalmazai lesznek az S-nek. Definiáljuk a $b : 2^S \to \mathbf{Z}$ halmazfüggvényt a következőképp. Legyen $b(\emptyset) = 0$ és

$$b(X) := |\Gamma^-(X)| + |X| - k, \text{ ha } X \neq \emptyset. \tag{2.53}$$

Lemma 2.6.7 *A b halmazfüggvény nemnegatív, monoton növő és metszőn szubmoduláris.*

Biz. Egy X-beli v pontra azon pontok, melyekből vezet él v-be, vagy X-ben vagy $\Gamma^-(X)$-ben vannak, másrészt e pontok száma legalább k, így b nemnegatív.

Legyen $X \subseteq Y \subseteq S$. Egy X-be belépő él töve vagy $Y - X$-ben van vagy $V - Y$-ban. Emiatt $|\Gamma^-(X)| \leq |\Gamma^-(Y)| + |Y - X|$, és ebből $|\Gamma^-(X)| + |X| \leq |\Gamma^-(Y)| + |Y|$ adódik, vagyis b valóban monoton növő.

A metsző szubmodularitás következik abból az ismert tényből, hogy a $|\Gamma^-(X)|$ függvény (teljesen) szubmoduláris. •

Tekintsük a 2.5.7 tételben szereplő $M = (S, \mathcal{F}_b)$ matroidot. Egy $I \subseteq S$ halmaz pontosan akkor független M-ben, ha minden X nemüres részhalmazra $b(X) \geq |X|$, azaz $|\Gamma^-(X)| \geq k$ fennáll. A b monotonitása folytán ezt valójában elég csupán az I részhalmazaira megkövetelni, ami viszont a 2.6.5 állítás alapján épp azzal ekvivalens, hogy a $V - I$ halmaz k-forrás. Ezzel beláttuk, hogy az M matroid független halmazai éppen a k-források komplementerei. •

TÉTEL 2.6.8 *A minimális k-forrás elemszáma $|V - S| + \max\{\sum_i [k - |\Gamma^-(X_i)|] : \{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciója S-nek$\}$, ahol S a legalább k befokú pontok halmaza.*

Biz. Tekintsük az S alaphalmazon a (2.53) függvényhez tartozó M_b matroidot. Ennek rangja a (2.38) képlet szerint $\min\{\sum_i b(X_i) + |S - \cup X_i| : \{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciója S-nek$\}$. A 2.6.6 tétel szerint a minimális k-források éppen az M_b matroid bázisainak (V-re vonatkozó) komplementerei, így egy minimális k-forrás elemszáma $|V| - \min\{\sum_i b(X_i) + |S - \cup X_i| : \{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciója S-nek$\} = |V - S| - \min\{\sum_i [|\Gamma^-(X_i)| - k + |X_i|] - |\cup X_i| : \{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciója S-nek$\} = |V - S| + \max\{\sum_i [k - |\Gamma^-(X_i)|] : \{X_1, \ldots, X_t\}$ részpartíciója S-nek$\}$. •

2.6.3 Merev gráfok

Legyen $G = (V, E)$ egy (nem feltétlenül síkbeli) összefüggő, egyszerű gráf, amelynek van éle. Az alábbiakban a V halmaz elemszámát n-nel fogjuk jelölni. Tegyük fel, hogy G csúcsait „általános helyzetben” elhelyeztük a síkon: a csúcsok koordinátái között nincs algebrai összefüggés, tehát nemcsak, hogy három pont nincs egy egyenesen, de például négy pont sincs egy körön. A gráf éleit merev rudakkal, a csúcsait pedig csuklókkal valósítjuk meg, amelyek körül az élek (a síkban) elfordulhatnak. A G-t akkor nevezzük **generikusan merev**nek vagy röviden **merev**nek, ha az így kapott csuklós szerkezet merev. Egy gráf **minimális merev**, ha merev, de bármely élét elhagyva már nem az. Például minden teljes gráf merev, a négypontú teljes gráf nem minimális merev, de ha egy élét kihagyjuk, akkor már az. Nyilván egy gráf pontosan akkor merev, ha tartalmaz minimális merev részgráfot (ugyanazon a csúcshalmazon). G. Laman az alábbi 2.6.9 tételben jellemezte a minimális merev gráfokat.

Természetesen a merevség fogalmának fenti leírása nem tekinthető definíciónak, inkább csak szemléletes érzetünk szóbeli megfogalmazása, ahhoz hasonlóan, ahogy egy függvényt folytonosnak „nevezünk”, ha „lerajzolható a ceruza felemelése nélkül”. Ahogy ezen utóbbi intuitív kép helyett egy azt megragadni igyekvő matematikai definíciót használunk a folytonosság fogalmára, ugyanúgy a merevség szemléletes képe is megfogható matematikai definícióval. Mivel ez némileg bonyolultabb (egy bizonyos algebrailag független számokból álló mátrix rangjára ír elő alsó korlátot) és a matroidelméleti alkalmazást nem is érinti, így ismertetésétől eltekintünk. (Annak érzékeltetésére, hogy az óvatosság indokolt, jó példa a $K_{3,3}$ gráf, amely merev ugyan, de ha csúcsait nem általános helyzetben helyezzük el a síkban, akkor a kapott rúdszerkezet nem feltétlenül merev. Tekintsük például a $K_{3,3}$-nak azt az elhelyezését, amikor valamelyik 6 élű köre egy szabályos hatszöget alkot a síkban, a maradék három él pedig a hatszög három főátlója: ez a rúdszerkezet nem merev. Magyarul, egy gráf önmagában nem határozza meg, hogy egy belőle készült rúdszerkezet merev-e vagy sem, mert a válasz függhet a csúcsok konkrét elhelyezésétől).

Mindenesetre amikor arról beszélünk, hogy Laman tétele jellemzést ad a minimális merev gráfokra, akkor ez a jellemzés a merevség itt nem közölt formális definíciójára vonatkozik. Viszont a Laman tételre támaszkodva, matroidok segítségével majd meg tudjuk már határozni, hogy egy gráf mikor merev, azaz mikor tartalmaz minimális merev feszítő részgráfot. Lássuk tehát Laman tételét.

TÉTEL 2.6.9 (Laman) *Egy $G = (V, E)$ egyszerű gráf akkor és csak akkor minimális merev, ha*

$$|E| = 2n - 3 \tag{2.54}$$

és

$$i_G(Z) \leq 2|Z| - 3 \text{ minden } Z \subseteq V,\ |Z| \geq 2\text{-re}, \tag{2.55}$$

ahol $i_G(Z)$ a Z által feszített élek számát jelöli.

Laman tétele a minimális merev gráfoknak egy co-NP jellemzését adja: ha egy gráf nem minimális merev, arra létezik könnyen ellenőrizhető bizonyíték. Az olvasó szíves tájékoztatásául, bizonyítás nélkül közlünk egy NP-jellemzést is, amelynek segítségével könnyen gyárthatunk minimális merev gráfokat.

TÉTEL 2.6.10 (Henneberg) *Egy $G = (V, E)$ egyszerű összefüggő gráf akkor és csak akkor minimális merev, ha az alábbi két művelet segítségével felépíthető az egyélű gráfból:*

(i) *egy új pontot kössünk össze két* (különböző) *meglévő ponttal,*

(ii) *egy meglévő uv élt osszunk fel egy új z ponttal és z-t kössük össze egy u-tól és v-től különböző meglévő ponttal.* •

A minimális merev gráfok Laman-féle jellemzésének ismeretében hogyan lehet leírni a merev gráfokat? Ha a gráf nem merev, minimálisan hány új él hozzáadásával tehető merevvé? Ezekre a kérdésekre azért fogunk tudni jó válaszokat adni, mert a merevség mögött matroidos struktúra húzódik meg. Jelölje $G^* = (V, E^*)$ a teljes gráfot V-n. Az E^* élhalmazon vezessük be a b^* halmazfüggvényt a következőképpen. Legyen $b^*(\emptyset) = 0$ és $\emptyset \subset F \subseteq E^*$-ra legyen

$$b^*(F) := 2|V(F)| - 3, \tag{2.56}$$

ahol $V(F)$ jelöli az F-ben lévő élek végpontjainak halmazát. Nyilvánvalóan b^* monoton növő és értéke az egyelemű halmazon 1. Könnyen ellenőrizhető, hogy b^* metsző szubmoduláris, így alkalmazhatjuk a 2.5.7 tételt. Ennek utolsó része szerint $\mathcal{F}_b := \{I \subseteq E : |Y| \leq b(Y) \text{ minden } Y \subseteq I\text{-re}\}$ egy M^*-gal jelölt matroid függetlenjeinek halmazát alkotja, amelynek rangfüggvénye $r^*(X) = (b^*)^\vee(X)$, $X \subseteq E$, ahol $(b^*)^\vee$ jelöli a b^* alsó reszeltjét. Az M^* megszorítását $E \subseteq E^*$-re a $G = (V, E)$ gráf **merevségi matroid**jának nevezzük, és M_G-vel jelöljük.

Jelölje a Z által feszített G-beli élek halmazát $I_G(Z)$. Könnyen ellenőrizhetően a (2.55) feltétel ekvivalens az alábbival:

$$|F| \leq b^*(F) \text{ minden } F \subseteq E\text{-re}. \tag{2.57}$$

Valóban, a (2.55) feltételt megkapjuk (2.57)-ból, ha azt az $F := I_G(Z)$ halmazra írjuk fel, és megfordítva, egy $F \subseteq E$ élhalmaz esetén (2.55)-t $Z := V(F)$-re alkalmazva (2.57)-t kapjuk: $|F| \leq i_G(Z) \leq 2|Z| - 3 = b^*(F)$.

Ezek alapján egy $G = (V, E)$ gráf pontosan akkor minimális merev, ha $|E| = 2n - 3$ és M_G a szabad matroid. Továbbá, $G = (V, E)$ pontosan akkor merev, ha merevségi matroidjának rangja $2n - 3$, és ha G merev, akkor merevségi matroidjának bázisai éppen G minimális merev részgráfjai. Ezekből kiolvasható a következő két tétel.

TÉTEL 2.6.11 *Egy merev $G = (V, E)$ gráf minimális merev részgráfjai egy matroid* (nevezetesen M_G) *bázisait alkotják, más szóval egy merev gráf merev részgráfjai egy matroid generátorait alkotják.* •

TÉTEL 2.6.12 (Lovász és Yemini) *Egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor merev, ha $r(M_G) = 2n - 3$, azaz E minden $\{E_1, \ldots, E_k\}$ partíciójára*

$$\sum_i b^*(E_i) \geq 2n - 3. \tag{2.58}$$

Ha G nem merev, akkor azon élek minimális száma, melyek hozzáadásával G merevvé tehető, egyenlő a

$$2n - 3 - \min\{\sum_i b^*(E_i) : \{E_1, \dots, E_k\} \text{ partíciója } E\text{-nek}\} \tag{2.59}$$

értékkel.

Biz. Az első rész következik a fenti okfejtésből. A második rész azon múlik, hogy az M^* matroid bármely $E \subset E^*$ halmaza $r^*(E^*) - r^*(E) = (2n-3) - r^*(E)$ elem hozzávételével $r^*(E^*) = 2n-3$ rangúvá bővíthető. •

A merevség algoritmikusan

Hogyan lehet eldönteni algoritmikusan, hogy egy gráf merev-e vagy sem? Ha egy gráf merev, és éleinek adott egy nemnegatív súlyozása, miként lehet egy minimális összsúlyú merev részgráfját kiszámítani? Mindkét kérdésre tudunk felelni, ha az M_G matroidnak meg tudjuk határozni egy minimális súlyú bázisát. Ez pedig a 2.5.3 szakaszban leírt mohó algoritmus segítségével történhet, miután egy (2.43)-t eldöntő szubrutin most előállítható. Ehhez tekintsük az éleket valamely $e_1, \dots, e_m$ sorrendben. Feltesszük, hogy egy $F \subseteq \{e_1, \dots, e_i\}$ független halmaz már adott.

Lemma 2.6.13 *Az $F' := F + e_{i+1}$ halmaz akkor és csak akkor független M_G-ben, ha a (V, F) gráfnak van olyan irányítása, amelyben minden pont befoka legfeljebb 2 és az $e_{i+1} = uv$ él végpontjainak befoka nulla.*

Biz. Tegyük fel először, hogy létezik a kívánt irányítás, melynek befok függvényét jelölje ϱ. Legyen $Z \subseteq V$. Amennyiben u és v valamelyike nincs Z-ben, úgy $2|Z| - 3 \geq |I_G(Z) \cap F| = |I_G(Z) \cap F'|$. Ha u is és v is benne van Z-ben, akkor $|I_G(Z) \cap F'| - 1 = |I_G(Z) \cap F| = \sum_{v \in Z} \varrho(v) - \varrho(Z) \leq \sum_{v \in Z} \varrho(v) \leq 2(|Z| - 2)$, amiből $|I_G(Z) \cap F'| \leq 2|Z| - 3$. Tehát mindkét esetben F' független M_G-ben.

A megfordításhoz tegyük fel, hogy F' független M_G-ben, azaz minden nemüres $Z \subseteq V$-re $|I_G(Z) \cap F'| \leq 2|Z| - 3$. Jelölje $g : V \to \mathbf{Z}$ azt a függvényt, amelyre $g(u) = g(v) = 0$ és minden más w pontra $g(w) = 2$. A gráfelméletben tanult fokszám korlátos irányítási tétel miatt, ha a (V, F) gráfnak nem létezik olyan irányítása, amelyben minden z csúcs befoka legfeljebb $g(z)$, akkor van olyan $Z \subseteq V$ halmaz, amelyre $|I_G(Z) \cap F| > g(Z)$. Most $g(Z) + 1 \leq |I_G(Z) \cap F| \leq |I_G(Z) \cap F'| \leq 2|Z| - 3 \leq g(Z) + 1$, így végig egyenlőség van. Eszerint egyrészt $g(Z) = 2|Z| - 4$, és így u is és v is Z-ben van, másrészt $|I_G(Z) \cap F| = |I_G(Z) \cap F'|$, és így u és v valamelyike nincs Z-ben, ellentmondás. •

Emlékeztetőül álljon itt az irányítási algoritmus a fenti konkrét g-re adaptálva. Tegyük fel, hogy már rendelkezésünkre áll az F-nek egy jó $D = (V, \vec{F})$ irányítása (azaz minden pont befoka legfeljebb 2). Ezt kell átalakítani egy másik jó irányítássá, amelyben az $e_{i+1} = uv$ él két végpontja 0 befokú. Tegyük fel először, hogy u befoka pozitív. Szélességi kereséssel keressük meg azon pontok Z halmazát, melyekből u irányított úton elérhető. Ekkor Z-be nem lép él. Létezik $r \in Z - u$ csúcs, amelyre $\varrho(r) < 2$, mert különben $2|Z| - 3 \geq |I_G(Z) \cap F| = \sum_{v \in Z} \varrho(v) - \varrho(Z) = \sum_{v \in Z} \varrho(v) \geq 2|Z| - 1$. Egy r-ből u-ba vezető utat megfordítva továbbra is minden pont befoka legfeljebb 2 és u befoka csökkent. Így legfeljebb két útkereséssel elérjük, hogy $\varrho(u) = 0$. További két útkereséssel vagy sikerül v-t is nulla befokúvá tennünk az u 0 befokának megtartásával, és ekkor e_{i+1}-t F-hez adjuk tetszőlegesen irányítva, vagy pedig találunk egy u-t is és v-t is tartalmazó Z halmazt, amelyre $|I_G(Z) \cap F| = 2|Z| - 3$, mely esetben e_{i+1}-t nem vesszük F-hez.

Feladat 2.6.3 *Igazoljuk, hogy egy $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor nem létezik két élidegen egymást feszítő* (legalább egy élű) *fa, ha G merevségi matroidja a szabad matroid* (azaz, ha minden legalább kételemű $X \subseteq V$ halmazra $i_G(X) \leq 2|X| - 3$).

2.6.4 Hipergrafikus matroid

Most megmutatjuk, hogy a grafikus matroid fogalma miként terjeszthető ki hipergráfokra. Egy hipergráfot akkor nevezünk **erdő-reprezentálható**nak vagy röviden **erdős**nek, ha minden hiperéléből kiválasztható két (különböző) elem úgy, hogy a kiválasztott párok, mint gráfélek, erdőt alkotnak. Egy gráf nyilván pontosan akkor erdős, ha erdő. Belátjuk majd, hogy egy hipergráf erdős részhipergráfjai egy matroid függetlenjeit alkotják. Előbb azonban jellemezzük az erdős hipergráfokat.

TÉTEL 2.6.14 (Lovász) *Egy $H = (V, \mathcal{I})$ hipergráf akkor és csak akkor erdős, ha erősen teljesíti a Hall feltételt, azaz hiperéleinek bármely $j \geq 1$ tagú halmazának egyesítése legalább $j + 1$ pontot tartalmaz.*

Biz. A feltétel szükségessége kézenfekvő, így csak az elegendőségének bizonyításával foglalkozunk. A Hall tétel szerint mindenesetre $\mathcal{I}$-nek van reprezentáns rendszere, azaz létezik egy olyan $f : \mathcal{I} \to V$ leképezés, amelyre $X, Y \in \mathcal{I}, X \neq Y$ esetén $f(X) \neq f(Y)$. Jelölje R azon V-beli pontok halmazát, melyek nem reprezentálnak hiperélt. Készítsünk el egy irányított gráfot V-n úgy, hogy minden $X \in \mathcal{I}$ hiperélre az $X - f(x)$ minden pontjából vezessünk élt $f(X)$-be.

Jelölje Z az R halmazból irányított úton nem elérhető csúcsok halmazát. Amennyiben Z üres, azaz minden pont elérhető, úgy a digráfban létezik egy R gyökérhalmazú fenyves, és ez a hipergráf éleinek épp egy erdő-reprezentációját jelenti. Ha viszont Z nemüres, akkor minden olyan X hiperél, melynek $f(X)$ reprezentánsa Z-ben van, teljesen Z-ben fekszik, hiszen a digráfban nem lép Z-be él, és így ezen $|Z|$ darab hiperél egyesítése $|Z|$ elemű, megsértvén az erős Hall feltételt. •

Megjegyzés. Lovász a fenti tételét valójában általánosabb alakban bizonyította, bár fő motivációja a közölt speciális eset volt, mert ebből rögtön következett Erdősnek az a korábbi sejtése, miszerint egy hipergráfra, ha teljesül az erős Hall feltétel, akkor a hipergráf pontjai 2-színezhetők úgy, hogy minden hiperélben előforduljon mindkét szín. (Valóban, vegyük a hipergráfnak egy erdő reprezentációját. Miután egy erdő páros gráf, így pontjai kettő színezhetők.)

Feladat 2.6.4 *Igazoljuk, hogy egy erős Hall feltételnek eleget tevő hipergráf pontjai két színnel színezhetők úgy, hogy ne keletkezzen egyszínű hiperél.*

TÉTEL 2.6.15 *Egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf erdős részhipergáfjai egy matroid független részhalmazait alkotják.*

Biz. Ha $\mathcal{K}$ hiperéleknek egy halmaza, akkor jelölje $\gamma(\mathcal{K})$ a $\mathcal{K}$-beli hiperélek uniójának elemszámát. Nevezzünk körnek egy olyan $(V, \mathcal{C})$ hipergráfot, amely nem erdős, de bármely részhipergráfja az. Ekkor a 2.6.14 tétel miatt $\gamma(\mathcal{C}) = |\mathcal{C}|$, míg $\emptyset \subset \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ esetén $\gamma(\mathcal{C}') \geq |\mathcal{C}'| + 1$. Belátjuk, hogy a körök teljesítik a köraxiómákat.

Egy kör valódi része nyilván független. Legyen most $\mathcal{C}_1$ és $\mathcal{C}_2$ két kör, és Z a metszetüknek egy eleme. Ekkor $|\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| = \gamma(\mathcal{C}_1) + \gamma(\mathcal{C}_2) \geq \gamma(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) + \gamma(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \geq |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2| + 1 + \gamma(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$, amiből $\gamma(\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2) \leq |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| - |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2| - 1 = |\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2| - 1$ és emiatt $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 - \{Z\}$ nem teljesíti az erős Hall feltételt, azaz nem független és így tartalmaz kört. •

A tételben szereplő matroidot a hipergráf **körmatroid**jának hívjuk, az így előálló matroidokat pedig **hipergrafikus matroid**nak.

Feladat 2.6.5 *Igazoljuk, hogy a hipergrafikus matroid összehúzottja nem feltétlenül hipergrafikus.* (Tanács: Vegyük azt az 5 pontú hipergráfot, amelynek az élei az ötpontú teljes gráf élei plusz még egy hiperél, amely mind az öt csúcsot tartalmazza. Ennek hipergrafikus matroidjában a nagy hiperélt összehúzva a keletkező matroid nem lesz hipergrafikus.)

A hipergrafikus matroid rangfüggvénye

Mi a hipergrafikus matroid rangfüggvénye? Gráfok esetén a válasz egyszerű volt: a feszített csúcsok száma minusz a komponensek száma. Az általános eset szükségképpen bonyolultabb, hiszen csak a függetlenség eldöntéséhez (vagyis, hogy egy hipergráf erdős-e) kellett Lovász 2.6.14 tétele. A rangfüggvény meghatározásához a kulcs az, hogy a hipergrafikus matroid alternatív módon származtatható a 2.5.8 tételben megfogalmazott konstrukció segítségével is. Az elfajult esetek elkerülése érdekében feltesszük, hogy minden hiperél legalább kételemű (de azt megengedjük, hogy egy hiperél több „párhuzamos” példányban is szerepeljen.)

A H hipergráfhoz (a szokásos módon) hozzárendelhetünk egy $G_H = (V, U; F)$ páros gráfot, ahol U elemei a hipergráf éleinek felelnek meg (és így $|U| = |\mathcal{E}|$) és egy $K \in \mathcal{E}$ hiperélnek megfeleltetett $u_K \in U$ csúcs akkor van egy $v \in V$ csúccsal összekötve, ha v benne van K-ban. Hiperélek egy $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$ részhalmazának megfelelő ponthalmazt $U_{\mathcal{F}}$-fel jelöljük (speciálisan $U_{\mathcal{E}} = U$), míg egy $X \subseteq U$ ponthalmaznak megfelelő hiperélek halmazát $\mathcal{E}_X$-szel. Az $\mathcal{F}$-ben lévő hiperélek unióját jelöljük $\cup\mathcal{F}$-fel. Tetszőleges $X \subseteq U$ részhalmazra jelölje $\Gamma(X)$ az X szomszédainak halmazát G_H-ban (így tehát $\Gamma(X) = \cup\mathcal{E}_X$). A V tetszőleges $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_t\}$ partíciójára és $X \subseteq U$-ra legyen $e_X(\mathcal{P})$ azon X-beli pontok száma, melyeknek legalább két partíció-részbe esik szomszédjuk. Hasonlóképp, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$-re $e_{\mathcal{F}}(\mathcal{P})$ jelöli azon $\mathcal{F}$-beli hiperélek számát, melyek legalább két partíció részt metszenek.

Az alábbiakban néha nem teszünk különbséget az $\mathcal{E}$ és az U halmazok között. Definiáljuk a $b_H : 2^U \to \mathbf{Z}_+$ halmazfüggvényt a következőképpen. Nemüres X-re legyen

$$b_H(X) = |\Gamma(X)| - 1, \tag{2.60}$$

és legyen $b_H(\emptyset) = 0$. Ekkor b_H (monoton növő) metsző szubmoduláris halmaz-függvény.

TÉTEL 2.6.16 *A* 2.5.7 *tételben a $b := b_H$ által definiált matroid éppen a H körmatroidja.*

Biz. Egy $I \subseteq U$ halmaz akkor független, ha minden $X \subseteq U$ halmazra $|I \cap X| \leq b_H(X)$. A b_H monotonitása miatt ezt elég csak az I részhalmazaira megkövetelni, azaz $|X| \leq b_H(X)$ minden $X \subseteq I$-re. Ez pedig épp azt jelenti, hogy a $(V, \mathcal{E}_X)$ részhipergráf a Hall feltételt erősen teljesíti, és így erdős. •

Jelölje a H hipergráf körmatroidjának rangfüggvényét r_H. Ezt könnyű volt felírni abban a speciális esetben, amikor H gráf. Általános hipergráf esetén a válasz már bonyolultabb.

TÉTEL 2.6.17 *A H hipergráf körmatroidjának r_H rangfüggvényére a következő formula érvényes:*

$$r_H(Z) = \min\{|V| - |\mathcal{P}| + e_Z(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partíciója } V\text{-nek}\}, \tag{2.61}$$

ahol $e_Z(\mathcal{P})$ jelöli azon Z-beli pontoknak megfelelő hiperélek számát, melyek legalább két partíció-részt metszenek.

Biz. Elég a képletet a $Z = U$ speciális esetre igazolnunk, hiszen $e_Z(\mathcal{P})$ értéke nem változik, ha a G_H reprezentáló páros gráfból kihagyjuk az $U - Z$-beli pontokat.

Legyen $H' = (V, \mathcal{E}')$ a H-nak egy erdős részhipergráfja (más szóval $U_{\mathcal{E}'}$ az M_H matroid egy független részhalmaza). Ekkor V-nek tetszőleges $\mathcal{P}$ partíciójára H'-ben legfeljebb $|V| - |\mathcal{P}|$ olyan hiperél létezhet, amely teljesen egy partíció részbe esik, így $|\mathcal{E}'|$ legfeljebb $|V| - |\mathcal{P}|$ plusz a köztes hiperélek $e_{\mathcal{E}'}(\mathcal{P})$ száma, vagyis $r_H(\mathcal{E}) \leq |V| - |\mathcal{P}| + e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P})$. A tétel igazolásához egy olyan partíció létezését kell kimutatnunk, amelyre itt egyenlőség teljesül.

Alkalmazva a (2.35) képletet, kapjuk, hogy $r_H(U) = \min\{\sum_i b_H(Z_i) + |U - \cup Z_i| : \{Z_1, \dots, Z_l\}$ részpartíciója U-nak$\}$. Tekintsünk egy olyan $\{Z_1, \dots, Z_l\}$ részpartícióját U-nak, amelyen a minimum felvétetik és az l a lehető legkisebb.

Állítjuk, hogy $\Gamma(Z_i) \cap \Gamma(Z_j) = \emptyset$ minden $1 \leq i < j \leq l$ index párra. Valóban, miután Z_i és Z_j diszjunktak, $|\Gamma(Z_i \cup Z_j)| = |\Gamma(Z_i)| + |\Gamma(Z_j)| - |\Gamma(Z_i) \cap \Gamma(Z_j)|$ mindig fennáll. Mármost, ha $\Gamma(Z_i) \cap \Gamma(Z_j) \neq \emptyset$, akkor $|\Gamma(Z_i \cup Z_j)| \leq |\Gamma(Z_i)| + |\Gamma(Z_j)| - 1$, és így $b_H(Z_i \cup Z_j) \leq b_H(Z_i) + b_H(Z_j)$. Ez viszont lehetetlen, mert ha a Z_i és Z_j halmazokat helyettesítjük az uniójukkal, akkor $U_{\mathcal{E}}$-nek egy másik minimalizáló részpartícióját kapjuk, amelynek l-nél kevesebb tagja van.

Állítjuk továbbá, hogy semelyik $u \in U_{\mathcal{E}} - \cup Z_i$ csúcsra sem lehet $\Gamma(u) \subseteq \Gamma(Z_i)$. Ebben az esetben ugyanis a $Z_i' := Z_i + u$ halmazra $\Gamma(Z_i') = \Gamma(Z_i)$ állna, és ekkor Z_i-t helyettesítve a $Z_i' := Z_i + u$ halmazzal, egy olyan részpartícióját kapnánk $U_{\mathcal{E}}$-nek, amelynek b_H-összege változatlan, de a partíció részek uniója nagyobb, ellentmondásban a $\{Z_i\}$ részpartíció minimalizáló voltával.

Tekintsük, most V-nek azt a $\mathcal{P}$ partícióját, amely a $\Gamma(Z_i)$ páronként diszjunkt halmazokból, valamint a $V - \cup(\Gamma(Z_i))$ halmaz elemeiből, mint egyelemű halmazokból áll. Ezen partícióra vonatkozó köztes hiperélek $e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P})$ száma, vagyis U azon pontjainak száma, melyeknek legalább két partíció-részben van szomszédjuk, éppen $|U - \cup Z_i|$. Figyeljük meg, hogy $|\mathcal{P}| = l + |V - \cup\Gamma(Z_i)|$, és így $r_H(\mathcal{E}) = \sum_i^l b_H(Z_i) + |U - \cup Z_i| = \sum_i^l [\Gamma(Z_i) - 1] + e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) = \sum_i^l |\Gamma(Z_i)| - l + e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) = |V| - |\mathcal{P}| + e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P})$. •

Hipergráf partíció-összefüggősége

Egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfot akkor neveznek **összefüggő**nek, ha az alaphalmazt akárhogy felbontva két nemüres részre van olyan hiperél, amely mindkét részt metszi. Könnyen láthatóan ez azzal ekvivalens, hogy a hipergráfhoz tartozó páros gráf összefüggő. Ez az összefüggőségi fogalom kézenfekvő és hasznos, de nem teljesen elégíti ki a szemléletes összefüggőségi érzetünket: ha egy hipergráfnak például az alaphalmazból álló egyetlen hiperéle van, akkor egyetlen hiperél elhagyásával a hipergráf nagyon sok részre esik szét. Olyan fogalmat szeretnénk bevezetni, amelyben kevés hiperél elhagyásával nem keletkezik sok komponens.

A H hipergráf pontjainak $\mathcal{P} = \{V_1, \dots, V_t\}$ partíciójára a partíció **határ**án azon hiperélek halmazát értjük, melyek legalább két partíció-részt metszenek. Egy hipergráfot akkor nevezünk **partíció-összefüggő**nek, ha bármely t részes partíciójának határa legalább $t-1$ hiperélt tartalmaz. Könnyen láthatóan ez azzal ekvivalens, hogy i hiperél elhagyásával legfeljebb $i+1$ összefüggő komponens keletkezik. Megjegyzendő, hogy gráf esetén az összefüggőség és a partíció-összefüggőség fogalma egybeesik.

Következmény 2.6.18 *Egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf akkor és csak akkor partíció-összefüggő, ha körmatroidjának rangja $|V| - 1$, vagyis ha H-nak van $|V| - 1$ hiperéle, amelyekből kiválasztható két-két elem úgy, hogy a kiválasztott elempárok, mint gráfélek egy feszítő fát alkotnak.*

Biz. Definíció szerint $r_H(\mathcal{E}) \leq |V| - 1$ és a (2.61) formulából adódóan pontosan akkor áll egyenlőség, ha V minden $\mathcal{P}$ partíciójára $|V| - |\mathcal{P}| + e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) \geq |V| - 1$, azaz $e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) \geq |\mathcal{P}| - 1$, ami viszont épp H partíció-összefüggőségével ekvivalens. •

Feladat 2.6.6 *Dolgozzunk ki algoritmust annak eldöntésére, hogy egy hipergráf partíció-összefüggő-e.*

A 4.2.3 szakaszban a partíció-összefüggőség általánosításaként be fogjuk vezetni a k-partíció-összefüggő hipergráfok fogalmát, és ennek segítségével jellemezzük majd azon hipergráfokat, amelyek felbonthatók k darab partíció-összefüggő hipergráfra.

2007. május 6. ulmat26

3. Fejezet

MATROID METSZET

Egy alaphalmazon adott k matroid. Milyen nagy lehet egy olyan halmaz, amely mind a k matroidban független?

Gyakorlat 3.0.7 *Igazoljuk, hogy irányított gráf Hamilton útjának létezése megfogalmazható, mint három matroid maximális közös független részhalmazának megkeresése.*

Miután a Hamilton út probléma NP-teljes, sem elegáns formula nem várható k matroid maximális közös független részhalmazának elemszámára, ha kettőnél több matroid van, sem hatékony megoldó algoritmus. Kerek válaszra csak két matroid esetén van esély. Az alapvetően J. Edmonds által kidolgozott elmélet centrális szerepet játszik a matroidok alkalmazásában mind az elvi, mind az algoritmikus vonalon.

A továbbiakban tehát két matroid van adva. Egy halmazt **közös független**nek nevezünk, ha mindkét matroidban független. A matroid metszet probléma két matroid maximális elemszámú (általánosabban maximális súlyú) közös független halmazának meghatározását célozza.

Feladat 3.0.8 *Fogalmazzuk meg következő problémákat mint két matroid maximális közös függetlenjének feladata:*

Keressünk páros gráfban maximális párosítást. Általánosabban, keressünk minden pontban előírt fokszámú részgráfot.

Keressünk irányított gráfnak olyan részgráfját, amelynek befokai és kifokai minden pontban adott alsó és felső korlátok közé esnek.

Keressünk gráfban olyan feszítő fát, amely egy megadott pontban adott fokszámú. Általánosabban, keressünk olyan feszítő fát, amelynek fokszámai egy adott stabil halmaz minden pontjában alsó és felső korlátoknak tesznek eleget.

Keressünk irányított gráfban maximális élszámú fenyvest (vagyis olyan erdőt, amelyben minden pont befoka legfeljebb 1).

3.1 KÖZÖS FÜGGETLEN HALMAZOK

Ebben a szakaszban megismerkedünk a maximális közös független halmaz elemszámára vonatkozó Edmonds féle metszettétellel. Ennek speciális esete és előfutára a 2.4 részben már megismert Rado tétel, amelyre most két további bizonyítás technikát is bemutatunk.

TÉTEL 3.1.1 (Rado) *Legyen $M = (S, r)$ matroid. A $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik T-t fedő M-független párosítás, ha minden $X \subseteq T$ esetén teljesül a Rado-féle feltétel, azaz*

$$r(\Gamma(X)) \geq |X|. \tag{3.1}$$

2. Biz. Szükségünk lesz egy egyszerű észrevételre. Egy $X \subseteq T$ halmazt akkor neveztünk pontosnak, ha $r(\Gamma(X)) = |X|$.

Állítás 3.1.2 *Két pontos halmaz metszete és uniója is pontos.*

Biz. Legyen X, Y pontos. Ekkor $|X| + |Y| = r(\Gamma(X)) + r(\Gamma(Y)) \geq r(\Gamma(X \cap Y)) + r(\Gamma(X \cup Y)) \geq |X \cap Y| + |X \cup Y| = |X| + |Y|$, amiből következik, hogy mindegyik becslés egyenlőséggel teljesült és így $r(\Gamma(X \cap Y)) = |X \cap Y|$, $r(\Gamma(X)) = |X \cup Y|$. •

A Rado feltétel elegendőségét bizonyítjuk, élszám szerinti indukcióval. Tegyük fel először, hogy T minden pontjának a foka G-ben 1. Ekkor a gráf E élhalmaza maga egy T-t fedő párosítás, hiszen a feltételből adódóan bármely két T-beli pontnak van két különböző szomszédja. A Rado feltétel miatt $|T| = |\Gamma(T)| \geq r(\Gamma(T)) \geq |T|$, amiből $r(\Gamma(T)) = |T|$, és így $\Gamma(T)$, azaz a P párosítás által fedett S-beli pontok halmaza független a matroidban.

Legyen most $t \in T$ egy olyan pont, aminek van két szomszédja S-ben: u és v. Akár a tu élt, akár a tv élt törölve a gráfból, feltehetjük, hogy a Rado feltétel már megsérül, különben indukció miatt készen volnánk.

Ha a tu él törlése után valamely $X \subseteq T$-re a Rado feltétel már nem áll fenn, akkor $|X| \leq r(\Gamma(X)) \leq r(\Gamma(X) - u) + 1 \leq |X|$, amiből végig egyenlőség következik. Ez egyrészt azt jelenti, hogy $|X| = r(\Gamma(X))$, azaz X pontos, másrészt azt, hogy $r(\Gamma(X)) - 1 = r(\Gamma(X) - u)$, vagyis az u elem $\Gamma(X)$-nek minden maximális függetlenjében benne van (másszóval az u elem a $\Gamma(X)$ hídja), harmadrészt pedig azt, hogy u-nak a t az egyedüli szomszédja X-ben.

Az előbbi állításból tudjuk, hogy pontos halmazok metszete is pontos, így létezik egy legszűkebb $P \subseteq X$ pontos halmaz, amely tartalmazza a t elemet. Miután u hídja $\Gamma(X)$-nek, így hídja az ennél szűkebb (vagy egyenlő) $Y := \Gamma(P)$-nek is, és persze u-nak a t az egyedüli szomszédja P-ben. Ugyanezen állítások érvényesek u helyett v-re is. Így az Y-nak mind u, mind v elvágó eleme. Ekkor viszont elhagyásuk kettővel csökkenti Y rangját. (Valóban, $r(Y) - 1 + r(Y) - 1 = r(Y - u) + r(Y - v) \geq r(Y - u - v) + r(Y)$, amiből $r(Y) - 2 \leq r(Y - u - v) \leq r(Y) - 2$ és így $r(Y - u - v) = r(Y) - 2$.)

De most $P' = P - t$ olyan halmaz, amelyre $r(\Gamma(P')) \leq r(\Gamma(P) - \{u, v\}) = r(\Gamma(P)) - 2 = |P| - 2 = |P'| - 1$, ellentmondásban a feltevéssel. • •

3. Biz. Elég a tételt arra a speciális esetre igazolni, amikor minden S-beli pont első fokú, mert egy k-ad fokú s pontot a gráfban helyettesíthetünk k első fokú ponttal, melyek a matroidban az s párhuzamos többszörözésének felelnek meg. Feltehető, hogy M-ben nincs hurok. Indukcióval feltehetjük, hogy létezik egy $|T| - 1$ elemszámú P^- párosítás, amelynek S-beli F végponthalmaza független M-ben. Legyen $t \in T$ a fedetlen elem és s ennek egy szomszédja. Amennyiben $F + s$ független M-ben, úgy $P^- + st$ független T-t fedő párosítás.

Tehát $F + s$ függő. Legyen C az $F + s$ egyetlen köre. Legyen M' a C összehúzásával keletkező matroid és legyen $C' = \Gamma_P(C) + t$. $G' = (S', T'; E')$ az a gráf, amely a G-ből keletkezik azáltal, hogy a C' elemeit egyetlen c' csúccsá húzzuk össze míg a C elemeit kihagyjuk.

Állítjuk, hogy G'-re és M'-re teljesül a Rado feltétel. Valóban, ha P' jelöli a P^- párosítás $S - C'$-t fedő részét, akkor a konstrukció miatt P' független párosítás M'-re nézve is, tehát a Rado feltételt csak egy c'-t tartalmazó $X' = X + c'$ halmaz tudná megsérteni ($X \subseteq S - C'$). Ez viszont nem tudja, hiszen $X \cup C'$-re használva a G-re vonatkozó Rado feltételt azt kapjuk, hogy $r'(\Gamma'(X')) = r(\Gamma(X \cup C')) - r(C) \geq |X \cup C'| - (|C| - 1) = |X| + 1 = |X'|$.

Indukcióval G'-ben létezik T'-t fedő M'-re nézve független párosítás, amiből a konstrukció miatt kiolvasható egy G-beli T-t fedő független párosítás. •

Ez a bizonyítás polinomiális algoritmust is ad, amely nem más, mint az ismert javító utas algoritmus kiterjesztése.

A Hall tétellel analóg módon, a Rado tételt is meg lehet fogalmazni egy másik, ekvivalens alakban.

TÉTEL 3.1.3 *Legyen adott az $M = (S, r)$ matroid, valamint egy k halmazból álló $\mathcal{T} := \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ halmaz-rendszer. Akkor és csak akkor lehet a T_i halmazok egy-egy elemét úgy kiválasztani, hogy a kiválasztott elemek különbözőek legyenek és a matroidban (k-elemű) független halmazt alkossanak, ha bárhogyan is véve $\mathcal{T}$-ből j halmazt ($1 \leq j \leq k$), az egyesítésük rangja legalább j.*

Biz. Készítsünk el egy páros gráfot, melynek két pontosztálya S és egy k elemű T halmaz, ahol T elemei az $\mathcal{T}$ tagjainak felelnek meg. Egy $s \in S$ és egy $t_i \in T$ pont akkor van összekötve, ha $s \in T_i$. Könnyen látszik, hogy a 2.4.4 tételt ezen páros gráfra alkalmazva éppen a 3.1.3 tételt kapjuk. •

A 3.1.3 tételben szereplő szükséges feltételt is Rado feltételnek hívják.

Megjegyzés. Igen speciálisak az olyan $G' = (S', T; E')$ páros gráfok, amelyeknél minden S'-beli pont első fokú. Mégis, már az ezekre vonatkozó Rado tételből következik az általános alak. Helyettesítsünk ugyanis minden $v \in S$ pontot $d(v)$ darab, a matroidban párhuzamos elemmel. A v-ből kiinduló $d(v)$ élt helyettesítsük a $d(v)$ új pont és a v eredeti $d(v)$ darab szomszédja között vezető $d(v)$ elemű párosítással. Az így kapott $G' = (S', T; E')$ gráfra és M' matroidra a Rado tétel épp ekvivalens az eredeti G gráfra és M matroidra vonatkozó Rado tétellel. Ez a konstrukció azt jelzi valamiképp, hogy a Rado tételben a páros gráf struktúrájának nincs külön szerepe, mert az belekódolható a matroidba. Teljesen analóg módon látható, hogy a 3.1.3 tételbeli alak ekvivalens azzal a speciális esetével, amikor a szóbanforgó T_i halmazok páronként diszjunktak.

Feladat 3.1.1 *A* 2.4.5 *tételből vezessük le az alábbi tételt.*

TÉTEL 3.1.4 *Legyen adva a $G = (S, T; E)$ páros gráf S pont-osztályán egy M matroid. A maximális M-független párosítás elemszáma, amely S-ben a matroid egy független ponthalmazát fedi egyenlő a*

$$\min\{r(X_1) + |X_2| : X_1 \subseteq S, X_2 \subseteq T,\ X_1 \cup X_2 \text{ lefogja } E\text{-t}\} \tag{3.2}$$

értékkel. •

Bár Lovász 2.6.14 tételére a 2.6.4 szakaszban adott bizonyítás kellően egyszerű volt, a tisztánlátás kedvéért nem haszontalan kimutatni, hogy Lovász tétele a Rado tétel speciális esetének tekinthető. Egy $H = (V, \mathcal{B})$ hipergráfot akkor neveztünk erdősnek, ha minden $X \in \mathcal{B}$ hiperélből ki lehet választani két elemet úgy, hogy a kiválasztott párok, mint gráfélek, erdőt alkossanak.

TÉTEL 3.1.5 (Lovász) *Egy $H = (V, \mathcal{B})$ hipergráf akkor és csak akkor erdős, ha a Hall féle feltétel erősen teljesül, azaz bárhogyan is véve $\mathcal{B}$-ből j különböző halmazt $(1 \leq j)$, az egyesítésük elemszáma legalább $j + 1$.*

Biz. Miután egy j élű erdőnek legalább $j + 1$ csúcsa van, a feltétel nyilván szükséges. Az elegendőség igazolásához jelölje S a V-n definiált teljes gráf élhalmazát és r a teljes gráf körmatroidjának rangfüggvényét. Mindegyik $X \in \mathcal{B}$ halmazra jelölje $I(X)$ az X által feszített élek halmazát. Állítjuk, hogy a $H' := \{I(X) : X \in \mathcal{B}\}$ hipergráf teljesíti a 3.1.3 tétel szükséges feltételét. Valóban, vegyünk az eredeti H hipergráfnak j hiperélét: $X_1, \dots, X_j$. Az ezek által alkotott hipergráf komponensei legyenek $V_1, \dots, V_c$. Az egyes komponensekre a tétel feltételét alkalmazva, majd a c egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy $|V_1 \cup \ldots \cup V_c| \geq j + c$. Másrészt egy élhalmaz körmatroidbeli rangja a fedett csúcsok száma minusz a komponenseinek száma, amiből $r(I(X_1) \cup \ldots \cup I(X_j)) = |V_1 \cup \ldots \cup V_c| - c \geq j$, vagyis a Rado feltétel valóban fennáll. A 3.1.3 tétel alapján $\mathcal{B}$-nek létezik a kívánt erdő-reprezentációja. •

3.1.1 A metszettétel

A kombinatorikus optimalizálás egyik központi eredménye a matroid metszettétel.

TÉTEL 3.1.6 (J. Edmonds) *Az S alaphalmazon adott két matroid. A közös független halmazok maximális elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq S} \{r_1(X) + r_2(S - X)\} \tag{3.3}$$

értékkel.

Edmonds tételét néha az alábbi ekvivalens alakban fogalmazzák meg.

TÉTEL 3.1.7 *Az S alaphalmazon adott két matroid. Akkor és csak akkor létezik k elemű közös független halmaz, ha*

$$r_1(X_1) + r_2(X_2) \geq k \tag{3.4}$$

fennáll az S minden $\{X_1, X_2\}$ partíciójára.

Gyakorlat 3.1.2 *Igazoljuk, hogy ekvivalens feltételt kapunk, ha* (3.4)*-t olyan $\{X_1, X_2\}$ partíciókra követeljük meg, ahol X_1 zárt az M_1 matroidban.*

Gyakorlat 3.1.3 *Igazoljuk, hogy ekvivalens feltételt kapunk, ha* (3.4)*-t olyan $\{X_1, X_2\}$ partíciókra követeljük meg, ahol X_1 nem tartalmazza az $M_1|X_1$ matroid elvágó elemét.*

Gyakorlat 3.1.4 *Igazoljuk, hogy ekvivalens feltételt kapunk, ha* (3.4)*-t olyan $\{X_1, X_2\}$ halmaz-párokra követeljük meg, amelyek uniója S (de nem feltétlenül diszjunktak) és X_i zárt az M_i matroidban* $(i = 1, 2)$.

A (3.4) feltétel szükségessége kézenfekvő, hiszen a tetszőleges F közös független halmazra és az alaphalmaz $\{X_1, X_2\}$ partíciójára fennáll, hogy $r_1(X_1) \geq |X_1 \cap F|$ és $r_2(X_2) \geq |X_2 \cap F|$, amiket összeadva $r_1(X_1) + r_2(X_2) \geq |X_1 \cap F| + |X_2 \cap F| = |F|$ adódik. Hasonlóképp látható a 3.1.6 tételben a max $\leq$ min irány. Így a továbbiakban csak az elegendőség illetve a nemtriviális max $\geq$ min igazolásával foglalkozunk.

Matroidösszegből

1. Biz. [3.1.6 alak] Jelölje $\mathcal{B}_i$ az M_i bázisainak halmazát és tekintsük az M_2 matroid M_2^* duálisát. Az M_1 és M_2 maximális közös függetlenjének keresése olyan $B_i \in \mathcal{B}_i$ $(i = 1, 2)$ bázisok keresésével ekvivalens, melyek metszete maximális elemszámú. Ez viszont olyan M_1-beli B_1 bázis és M_2^*-beli B_2^* bázis keresésével egyenértékű, melyek egyesítése maximális elemszámú.

A 2.4.9 tételben szereplő $r_\Sigma = \min_{X \subseteq S} \{\sum_i r_i(X) + |S - X|\}$ formulát az r_1, r_2^*-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy ezen maximális unió elemszáma $\min_{X \subseteq S} \{r_1(X) + r_2^*(X) + |S - X|\} = \min_{X \subseteq S} \{r_1(X) + |X| - r_2(S) + r_2(S - X) + |S - X|\} = \min_{X \subseteq S} \{r_1(X) + |S| - r_2(S) + r_2(S - X)\}$. Miután $|B_1 \cap B_2| = |B_1 \cup B_2^*| - |B_2^*|$, adódik, hogy $\max\{|B_1 \cap B_2| : B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2^* \in \mathcal{B}_2^*\} = \min_{X \subseteq S} \{r_1(X) + |S| - r_2(S) + r_2(S - X)) - (|S| - r_2(S)\} = \min_{X \subseteq S} \{r_1(X) + r_2(S - X)\}$. •

E bizonyítás már meglévő tételt használt. Az alábbiakban direkt bizonyításokat adunk a metszettételre.

Elhagyás-összehúzás

2. Biz. [3.1.7 alak]. Az elegendőséghez $|S|$ szerinti indukciót használunk. $|S| = 0$-ra a tétel nyilván igaz, így tegyük fel, hogy S nemüres és hogy a tétel érvényes minden olyan esetben, amikor az alaphalmaz $|S|$-nél kevesebb elemet tartalmaz. Válasszunk ki egy tetszőleges $s \in S$ elemet és legyen $S' := S - s$.

Amennyiben $r_1(X') + r_2(S' - X') \geq k$ fennáll minden $X' \subseteq S'$ részhalmazra, indukció alapján az $M_1|S'$ és $M_2|S'$ matroidoknak létezik k elemű közös függetlenje, amely természetesen M_1 és M_2-nek is közös függetlenje. Így feltehetjük, hogy létezik egy $X' \subseteq S'$ halmaz, amelyre

$$r_1(X') + r_2(S' - X') \leq k - 1. \tag{3.5}$$

Ebből következik, hogy s nem hurok egyik matroidban sem, mert ha mondjuk M_1-ben hurok volna, akkor $X := X' + s$-re $r_1(X) + r_2(S - X) = r_1(X') + r_2(S' - X') \leq k - 1$, ellentétben (3.4)-gyel.

Húzzuk most össze mindkét matroidban az s elemet. Állítjuk, hogy a keletkező $M_i \cdot S'$ matroidok r_i' rangfüggvényére $r_1'(Y') + r_2'(S' - Y') \geq k - 1$ teljesül minden $Y' \subseteq S'$ részhalmazra. Álljon ugyanis valamelyik Y'-re $r_1'(Y') + r_2'(S' - Y') \leq k - 2$. Ez azzal ekvivalens, hogy $r_1(Y' + s) - 1 + r_2(S' - Y' + s) - 1 \leq k - 2$, azaz

$$r_1(Y' + s) + r_2(S - Y') \leq k. \tag{3.6}$$

Figyeljük meg, hogy $X' \cap Y'$ és $(S' - X') \cup (S - Y')$ egymás komplementerei (S-re nézve), így (3.4) alapján $[r_1(X' \cap Y') + r_2((S' - X') \cup (S - Y'))] \geq k$, és hasonlóképp $X' \cup (Y' + s)$ és $(S' - X') \cap (S - Y')$ egymás komplementerei és ezért $r_1(X' \cup (Y' + s)) + r_2((S' - X') \cap (S - Y'))] \geq k$. Ezt és a szubmodularitást felhasználva (3.5) és (3.6) összeadásával kapjuk, hogy $(k - 1) + k \geq r_1(X') + r_1(Y' + s) + r_2(S' - X') + r_2(S - Y') \geq r_1(X' \cap (Y' + s)) + r_1(X' \cup (Y' + s)) + r_2((S' - X') \cap (S - Y')) + r_2((S' - X') \cup (S - Y')) = [r_1(X' \cap Y') + r_2((S' - X') \cup (S - Y'))] + [r_1(X' \cup (Y' + s)) + r_2((S' - X') \cap (S - Y'))] \geq k + k$, ami ellentmondás.

Az $M_i \cdot S'$ matroidokra tehát k helyén $(k - 1)$-gyel teljesül (3.4), így az indukciós feltevés alapján ezen matroidoknak létezik egy $k - 1$ elemű F közös függetlenje. De akkor $F + s$ az M_1 és M_2 matroidok k elemű közös függetlenje. •

Lineáris kiterjesztés

3. Biz. [3.1.7 alak].

Állítás 3.1.8 *Ha $r_1(X) + r_2(S - X) \geq k$ minden $X \subseteq S$ halmazra fennáll, akkor $0 \leq c \leq \chi_S$ esetén $\hat{r}_1(c) + \hat{r}_2(\chi_S - c) \geq k$ teljesül minden $c : S \to \mathbf{R}$ vektorra.*

Biz. Feltehetjük, hogy $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \ldots \geq c(s_n)$, és akkor $c' := \chi_S - c$-re $c'(s_n) \geq c'(s_{n-1}) \geq \ldots \geq c'(s_1)$. Így az $S_i := \{s_1, \ldots, s_i\}$ jelölést használva $(i = 1, \ldots, n-1)$ a 1.4.2 részben bevezetett lineáris kiterjesztésének (1.8) képletéből kapjuk, hogy

$$\hat{r}_1(c) = c(s_n)r_1(S) + \sum_{i=1}^{n-1}[c(s_i) - c(s_{i+1})]r_1(S_i)$$

és

$$\begin{aligned}\hat{r}_2(c') &= c'(s_1)r_2(S) + \sum_{i=1}^{n-1}[c'(s_{i+1}) - c'(s_i)]r_2(S - S_i) \\ &= (1 - c(s_1))r_2(S) + \sum_{i=1}^{n-1}[(1 - c(s_{i+1})) - (1 - c(s_i))]r_2(S - S_i) \\ &= (1 - c(s_1))r_2(S) + \sum_{i=1}^{n-1}[c(s_i) - c(s_{i+1})]r_2(S - S_i).\end{aligned}$$

A kettőt összeadva: $\hat{r}_1(c) + \hat{r}_2(\chi_S - c) = c(s_n)r_1(S) + \sum_{i=1}^{n-1}[c(s_i) - c(s_{i+1})]r_1(S_i) + (1 - c(s_1))r_2(S) + \sum_{i=1}^{n-1}[c(s_i) - c(s_{i+1})]r_2(S - S_i) = c(s_n)r_1(S) + (1 - c(s_1))r_2(S) + \sum_{i=1}^{n-1}[c(s_i) - c(s_{i+1})][r_1(S_i) + r_2(S - S_i)] \geq c(s_n)k + [1 - c(s_1)]k + \sum_{i=1}^{n-1}[c(s_i) - c(s_{i+1})]k = k$. •

Az állításból $c_1 + c_2 = t\chi_S$ esetén

$$\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) \geq tk \tag{3.7}$$

adódik, hiszen a $c := c_1/t$ választással $\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) = t\hat{r}_1(c) + t\hat{r}_2(1 - c) \geq tk$.

Indukció $n := |S|$ szerint. Az $n = 0$ eset triviális, így tegyük fel, hogy S nemüres. Amennyiben $k = n$, úgy (3.4)-t $X_1 = S, X_2 = \emptyset$-re alkalmazva kapjuk, hogy $r_1(S) = n$, azaz S független M_1-ben, és hasonlóan kapjuk, hogy S független M_2-ben is. Így feltehetjük, hogy $k < n$. Ha az S-nek van olyan s eleme, amelyre az $S - s$

alaphalmazon levő $M_1 - s$ és $M_2 - s$ matroidokra teljesül (3.4), akkor indukcióval készen vagyunk. Azt fogjuk belátni, hogy ilyen elem valóban létezik.

Tegyük fel indirekt, hogy S mindegyik s_i eleméhez létezik $S - s_i$-nek olyan $\{X_i, Y_i\}$ partíciója, amelyre $r_1(X_i) + r_2(Y_i) \leq k - 1$. Legyen $c_1 := \sum_i \chi_{X_i}$ és $c_2 := \sum_i \chi_{Y_i}$. Az $\{X_i\}$ és $\{Y_i\}$ halmazok együttesen minden elemet pontosan $(n-1)$-szer fednek, azaz $c_1 + c_2 = (n-1)\chi_S$. De ekkor az (1.9) egyenlőtlenséget és (3.7)-t $t = n - 1$-re használva kapjuk, hogy $n(k-1) \geq \sum_{i=1}^n [r_1(X_i) + r_2(Y_i)] = \sum_{i=1}^n r_1(X_i) + \sum_{i=1}^n r_2(Y_i) \geq \hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) \geq (n-1)k$, ellentmondásban $k < n$-nel. • •

Elvágás pontos halmaz mentén

4. Biz. [3.1.6 alak] Indukciót használunk $|S|$ szerint. A kiindulási $|S| = 1$ eset triviális, így feltesszük, hogy $|S| \geq 2$. Jelöljük a (3.3)-beli minimum értékét k-val. Amennyiben ez a minimum kizárólag az $X_1 = \emptyset$ vagy az $X_1 = S$ halmazon éretik el, úgy válasszunk egy tetszőleges $s \in S$ elemet. Ekkor minden $Z \subseteq S - s$ halmazra $r_1(Z) + r_2(S - s - Z) \geq k$, mert különben mind $X_1 = Z$, mind $X_1 = Z + s$ minimalizálná (3.3)-t, és így $\{Z, Z + s\} = \{\emptyset, S\}$ volna, ellentétben $|S| \geq 2$-vel. Így tehát indukcióval már $S - s$-nek volna k elemű közös független részhalmaza

Feltehetjük tehát, hogy (3.3) minimuma egy olyan $\{X_1, X_2\}$ partíción is felvétetik, ahol $X_1, X_2 \neq \emptyset$. Tekintsük az $M_1' := M_1|X_1$ és $M_2' := M_2 \cdot X_1$ matroidokat (azaz M_1 megszorítását X_1-re és M_2 összehúzottját X_1-re.) Állítjuk, hogy van $r_1(X_1)$ elemű I közös független halmazuk. Ha ugyanis nem volna, akkor indukció miatt X_1-nek volna olyan T részhalmaza, amelyre $r_1(X_1) > r_1'(T) + r_2'(X_1 - T) = r_1(T) + r_2(S-T) - r_2(S - X_1)$, ellentmondásban a feltevéssel, hogy X_1 minimalizálja (3.3)-t. Analóg módon látható, hogy az M_1-nek X_2-re történő M_1'' összehúzottjának és az M_2-nek az X_2-re való M_2'' megszorításának is van $r_2(X_2)$ elemszámú J közös független halmaza. Mármost a szereplő matroidok definíciójából látszik, hogy $I \cup J$ független M_1-ben is és M_2-ben is, és így $I \cup J$ egy $r_1(X_1) + r_2(X_2) = k$ elemszámú közös független halmaz. •

3.1.2 Edmonds algoritmusa

Szemben az eddigiekkel, a metszettétel most következő bizonyítása konstruktív.

5. Biz. [3.1.6 alak] Feltesszük, hogy a két matroid olyan orákulummal van megadva, amelyik egy független I halmaz és egy s elem beadásakor megmondja, hogy $I + s$ független-e, és ha nem, akkor kiadja az s elem I-hez tartozó alapkörét. Az algoritmus ismertetése előtt szükségünk van egy hasznos lemmára, amely több elemnek egy független halmazba történő egyidejű becserélésére ad lehetőséget. Valójában a lemma már szerepelt az 1.4.4 feladatban. (Súlyozott általánosítását tartalmazza a 3.2.10 lemma.)

Lemma 3.1.9 *Legyen M matroidnak I egy független részhalmaza. Legyenek $y_1, \dots, y_l \in S - I$ és $x_1, \dots, x_l \in I$ olyan elemek, amelyekre $x_i \in C(I, y_i)$ $(i = 1, \dots, l)$ és $x_i \notin C(I, y_j)$ $(1 \leq i < j \leq l)$. Ekkor $I - \{x_1, \dots, x_l\} \cup \{y_1, \dots y_l\}$ független.*

Biz. k szerinti indukció. Ha $l = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló, mert minden elemet be lehet cserélni az alapkörének egy elemére. Tegyük fel, hogy $l > 1$ és hogy $l - 1$-re igaz az állítás. Legyen $I' := I - x_1 + y_1$. Ekkor I' független. A feltétel szerint $C(I', y_i)$ $(i \geq 2)$ tartalmazza a $C(I, y_i)$ kört, vagyis $C(I', x_i) = C(I, x_i)$. Ezért I'-re, $\{y_2, \dots, y_l\}$ valamint $\{x_2, \dots, x_l\}$-ra teljesülnek a lemma feltételei, és így indukcióval a lemma következik. •

A metszettétel nemtriviális irányának algoritmikus bizonyításához egy F közös független halmazt valamint egy $X \subseteq S$ részhalmazt kell konstruálnunk, amelyekre

$$r_1(X) = |X \cap F| \text{ és } r_2(S - X) = |(S - X) \cap F|. \tag{3.8}$$

Az ilyen F és X halmazokat kiszámító algoritmus fázisokból áll. Egy fázis egy F közös független halmazból indul ki, amely a kezdő fázis esetén tetszőleges lehet. A fázis során vagy találunk egy eggyel nagyobb elemszámú F' közös független halmazt, amely esetben az algoritmus a következő fázisra tér annak inputjául az F'-t választva, vagy pedig találunk egy olyan X halmazt, amelyre (3.8) teljesül. Ebben az esetben az algoritmus véget ér. Nyilvánvalóan legfeljebb $|S|$ fázis után a második eset következik be. Egyetlen fázist írunk le.

Legyen $S_i := \{s \in S - F : F + s \in \mathcal{F}_i\}$ $(i = 1, 2)$, azaz S_1 azon $S - F$-beli elemek halmaza, melyek az első matroidban a függetlenség megsértése nélkül (külön-külön) F-hez vehetők. Amennyiben S_1 és S_2-nek van közös eleme, akkor ezzel F-t megnövelve, egy F-nél nagyobb közös függetlent kapunk. Tegyük fel tehát, hogy S_1 és S_2 diszjunktak. Készítsünk el egy irányított segédgráfot. Ennek kétféle éle lesz. Vezessünk $u \in S - (F \cup S_1)$-ből $v \in F$-be élt, ha $v \in C_1(F, u)$, azaz, ha v benne van az u-nak az F-re vonatkozó M_1-beli alapkörében. Hasonlóan vezessünk $x \in F$-ből élt $y \in S - (F \cup S_2)$-be, ha $x \in C_2(F, y)$. Egy útkereső algoritmus segítségével határozzuk meg az S_2-ből irányított úttal elérhető X pontok halmazát. Két eset lehetséges.

1. eset $S_1 \cap X = \emptyset$. Miután X-ből nem lép ki irányított él, minden $u \in X - F$ elem M_1-beli $C_1(F, u)$ alapköre teljesen X-ben fekszik, és hasonlóan, minden $y \in S - (F \cup X)$ elem M_2-beli $C_2(F, y)$ alapköre teljesen $F - X$-ben van. Ez azt jelenti, hogy $F \cap X$ nem bővíthető M_1-beli független részhalmaza X-nek, azaz $r_1(X) = |F \cap X|$, továbbá $F - X$ nem bővíthető M_2-beli független részhalmaza $S - X$-nek, azaz $r_2(S - X) = |F - X|$. Vagyis (3.8) teljesül.

2. eset $S_1 \cap X \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy létezik irányított út S_2-ből S_1-be. Legyen P egy legrövidebb ilyen út (melyet például szélességi kereséssel határozhatunk meg), és legyen F' az F és P szimmetrikus differenciája. Világos, hogy F'-nek eggyel több eleme van, mint F-nek. Azt állítjuk, hogy F' független mind M_1-ben, mind M_2-ben. Ezt csak az M_2 matroidra igazoljuk, mert M_1-re a bizonyítás analóg.

Legyenek P pontjai sorrendben $p_0, y_1, x_1, y_2, x_2, \ldots, y_k, x_k$ (tehát $p_0 \in S_2$) és legyen $I := F + p_0$. Az M_2 matroidban a 3.1.9 lemma feltétele teljesül, mert P legrövidebb út, így a lemma alapján $F' = I - \{y_1, \ldots, y_k\} \cup \{x_1, \ldots x_k\}$ független M_2-ben. •

Megjegyzendő, hogy a 2. esetben szereplő P út legrövidebbségéből csak annyit használtunk, hogy az út ponthalmaza tartalmazásra nézve minimális, pontosabban, hogy nincs a segédgráfnak olyan éle, amely az út egy korábbi pontjából egy nem rákövetkező későbbibe megy.

Feladat 3.1.5 *Igazoljuk, hogy az aktuális F közös független halmaz cseréjével kapott eggyel nagyobb elemszámú F' közös független halmaz lezártja mindkét matroidban magában foglalja az F lezártját, azaz $i = 1, 2$-re $\sigma_i(F) \subseteq \sigma_i(F')$.* (Ez annak az általánosítása, hogy páros gráf maximális elemszámú párosításának alternáló utas megkeresésekor az aktuális párosítás által fedett csúcsok halmaz mindig bővül).

Feladat 3.1.6 *Tegyük fel, hogy a közös S alaphalmazon adott M_1 és M_2 matroid mindegyikében S felbomlik k diszjunkt bázis uniójára. Igazoljuk, hogy létezik közös bázis.*

Gyakorlat 3.1.7 *A K_4 teljes gráf körmatroidjával és egy alkalmasan választott partíciós matroiddal mutassuk meg, hogy még ha az alaphalmaz mindkét matroidban is bázisokra partícionálható, akkor sem feltétlenül igaz, hogy közös bázisokra is partícionálható.*

Feladat 3.1.8 *Két azonos rangú transzverzális matroid esetén, ha az alaphalmaz mindkét matroidban bázisokra partícionálható, akkor közös bázisokra is partícionálható.*

Feladat 3.1.9 *Digráfban maximális élszámú fenyves elemszáma egyenlő a csúcsszám minusz a forráskomponensek száma* (forráskomponens: az erősen összefüggő részgráfokra való egyértelmű partícióban azon komponensek száma, melyekbe nem lép be él).

Feladat 3.1.10 *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ matroid. Ekkor*

$$\max\{r_1(X) + r_2(X) - |X| : X \subseteq S\} = \min\{r_1(Y) + r_2(S - Y) : Y \subseteq S\}. \tag{3.9}$$

2007. május 6. ulmat31

3.2 SÚLYOZOTT METSZET

Korábban a mohó algoritmus segítségével láttuk, hogy adott $c : S \to \mathbf{R}$ súlyozás esetén miként lehet egyetlen matroid maximális súlyú bázisát meghatározni. A fentiekben tételt adtunk két matroid közös függetlenjének maximális elemszámára. Kérdés, mi mondható két matroid közös független halmazainak maximális súlyáról. Valójában itt több kérdés is kitűzhető: keressünk maximális súlyú közös függetlent vagy maximális súlyú közös bázist, esetleg minden szóbajövő i értékre kiváncsiak lehetünk a maximális súlyú i elemű közös független halmazra.

Előkészületként emlékeztetünk arra, hogy a 2.4.1 szakaszban igazoltuk, hogy egy M matroid maximális c-súlyú bázisai egy M_c matroid bázisait alkotják. Az 1.5.3 szakaszban beláttuk, hogy egy ilyen bázis súlya $\hat{r}(c)$, ahol $\hat{r}$ az M matroid r rangfüggvényének az 1.4.2 szakaszban bevezetett lineáris kiterjesztése. Az alábbi előkészítő lemma arra ad választ, hogy miként változik az $\hat{r}(c)$ függvény, ha c értékeit egy adott Z halmaz minden elemén eggyel megnöveljük vagy lecsökkentjük.

Lemma 3.2.1 *Legyen az M matroid rangfüggvénye r. Adott $c : S \to \mathbf{Z}$ egészértékű vektorra és $Z \subseteq S$ halmazra legyen $c^+ := c + \chi_Z$ és $c^- := c - \chi_Z$. Ekkor*

$$\hat{r}(c^+) = \hat{r}(c) + r_c(Z), \tag{3.10}$$

és

$$\hat{r}(c^-) = \hat{r}(c) - r(S) + r_c(S - Z) \tag{3.11}$$

ahol r_c a maximális súlyú bázisok által alkotott matroid rang-függénye.

Biz. Az első azonosság igazolásához rendezzük az S elemeit c szerinti csökkenő sorrendbe úgy, hogy egyenlő súlyú elemek esetén a Z elemeit vesszük előbbre. Mivel c egészértékű, ez a sorrend a c^+ súlyozás szerint is csökkenő (azaz korábbi elem súlya nagyobb vagy egyenlő, mint egy későbbi elemé). Így a mohó algoritmus által szolgáltatott B bázis mind a c, mind a c^+ súlyozásra nézve maximális súlyú.

Ekkor $r_c(Z) \geq |B \cap Z|$, de itt egyenlőségnek kell állnia, mert különben létezne olyan maximális c-súlyú B' bázis, amelyre $|B' \cap Z| > |B \cap Z|$, és akkor $c^+(B') = c(B') + |Z \cap B'| > c(B) + |Z \cap B| = c^+(B)$, ellentmondásban azzal, hogy B maximális c^+-súlyú. Tehát valóban $r_c(Z) = |B \cap Z|$, és így $\hat{r}(c^+) = c^+(B) = c(B) + |B \cap Z| = \hat{r}(c) + r_c(Z)$.

A második azonossághoz először figyeljük meg, hogy $r_c = r_{c-\chi_S}$, majd alkalmazzuk az első azonosságot c helyén $c - \chi_S$-re és Z helyén $(S-Z)$-re. Kapjuk, hogy $\hat{r}(c^-) = \hat{r}(c - \chi_S + \chi_{(S-Z)}) = \hat{r}(c - \chi_S) + r_{c-\chi_S}(S-Z) = \hat{r}(c) - r(S) + r_c(S-Z)$. •

Hasznosnak fog bizonyulni az alábbi lemma is, bár itt Z már nem tetszőleges.

Lemma 3.2.2 *Legyen $c : S \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű, és tegyük fel, hogy a $Z \subset S$ nemüres halmaz olyan, hogy $x \in Z, y \in S - Z$ esetén $c(x) > c(y)$. Ekkor*

$$\hat{r}(c - \chi_Z) = \hat{r}(c) - r(Z). \tag{3.12}$$

Biz. A Z választása miatt Z valamelyik S_i halmaz az (1.13) formulában, amelyre $c(s_i) > c(s_{i+1})$. Így (1.13)-ből (3.12) rögtön következik. •

3.2.1 Maximális súlyú közös bázisok

A maximális súlyú közös bázis kérdésére térve, legyen adott az S alaphalmazon két matroid, M_1 és M_2, továbbá egy $c : S \to \mathbf{Z}$ egészértékű (!) súlyfüggvény. Tegyük fel, hogy az M_1 és M_2 matroidoknak van közös bázisa, melynek elemszámát jelölje k. Valamely $x : S \to \mathbf{Z}$ súlyfüggvényre jelölje $\hat{r}_i(x)$ az M_i matroidban a maximális x-súlyú bázis súlyát.

TÉTEL 3.2.3 *Az M_1 és M_2 matroidok közös bázisainak maximális c-súlya egyenlő a* $\min\{\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) : c_1 + c_2 = c, c_i$ *egészértékű*$\}$ *értékkel.*

Biz. Adott B közös bázis és c_1, c_2 esetén, nyilván $c(B) = c_1(B) + c_2(B) \leq \hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2)$, amiből a max $\leq$ min irány következik. A becslésből az is kiolvasható, hogy a fordított max $\geq$ min egyenlőtlenség igazolásához a c-nek egy $c_1 + c_2$ felbontását kell találnunk, valamint M_1-nek és M_2-nek egy B közös bázisát úgy, hogy

(∗) *B egyszerre az M_1-nek maximális c_1-súlyú bázisa és az M_2-nek maximális c_2-súlyú bázisa.*

Legyen c_1 és c_2 a c-nek olyan egész felbontása, amelyre $\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2)$ minimális. (Miután c_i egészértékű és tetszőleges B közös bázisra $c(B)$ alsó korlát $\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2)$-re, a szóbanforgó minimum létezik). Jelölje M_i' az M_i matroid maximális c_i-súlyú bázisai által alkotott matroidot ($i = 1, 2$), míg a megfelelő rangfüggvényeket jelöljük r_i'-vel.

Lemma 3.2.4 *Az M'_1 és M'_2 matroidoknak van k elemű közös független halmaza.*

Biz. Az Edmonds féle metszettétel szerint, ha nem létezik k elemű közös független halmaz, akkor van olyan $Z \subseteq S$ halmaz, amelyre

$$r'_1(Z) + r'_2(S - Z) < k. \tag{3.13}$$

Legyen $c_1^+ := c_1 + \chi_Z$ és $c_2^- := c_2 - \chi_Z$. Alkalmazva a (3.10) formulát az M_1 matroidra és c_1 súlyfüggvényre, illetve a (3.11) formulát az M_2 matroidra és a c_2 súlyfüggvényre azt kapjuk, hogy $\hat{r}_1(c_1^+) = \hat{r}_1(c_1) + r'_1(Z)$ és $\hat{r}_2(c_2^-) = \hat{r}_2(c_2) + r'_2(S-Z) - r_2(S) = \hat{r}_2(c_2) + r'_2(S-Z) - k$. Ezeket összevetve az adódik, hogy $\hat{r}_1(c_1^+) + \hat{r}_2(c_2^-) = \hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) + r'_1(Z) + r'_2(S-Z) - k < \hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2)$, ellentmondásban c_1 és c_2 minimális választásával. •

A lemma által biztosított közös B bázis tehát teljesíti a $(*)$ tulajdonságot és ezzel a tétel bizonyítása teljes. •

Érdemes külön is megfogalmazni a $(*)$ tulajdonságot.

Következmény 3.2.5 *Amennyiben két matroidnak van közös bázisa, úgy tetszőleges c egészértékű súlyozáshoz létezik c-nek egy egészértékű $c_1 + c_2$ felbontása valamint a két matroidnak egy B közös bázisa úgy, hogy B maximális c_1-súlyú bázisa M_1-nek és maximális c_2-súlyú bázisa M_2-nek. Egy B közös bázis akkor és csak akkor maximális súlyú, ha létezik c-nek egy egészértékű $c_1 + c_2$ felbontása, melyek teljesítik $(*)$-t.* •

Bár a 3.2.3 tétel elegáns karakterizációt ad a közös bázisok maximális súlyára, mégsem lehetünk maradéktalanul elégedettek, mert a min-max formulában szereplő c_i-k esetleg túlságosan nagyok lehetnek ahhoz, hogy a c input méretének polinomjában le tudjuk írni. Ez a veszély azonban elhárítható és a következő tétel tartalma éppen az, hogy az optimális c_i-k választhatók moderált méretűnek. A tétel ezenkívül még jó szolgálatot fog tenni Gröflin és Hoffman 3.3.4 tételének bizonyításában is.

Egy súlyfüggvényt nevezzünk **Δ-szűk**nek, ha bármely két szomszédos értékének eltérése legfeljebb Δ. A súlyfüggvény **változása** jelentse a maximális és a minimális értékének a különbségét.

TÉTEL 3.2.6 *Ha a* 3.2.3 *tételben a c súlyfüggvény változása Δ, úgy c-nek létezik olyan $c = c_1 + c_2$ olyan optimális* (tehát $\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2)$-t minimalizáló) *felbontása is, amelyre mind c_1, mind c_2 Δ-szűk.*

Biz. Válasszunk c-nek egy olyan optimális $c = c_1 + c_2$ felbontását, amelyben c_1 és c_2 változásának összege minimális. Megmutatjuk, hogy mind c_1, mind c_2 Δ-szűk. Tegyük fel indirekt, hogy mondjuk c_1 nem az, vagyis valamely $h < t$ indexre $\gamma_h - \gamma_{h+1} > \Delta$, ahol $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_t$ a c_1 különböző értékei. Legyen $Z_h := \{s : c_1(s) \geq \gamma_h\}$, $c'_1 := c_1 - \chi_{Z_h}$ és $c'_2 := c - c'_1$. A definícióból világos, hogy c'_1 változása eggyel kisebb, mint c_1 változása. A 3.2.2 lemmát az M_1 matroidra, c_1-re és Z_h-ra alkalmazva kapjuk, hogy $\hat{r}_1(c'_1) = \hat{r}_1(c_1) - r_1(Z_h)$. Minden $x \in S - Z_h, y \in Z_h$ elempárra egyrészt $c_1(y) \geq c_1(x) + \Delta + 1$, másrészt c változása Δ, így $c(y) \leq c(x) + \Delta$ és ezért $c_2(y) \leq c_2(x) - 1$. Ebből egyrészt következik, hogy c'_2 változása is kisebb c_2 változásánál, másrészt alkalmazhatjuk a 3.2.2 lemmát M_2-re, c_2-re és $Z := S - Z_h$-ra. A (3.12) képletből kapjuk, hogy $\hat{r}_2(c'_2) = \hat{r}_2(c_2 + \chi_{Z_h}) = \hat{r}_2(c_2 + \chi_S - \chi_{(S-Z_h)}) = r_2(S) + \hat{r}_2(c_2) - r_2(S - Z_h)$.

Miután van közös bázis, (melynek elemszáma $r_2(S)$), így $r_1(Z_h) + r_2(S - Z_h) - r_2(S) \geq 0$. Mindezeket összevetve kapjuk, hogy $\hat{r}_1(c'_1) + \hat{r}_2(c'_2) = [\hat{r}_1(c_1) - r_1(Z_h)] + [\hat{r}_2(c_2) - r_2(S - Z_h) + r_2(S)] = \hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) - [r_1(Z_h) + r_2(S - Z_h) - r_2(S)] \leq \hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2)$. A c_1, c_2 optimális választása miatt itt egyenlőségnek kell teljesülnie, azaz c'_1, c'_2 egy másik optimális felbontása c-nek, de ez ellentmondásban van azzal, hogy c_1 és c_2 változásának összege minimális. • •

Gyakorlat 3.2.1 *Adott i egész, adjunk min-max tételt a maximális súlyú i elemű közös független halmazok súlyára.*

3.2.2 Maximális súlyú közös függetlenek

A maximális súlyú közös független súlyára is megállapíthatunk min-max formulát.

TÉTEL 3.2.7 *Az S alaphalmazon adott két matroid és egy c nemnegatív* (!) *egészértékű súlyfüggvény. A maximális súlyú közös független halmaz súlya egyenlő a* $\min\{\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) : c_1 + c_2 = c, c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_i$ *egész*$\}$ *értékkel.*

Biz. Legyen F közös független és legyen $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ olyan, hogy $c_1 + c_2 = c$. Ekkor $c(F) = c_1(F) + c_2(F) \leq \hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2)$, amiből a max $\leq$ min irány következik.

A fordított irányhoz azt fogjuk megmutatni, hogy létezik c-nek egy olyan c_1, c_2 egészértékű, nemnegatív felbontása valamint egy F közös független halmaz, melyekre F maximális c_i-súlyú független halmaza M_i-nek $(i = 1, 2)$.

Feltehetjük, hogy minden elem c-súlya szigorúan pozitív és egyik matroidban sincs hurok elem. (Miért?) Legyen $R := \max\{r_1(S), r_2(S)\} + 1$ és S' egy R elemű halmaz, amely diszjunkt S-től. Legyen M_i^+ $(i = 1, 2)$ az a matroid, amelyet úgy kapunk, hogy az M_i és az S'-n vett szabad matroid direkt összegét R-rel csonkoljuk. Terjesszük ki a c-t az $S \cup S'$-re úgy, hogy az S' elemein legyen c azonosan nulla. Könnyen látszik, hogy M_i^+-ban egy R elemű B halmaz akkor és csak akkor bázis, ha $B \cap S$ független M_i-ben, és ekkor persze $c(B) = c(B \cap S)$. (Speciálisan S' nulla súlyú bázis.) Ennek megfelelően M_1 és M_2 maximális súlyú közös független halmazának a súlya egyenlő az M_1^+ és M_2^+ matroidok maximális súlyú közös bázisának a súlyával.

A (3.2.5) következmény szerint létezik egy olyan közös B bázis és c_1, c_2 egész felbontása a kiterjesztett c-nek, hogy B maximális c_i-súlyú bázisa M_i^+-nak.

Állítás 3.2.8 *c_i $(i = 1, 2)$ választható olyannak, hogy S' elemein azonosan nulla.*

Biz. Először kimutatjuk, hogy S' minden elemének c_1 értéke ugyanaz. Az R érték választása miatt $B \cap S'$ nemüres. Az $S' - B$ sem lehet üres, mert akkor $|S'| = |B|$ miatt $S' = B$, és így egyrészt $c(B) = 0$ volna, ugyanakkor amiatt, hogy minden S-beli elem c-súlya pozitív, és nincs hurok elem, létezik pozitív súlyú közös bázis. A B ezen elhelyezkedése miatt elég kimutatnunk, hogy egy $B \cap S'$-beli x elem és egy $S' - B$-beli y elem c_1-súlya megegyezik. Miután $B - x + y$ egy másik közös bázis, kapjuk, hogy $c_1(y) \leq c_1(x), c_2(y) \leq c_2(x)$, amiből $c_1(x) + c_2(x) = 0 = c_1(y) + c_2(y)$ miatt $c_1(y) = c_1(x)$ következik. Legyen tehát az S' elemeinek közös c_1 értéke α. Ezen elemek c_1 értékét α-val csökkentve, c_2-értékét α-val növelve a c-nek az Állítás által megkívánt felbontását kapjuk. •

Feltesszük tehát, hogy c_1 és c_2 azonosan nulla az S' elemein. Ebből következik, hogy minden $x \in S \cap B$ elemre $c_i(x) \geq 0$, hiszen egy $y \in S' - B$ elemre $B - x + y$ bázisa M_i^+-nak, és ezért $c_i(x) \geq c_i(y) = 0$.

Legyen most $x \in S - B$ egy olyan elem, amelyre, mondjuk, $c_1(x)$ negatív. Növeljük $c_1(x)$-t nullára és csökkentsük $c_2(x)$-t $c(x)$-re. B továbbra is maximális súlyú bázis marad M_2^+-ban, hiszen egy bázison kívüli elemen csökkentettük a súlyt. B maximális súlyú bázis marad M_1^+-ban is, hiszen B minden elemének a c_1-súlya nemnegatív és egy negatív súlyú elem súlyát növeltük nullára.

Ilyen módosításokkal elérhetjük, hogy c_i nemnegatív. Kapjuk, hogy c_i-nek az S-re való $c_i|S$ megszorítására nézve az $F := B \cap S$ közös független halmaz maximális maximális $c_i|S$-súlyú független az M_i matroidban. • •

Másik visszavezetés

Érdekesség kedvéért bemutatunk egy másik lehetséges visszavezetést is, amelynek révén a közös függetlenek problémája előáll közös bázis feladatként. Legyen tehát adott az $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ alaphalmazon az M_1 és M_2 matroid. Tekintsünk az S-nek egy tőle diszjunkt S' példányát, és az $S^* := S \cup S'$ halmazon definiáljuk az M matroidot a bázisaival: minden M_1-beli I függetlenre és M_2-beli J függetlenre, ahol $|I| = |J|$, legyen $I \cup (S' - J')$ bázisa M-nek. Ez nem más, mint az M_2 matroid S'-n vett példányának és az M_1 matroidnak a kompozíciója (lásd a 2.4.3 szakaszt), amelyben S' bázis. Tekintsük az S^*-nak $\{S_1, \ldots, S_n\}$ partícióját, ahol $S_i := \{s_i, s_i'\}$, és legyen M' az a partíciós matroid, amelyben azok a halmazok függetlenek, melyek mindegyik S_i-ből legfeljebb egy elemet tartalmaznak. Mármost könnyen ellenőrizhető, hogy ha B az M és M' közös bázisa, akkor $B \cap S$ az M_1 és M_2 közös független halmaza, és megfordítva, ha F az M_1 és M_2 közös független halmaza, akkor $F \cup (S - F)'$ az M és M' közös bázisa. Az S' elemeinek súlyát 0-nak definiálva az F súlya egyenlő a B súlyával. Tehát olyan egy-egy értelmű kapcsolat van az eredeti M_1 és M_2 matroidok közös független halmazai és az M és M' matoidok közös bázisai között, amelyben az egymásnak megfelelő közös független halmaz illetve közös bázis súlya egyenlő.

3.2.3 Súlyozott matroid-metszet algoritmus

Edmonds súlyozatlan metszet algoritmusának kiterjesztéseként bemutatunk egy eljárást maximális súlyú közös független halmaz kiszámítására. A közös S alaphalmazon legyenek adva az $M_1 = (S, \mathcal{F}_1)$ és $M_2 = (S, \mathcal{F}_2)$ matroidok valamint egy $c : S \to \mathbf{R}$ súlyfüggvény. c-ről sem egészértékűséget, sem nemnegativitást nem követelünk meg. Az S egy X részhalmazának súlyát a szokásos módon $c(X) := \sum[c(s) : s \in X]$ jelöli. Az S részhalmazainak egy $\mathcal{H}$ rendszere esetén egy $X \in \mathcal{H}$ halmazról azt mondjuk, hogy c-maximális $\mathcal{H}$-ban, ha $c(X) \geq c(Y)$ fennáll a $\mathcal{H}$ minden Y tagjára. Jelölje $\mathcal{H}^k$ a $\mathcal{H}$ k elemű tagjainak rendszerét. Speciálisan, a két matroid k elemű közös független halmazainak rendszerét $\mathcal{F}_{12}^k$-val jelöljük.

Előkészületek

Az 1.5 szakaszban a mohó algoritmus segítségével igazoltuk a következő lemmát.

Lemma 3.2.9 *Adott $M = (S, \mathcal{F})$ matroidra egy k elemű független F halmaz akkor és csak akkor c-maximális $\mathcal{F}^k$-ban, ha*

$$y \in S - F,\ F + y \notin \mathcal{F},\ x \in C(F, y) \text{ esetén } c(y) \leq c(x), \tag{3.14}$$

és

$$y \in S - F, F + y \in \mathcal{F}, x \in F \text{ esetén } c(y) \leq c(x), \tag{3.15}$$

ahol $C(F, y)$ jelöli az $F + y$-ben lévő egyértelmű kört. •

A következő lemma általánosítja az 1.4.4 feladatban szereplő állítást.

Lemma 3.2.10 *Egy matroidban legyen B maximális súlyú bázis a c súlyfüggvényre nézve. Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2, \dots, x_l$ bázisbeli elemek és az $y_1, y_2, \dots, y_l$ bázison kívüli elemek olyanok, hogy $x_i \in C(B, y_i)$ és $c(x_i) = c(y_i)$ minden $i = 1, \dots, l$-re, és*

$$h > j \text{ és } c(x_h) = c(y_j) \text{ esetén } x_h \notin C(B, y_j). \tag{3.16}$$

Ekkor $B' := B - \{x_1 \dots, x_l\} \cup \{y_1, \dots, y_l\}$ maximális súlyú bázis.

Biz. l szerinti indukciót alkalmazunk. Amennyiben $l = 1$, úgy a lemma nyilván fennáll. Így feltesszük, hogy $l \geq 2$ és hogy l-nél kisebb értékekre a lemma igaz. A $c(x_i) = c(y_i)$ súlyok minimumát jelölje μ, és legyen h a legnagyobb olyan index, amelyre a $c(y_h) = \mu$.

Állítás 3.2.11 *$x_h \notin C(B, y_j)$ fennáll minden $j \neq h$ indexre.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $j \neq h$ index, amelyre $x_h \in C(B, y_j)$. Mivel B maximális súlyú, következik, hogy $c(y_j) \leq c(x_h)$, amiből $\mu \leq c(y_j) \leq c(x_h) = c(y_h) = \mu$, vagyis végig egyenlőség van. A tétel feltétele szerint ekkor $h < j$, de ez ellentmond h maximális választásának. •

Most $B_1 := B - x_h + y_h$ is maximális súlyú bázis, és az állítás miatt minden h-tól különböző j indexre érvényes, hogy $C(B_1, y_j) = C(B, y_j)$. Így az indukciós feltevést a B_1 bázisra alkalmazva a tétel érvényessége következik. • •

A következő állítás nyilvánvaló.

Lemma 3.2.12 *Amennyiben $F \in \mathcal{F}_{12}^k$ és $c = c_1 + c_2$ a c-nek olyan felbontása, melyekre F c_i-maximális $\mathcal{F}_i^k$-ban $(i = 1, 2)$, úgy F c-maximális $\mathcal{F}_{12}^k$-ban.* •

Az eljárás

Az algoritmus minden lehetséges k-ra megad egy olyan k elemű közös független F halmazt és $c = c_1 + c_2$ felbontást, amelyek kielégítik a 3.2.12 lemma feltételeit. Ráadásul, a kapott c_i egészértékű lesz, amennyiben a kiindulási c egészértékű. Az eljárás a $k = 0$-val indul, majd k értékét egyenként növelve akkor áll le, amikor talál egy olyan $\{T, S - T\}$ partícióját S-nek, amelyre $r_1(T) + r_2(S - T) = k$, bizonyítván, hogy a maximális méretű közös független halmaz elemszáma k. Az algoritmus lényeges tulajdonsága, hogy minden fázisában az aktuális $F \in \mathcal{F}_{12}^k$ halmaz c-maximális $\mathcal{F}_{12}^k$-ban.

Az algoritmus általános lépésének leírásához tegyük fel, hogy valamely k-ra már rendelkezésünkre áll a 3.2.12 lemma feltételeit teljesítő $F \in \mathcal{F}_{12}^k$ halmaz és $c = c_1 + c_2$ felbontás. Ezekből kiindulva elkészítjük az $F' \in \mathcal{F}_{12}^{k+1}$ halmazt és $c = c_1' + c_2'$ felbontást, melyekre ismét teljesülni fognak a 3.2.12 lemma feltételei, k helyett $k + 1$-re. A $k = 0$ kezdő esetben legyen például $F := \emptyset, c_1 := 0, c_2 := c$.

Legyen $i = 1, 2$-re

$$m_i := \max\{c_i(y) : y \in S - F, F + y \in \mathcal{F}_i\} \tag{3.17}$$

és

$$Y_i := \{y \in S - F : F + y \in \mathcal{F}_i, c_i(y) = m_i\}. \tag{3.18}$$

(Megfigyelhetjük, hogy Y_i épp azon elemek halmaza, amelyeknek bármelyikével a mohó algoritmus az M_i matroidban a c_i súlyozás mellett a meglévő F halmazt bővíthetné).

Definiáljunk az S csúcshalmazon egy $D = (S, A)$ irányított páros gráfot. Az élek az F és az $S - F$ halmazok között vezetnek. Két féle él van.

$$y \in S - F,\ \ F + y \notin \mathcal{F}_1,\ x \in C_1(F, y),\ c_1(x) = c_1(y) \text{ esetén legyen } yx \text{ él} \tag{3.19}$$

és

$$y \in S - F, F + y \notin \mathcal{F}_2, x \in C_2(F, y), c_2(x) = c_2(y) \text{ esetén legyen } xy \text{ él.} \tag{3.20}$$

Határozzuk meg, például a szélességi keresés segítségével, az Y_2 halmazból irányított úton elérhető pontok T halmazát. Két eset lehetséges.

1. eset. *Létezik út Y_2-ből Y_1-be.* Válasszunk egy olyan U utat, amely a legkevesebb pontból áll. (Az U-t azonosítjuk a csúcshalmazával, és valójában csak arra lesz szükségünk, hogy U tartalmazásra nézve minimális. A szélességi keresés automatikusan ilyent produkál.) Legyen F' az F és U halmazok szimmetrikus differenciája, és legyen $c_i' := c_i$ $(i = 1, 2)$.

Állítás 3.2.13 *F', c_1', c_2' kielégítik a* 3.2.12 *lemma feltételeit $k + 1$-re.*

Biz. Jelölje U csúcsait a végighaladás sorrendjében $\{y_0, x_1, y_1, x_2, \ldots, x_l, y_l\}$. A 3.2.9 lemma szerint $F + y_0$ c_2-maximális $\mathcal{F}_2^{k+1}$-ben. Figyeljük meg, hogy a 3.2.10 lemma feltevései teljesülnek $k+1$-re az $F + y_0 \in \mathcal{F}_2^{k+1}$ halmazra és $x_1, x_2, \ldots, x_l$, valamint $y_1, y_2, \ldots, y_l$ elemekre. (A (3.16) előírás az U minimalitása miatt áll fenn!) Ily módon a 3.2.10 lemma miatt F' c_2-maximális $\mathcal{F}_2^{k+1}$-ben. Hasonló módon igazolhatjuk, hogy F' c_1-maximális $\mathcal{F}_1^{k+1}$-ben, csupán azzal az eltéréssel, hogy az U csúcsait fordított sorrendben újra kell indexelni (azaz az út utolsó csúcsa lesz y_0, az első pedig y_l). •

Állítás 3.2.14 $c(F') - c(F) = m_1 + m_2$.

Biz. Az állítás a konstrukcióból nyilvánvaló. (Valójában erre nem is az algoritmus helyességének az igazolásakor lesz szükségünk, hanem egy későbbi érdekes következménynél). •

2. eset. *Az Y_2-ből elérhető pontok T halmaza diszjunkt Y_1-től.* Adódik, hogy $Y_2 \subseteq T, Y_1 \subseteq S - T$, és T-ből nem lép ki a D segédgráfnak éle. Legyen

$$c_1'(z) := c_1(z) + \delta, \text{ ha } z \in T \text{ és } c_1'(z) := c_1(z), \text{ ha } z \in S - T, \tag{3.21}$$

és $c_2' := c - c_1'$, ahol

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}, \tag{3.22}$$

amelyben

$$\begin{aligned}
&\delta_1 := \min\{c_1(x) - c_1(y) : y \in T - F,\ F + y \notin \mathcal{F}_1,\ x \in C_1(F, y) - T\},\\
&\delta_2 := \min\{m_1 - c_1(y) : y \in T - F,\ F + y \in \mathcal{F}_1\},\\
&\delta_3 := \min\{c_2(x) - c_2(y) : y \in S - (T \cup F),\ F + y \notin \mathcal{F}_2,\ x \in C_2(F, y) \cap T\}\\
&\delta_4 := \min\{m_2 - c_2(y) : y \in S - (T \cup F),\ F + y \in \mathcal{F}_2\}.
\end{aligned}$$

Az üres halmaz felett vett minimumot ∞-nek értelmezzük. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\delta = \infty$, vagyis amikor mind a négy δ_i végtelen. $\delta_2 = \infty$ miatt minden $y \in T \cap (S - F)$ elemre $F + y \notin \mathcal{F}_1$, azaz létezik az M_1 matroidban a $C_1(F, y)$ alapkör. Ráadásul $\delta_1 = \infty$ miatt az alapkör teljesen T-ben van, vagyis $F \cap T$ feszíti M_1-ben a T halmazt és így $r_1(T) = |F \cap T|$. Hasonlóképp, $\delta_4 = \infty$ miatt minden $y \in S - (T \cup F)$ elemre $F + y \notin \mathcal{F}_2$, azaz létezik az M_2 matroidban a $C_2(F, y)$ alapkör. Ráadásul $\delta_3 = \infty$ miatt az alapkör teljesen $S - T$-ben van, vagyis $F - T$ feszíti M_2-ben az $S - T$ halmazt és így $r_2(S - T) = |F - T|$. Ezekből $|F| = |F \cap T| + |F - T| = r_1(T) + r_2(S - T)$ adódik, bizonyítván, hogy az aktuális F közös független halmaz maximális elemszámú. Az algoritmus ilyenkor véget ér.

Állítás 3.2.15 $\delta > 0$.

Biz. Belátjuk, hogy $\delta_1 > 0$ és $\delta_4 > 0$. A $\delta_2 > 0$ és $\delta_3 > 0$ egyenlőtlenségek bizonyítása hasonlóképpen történhet. Ha $x \in C_1(F, y) - T$, akkor a 3.2.9 lemma miatt $c_1(x) \geq c_1(y)$. Itt viszont nem állhat egyenlőség, mert akkor yx él volna a D segédgráfban, amely kilép T-ből, és ez lehetetlen. Emiatt valóban $\delta_1 > 0$. Ha $y \in S - (T \cup F)$, akkor $y \notin Y_2$, és így az m_2 definíciójából $\delta_4 > 0$ adódik. •

Állítás 3.2.16 *Az $F' := F$ halmaz és a c_1', c_2' súlyozások kielégítik a* 3.2.9 *lemma feltételeit.*

Biz. Csak annyit bizonyítunk be, hogy az F' halmaz c_1'-maximális $\mathcal{F}_1^k$-ban. A c_2'-maximalitás $\mathcal{F}_2^k$-ban hasonlóképp látható be.

A c_1'-maximalitáshoz azt kell igazolnunk, hogy a 3.2.9 lemma feltételei fennállnak c_1'-re. Először válasszunk ki olyan x, y elemeket, melyekre $x \in C_1(F, y)$. Ha indirekt $c_1'(x) < c_1'(y)$ volna, úgy $c_1(x) \geq c_1(y)$ folytán $c_1'(x) = c_1(x) + \delta$ és $c_1'(y) = c_1(y)$ következne, valamint az, hogy $y \in T - F$ és $x \in F - T$. De ekkor $\delta \leq \delta_1 \leq c_1(x) - c_1(y)$, vagyis $c_1'(x) \leq c_1'(y)$, ellentétben az indirekt feltevéssel. Tehát (3.14) valóban fennáll.

Válasszuk most ki az x, y elemeket úgy, hogy $x \in F, y \notin F$, és $F + y \in \mathcal{F}_1$. Ha indirekt $c_1'(x) < c_1'(y)$ volna, akkor $c_1(x) \geq c_1(y)$ miatt $c_1'(y) = c_1(y) + \delta$ és $c_1'(x) = c_1(x)$ állna fenn, valamint az, hogy $y \in T - F$ és $x \in F - T$. Emiatt $\delta \leq \delta_2 \leq m_1 - c_1(y)$. Mivel F-re fennáll (3.15), így $c_1(x) \geq m_1$. Ezekből $c_1'(y) = c_1(y) + \delta \leq m_1 \leq c_1(x) = c_1'(x)$, ellentétben az indirekt feltevéssel. Így (3.15) is igaz. •

Iteráljuk most az algoritmust, ezúttal F', c_1', c_2'-vel indítva. Figyeljük meg, hogy a δ_2 és a δ_4 definíciója miatt $m_1' = m_1$ és $m_2' = m_2$, továbbá $Y_1 \subseteq Y_1'$ és $Y_2 \subseteq Y_2'$. A segédgráf definíciója miatt pedig $T' \subseteq T$. Amennyiben $\delta = \delta_2$, akkor $T - F$ egy pontja bekerül Y_1'-be, ezért D'-ben már az 1. eset fordul elő. Amennyiben $\delta_=1$ vagy $\delta = \delta_3$, úgy D'-ben már lesz T-ből kilépő él, vagyis T' szigorúan bővebb, mint T. Végül, ha $\delta = \delta_4$, akkor Y_2'-nek lesz egy T-n kívüli eleme, vagyis ilyenkor is $T' \supset T$.

Következésképp az algoritmus iterálása során a 2. eset legfeljebb $|S|$ egymást követő előfordulása után bizonyosan vagy az 1. eset következik be, és ez összesen legfeljebb $|S|$-szer fordulhat elő, vagy pedig δ végtelenné válik, amikor is az algoritmus futása véget ér. Ezzel az algoritmus ismertetését és helyességének bizonyítását befejeztük. • •

Mit mondhatunk az algoritmus lépésszámáról? Feltesszük, hogy a matroidok olyan szubrutin segítségével vannak adva, amelynek egy hívásával eldönthető, hogy adott F független halmaz és $y \notin F$ elem esetén eldönti, hogy $F + y$ független-e, és ha nem, akkor megadja a $C(F, y)$ alapkört. Egy hívás lépésszámát jelölje g.

Két szám összeadását, kivonását, összehasonlítását egyetlen lépésnek tekintünk (a fenti algoritmus szorzást nem használ). Legyen $n := |S|$ és legyen K a maximális elemszámú közös független halmaz elemszáma.

A segédgráf felépíthető a szubrutin $O(n)$-szeri hívásával. A szélességi keresés $O(n^2)$ lépést igényel a keresett út illetve az elérhető pontok halmazának meghatározásához. Ha a 2. eset következik be, akkor a meglévő címkéket újra lehet használni, mivel $T' \supset T, Y_1' \supseteq Y_1, Y_2' \supseteq Y_2$. Következésképp, ha valamikor az 1. eset áll fenn, úgy legfeljebb $O(gn^2)$ lépés után ismét az 1. eset fog előfordulni. Íly módon az algoritmus lépésszám igénye legfeljebb $O(gKn^2) \le O(gn^3)$.

Megjegyzés Ha az algoritmust $c_1 \equiv 0$-val indítjuk, akkor az eljárás során végig $m_1 = 0$ és $\delta_2 = \infty$. A leírásban nem használtuk ki az ebből adódó egyszerűsítési lehetőséget, egyrészt, hogy fenntartsuk a szimmetriát a két matroid között, másrészt, hogy meglegyen a lehetőség tetszőleges F, c_1, c_2-vel való indulásra, melyek kielégítik a 3.2.12 lemma feltételeit.

Az algoritmussal bizonyítást nyert az alábbi eredmény is.

TÉTEL 3.2.17 *Az F halmaz akkor és csak akkor c-maximális $\mathcal{F}_{12}^k$-ban, ha létezik olyan $c = c_1 + c_2$ felbontás, amelyre F c_i-maximális $\mathcal{F}_i^k$-ban $(i = 1, 2)$. Ha ráadásul c egészértékű, úgy c_i is választható annak.* •

Figyeljük meg, hogy ez a tétel a $k = r_1(S) = r_2(S) = r_{12}(S)$ speciális esetben egészértékű c-re a 3.2.5 következménnyel ekvivalens. Miután az algoritmus futása során az m_1 és az m_2 értéke sohasem nő, a fenti 3.2.14 állításból rögtön adódik Krogdahl érdekes eredménye is.

Következmény 3.2.18 *$c_{k+1} - c_k \le c_k - c_{k-1}$, ahol c_j jelöli a maximális c-súlyú, j elemszámú közös független halmazok c-súlyát.* •

2007. május 6.**ulmat32**

3.3 ALKALMAZÁSOK, KÖVETKEZMÉNYEK, II

Ebben a szakaszban a matroid metszetre vonatkozó eredmények alkalmazásait, következményeit és speciális eseteit mutatjuk be.

3.3.1 Alkalmazások matroidokra

Bázis-metszetek

A matroid metszet probléma egy variánsa a következő. Adott ismét az M_1 és M_2 matroid, egy $F \subseteq S$ halmazt nevezzünk **bázis-metszet**nek, ha előáll egy M_1-beli bázis és egy M_2-beli bázis metszeteként. Egy bázis-metszet mindig közös független, de a megfordítás nem igaz: ha mindkét matroid a szabad matroid, akkor S minden részhalmaza közös független, de csak az S alaphalmaz bázis-metszet. Másrészt egy nem-bővíthető közös független halmaz mindig bázis-metszet, de a megfordítás itt sem igaz: hurokmentes matroidok esetén például, ha van két diszjunkt bázis, akkor az üres halmaz bázis-metszet, amely bármely elemmel egyelemű közös függetlenné bővíthető.

Feladat 3.3.1 *Adjunk eljárást annak eldöntésére, hogy egy F közös független halmaz bázis-metszet-e.* (Szubrutinként használhatjuk Edmonds matroid metszet algoritmusát.)

Kérdés, hogy milyen elemszámú lehet egy bázis-metszet. Jelölje μ_{min} és μ_{max} a bázis-metszetek elemszámának minimumát illetve maximumát. Mivel egy halmaz pontosan akkor maximális elemszámú bázis-metszet, ha maximális elemszámú közös független, Edmonds algoritmusa segítségével μ_{max}-t meg tudjuk határozni.

Egyszerű fogással μ_{min} is megállapítható. Ehhez tekintsük az M_2 matroid M_2^* duálisát, és figyeljük meg, hogy az M_1-beli B_1 és az M_2-beli B_2 bázisok metszete akkor és csak akkor minimális elemszámú bázis-metszet, ha az M_2^* duális matroid $B_2^* := S - B_2$ bázisára a $B_1 \cap B_2^*$ halmaz az M_1 és M_2^* maximális elemszámú bázis-metszete. Ennek alapján először az Edmonds algoritmus segítségével az M_1 és M_2^* matroidoknak kiszámítjuk egy F' maximális elemszámú közös független halmazát. F'-t kiegészítjük M_1 egy B_1 bázisává valamint M_2^* egy B_2^* bázisává. Ekkor $F' = B_1 \cap B_2^*$ (az F' maximálitása miatt) és így $F := B_1 - F'$ az M_1 és M_2 matroidok egy minimális elemszámú bázis-metszete, éspedig az M_1-beli B_1 és az M_2-beli $B_2 := S - B_2^*$ bázisoké.

TÉTEL 3.3.1 *Ha az M_1 és M_2 matroidok minimális és maximális bázis-metszetének elemszáma μ_{min} illetve μ_{max}, akkor minden μ_{min} és μ_{max} közé eső egész j értékre létezik j elemű bázis-metszet.*

Biz. Tegyük fel, hogy $B_1 \cap B_2$ minimális, míg $B_1' \cap B_2'$ maximális elemszámú bázis-metszet. Az M_1 matroidban a $B_1' - B_1$ halmaz elemeit egymás után becserélhetjük a $B_1 - B_1'$ elemeire, és így M_1-bázisokon keresztül el tudunk jutni B_1-ből B_1'-be. Hasonlóképp az M_2 matroidban a $B_2' - B_2$ halmaz elemeit egymás után becserélhetjük a $B_2 - B_2'$ elemeire, és így M_2-bázisokon keresztül el tudunk jutni B_2ből B_2'-be. Miután ilyen cserénél az aktuális bázis-metszet elemszáma eggyel változik (nő vagy csökken), így minden μ_{min} és μ_{max} közé eső egész j értékre kapunk j elemű bázis-metszetet. •

Erősen független halmazok

A következő eredmény, amely a Rado tétel, az Edmonds tétel és a Kőnig tétel közös általánosításának tekinthető, valójában a metszettétel közvetlen folyománya. Tegyük fel, hogy egy páros gráf mindkét pontosztályán adva van egy-egy matroid. A gráf egy élhalmazát akkor nevezzük **erősen független**nek, ha párosítás (azaz minden pontot legfeljebb egyszer fed) és mindkét pontosztályban a fedett pontok halmaza a megfelelő matroidban független.

TÉTEL 3.3.2 (Brualdi) *Legyen a $G = (S, T; E)$ páros gráf S illetve T ponthalmazain adva az M_1 illetve az M_2 matroid. Az erősen független élek maximális száma egyenlő*

$$\min\{r_1(X) + r_2(Y) : X \subseteq S, Y \subseteq T, X \cup Y \text{ minden élt lefog}\}. \tag{3.23}$$

Biz. Az E élhalmazon definiáljuk az M_1' matroidot úgy, hogy egy halmaz független, ha S-ben minden pontot legfeljebb egyszer fed és a fedett pontok halmaza független M_1-ben. Ez nyilván matroid lesz, éspedig az a matroid, amely M_1-ből az elemek párhuzamos többszörözésével áll elő (minden $v \in S \cup T$ elemet $d_G(v)$-szer többszörözünk). Definiáljuk analóg módon az M_2' matroidot. Rögtön adódik, hogy egy élhalmaz akkor és csak akkor erősen független, ha az M_1' és az M_2' matroidok közös függetlenje. Az Edmonds tételből adódik, hogy a közös függetlenek maximális elemszáma egyenlő az

$$r_1'(E_1) + r_2'(E_2) \tag{3.24}$$

értékének minimumával, ahol $E_1 \cup E_2 = E$ és E_1 zárt M_1'-ben, E_2 pedig zárt M_2'-ben. Az M_1' matroid minden zárt halmaza olyan alakú, hogy egy $X_1 \subseteq S$ halmazra az X_1 pontjaival szomszédos élekből áll, és ekkor

$r_1'(E_1) = r(X_1)$. Hasonlóképp, M_2' egy E_2 zárt halmaza olyan alakú, hogy egy $X_2 \subseteq T$ halmazra, az X_2 pontjaival szomszédos élekből áll. Ebből adódóan (3.23) megegyezik a (3.24) minimumával. •

Amenyiben $|S| = |T|$ és a gráf egyetlen teljes párosításból áll, úgy visszajutunk Edmonds tételéhez. Tetszőleges páros gráf esetén, ha a két matroid egyike a szabad matroid, akkor Rado tételének a 3.1.4 tételben megfogalmazott általánosítását kapjuk (amely már tartalmazta a Kőnig tételt).

Indukált független halmazok

Legyen $M = (S, r)$ matroid és tegyük fel, hogy az S alaphalmaz elemei diszjunkt $(s_1, \bar{s}_1), \dots, (s_k, \bar{s}_k)$ párokba vannak állítva, ahol $|S| = 2k$. A metszettétel segítségével meg tudjuk állapítani hogy milyen nagy lehet egy olyan független halmaz, amely minden párból csak egy elemet tartalmazhat. Most egy rokon problémát vizsgálunk. Nevezzünk egy $F \subseteq S$ halmazt **indukált független**nek vagy röviden **i-független**nek, ha F független M-ben és $s_i \in F$ esetén $\bar{s}_i \in F$. Milyen nagy lehet egy indukált független halmaz? Legyen $S_1 := \{s_1, \dots, s_k\}$ és $S_2 := S - S_1$. Az S_1 valamely A részhalmazára legyen $\bar{A} := \{\bar{s} : s \in A\}$. (Speciálisan, $S_2 = \bar{S}_1$. Figyelem: $\bar{A}$ nem a komplementert jelöli.)

TÉTEL 3.3.3

$$\max\{|F| : F \text{ } i\text{-független}\} = \min\{r(S - A) + r(\bar{A}) : A \subseteq S_1\}. \tag{3.25}$$

Biz. Egy F indukált független halmaz $S - A$-ból a függetlenség miatt legfeljebb $r(S - A)$ elemet tartalmazhat, A-ból pedig az indukáltság miatt legfeljebb $r(\bar{A})$ elemet, így $|F| \leq r(S - A) + r(\bar{A})$, amiből a max $\leq$ min irány következik.

A fordított irányhoz kell találnunk egy F indukált független halmazt és egy $A \subseteq S_1$ halmazt, melyekre $|F| = r(\bar{A}) + r(S - A)$. Definiáljunk az S_1 halmazon két matroidot. M_1 legyen az S_2 összehúzásával keletkező matroid, azaz $M_1 = M \cdot S_1$, M_2 pedig az a matroid, amelyben egy A halmaz akkor független, ha $\bar{A}$ független M-ben (azaz M_2 az $M|S_2$ részmatroid S_1-re másolt példánya).

Legyen T az M_1 és M_2 matroidok egy maximális elemszámú közös független halmaza. Ekkor $T \in \mathcal{F}_2$ miatt $\bar{T}$ független M-ben. $\bar{T}$ kiegészíthető S_2-ből az S_2 egy maximális ($r(S_2)$ elemszámú) B halmazává, amely független M-ben. Miután T független M_1-ben is, így $F := T \cup B$ független M-ben, és a konstrukció miatt F indukált független.

A metszettétel miatt létezik olyan $A \subseteq S_1$ részhalmaz, amelyre $|T| = r_2(A) + r_1(S_1 - A)$. Most $r_2(A) = r(\bar{A})$ és $r_1(S_1 - A) = r((S_1 - A) \cup S_2) - r(S_2) = r(S - A) - r(S_2)$, amiből $|F| = |B| + |T| = r(S_2) + [r(\bar{A}) + r(S - A) - r(S_2)] = r(\bar{A}) + r(S - A)$, ami kellett. •

Megjegyzés Természetesen vetődik fel az a probléma, amikor olyan maximális elemszámú független halmazt keresünk, amely mindegyik párból 0 vagy 2 elemet tartalmaz. Ezt hívják matroid partnerproblémának (matroid parity). Kiderült, hogy ez sokkal komplexebb, mint a metszetprobléma, olyannyira, hogy például egy gráf maximális klikkjének NP-teljes feladata (meglehetősen áttételesen) megfogalmazható matroid partnerproblémaként. Ugyanakkor lineáris matroidokra Lovász megoldotta a matroid partnerproblémát. A súlyozott matroid partnerprobléma viszont még lineáris matroidokra is megoldatlan.

Közös bázisok elhelyezkedése

A súlyozott matroid metszettétel érdekes alkalmazásaként levezetünk egy "súlyozatlan" eredményt közös bázisokról.

TÉTEL 3.3.4 (Gröflin és Hoffman) *Legyen az S alaphalmazon M_1 és M_2 két k rangú matroid, melyeknek van közös bázisa. Ekkor adott $R \subseteq S$ részhalmazra*

$$\min\{|R \cap B| : B \text{ közös bázis }\} = \max\{\sum_{i=1}^{t} [k - r_{12}(S - R_i)]\} \tag{3.26}$$

ahol a maximum az R összes $\{R_1, \dots, R_t\}$ partíciójára megy, és $r_{12}(T)$ jelöli a T halmazban lévő maximális közös független halmaz elemszámát.

Megjegyzés. A metszettétel alapján $r_{12}(T) = \min_{X \subseteq T}\{r_1(X) + r_2(T - X)\}$. Emiatt (3.26) az alábbi ekvivalens formában írható.

$$\min\{|R \cap B| : B \text{ közös bázis }\} = \max\{\sum_{i=1}^{t} [k - (r_1(X_i) + r_2(Y_i)]\}, \tag{3.27}$$

ahol $\{R_i\}$ partíciója R-nek és minden i indexre $\{R_i, X_i, Y_i\}$ partíciója S-nek.

Biz. Egy közös független halmaz $S-R_i$-ből legfeljebb $r_{12}(S-R_i)$ elemet tartalmaz, így egy közös bázis R_i-ből legalább $k-r_{12}(S-R_i)$ elemet, és emiatt R-ből legalább $\sum_{i=1}^{t}[k-r_{12}(S-R_i)]$ elemet tartalmaz, amiből a max $\leq$ min egyenlőtlenség következik.

A fordított irányhoz azt kell látnunk, hogy létezik B közös bázis, valamint $\{R_i, X_i, Y_i\}$ halmazok $i=1,\ldots,t$-re úgy, hogy $\{R_1, R_2, \ldots, R_t\}$ partíciója R-nek, minden i indexre $\{R_i, X_i, Y_i\}$ partíciója S-nek és $|R\cap B| = \sum_{i=1}^{t}[k-r_1(X_i)-r_2(Y_i)]$. Az $R=\emptyset$ esetben az $R_1 := X_1 := \emptyset, Y_1 := S$ választás, míg az $R=S$ esetben az $R_1 := S, X_1 := Y_1 := \emptyset$ választás bármely B közös bázissal jó lesz, így feltehető, hogy $\emptyset \subset R \subset S$.

Legyen $c := \chi_{S-R}$ és alkalmazzuk a 3.2.3 tételt. Mivel c változása 1, a tétel szerint létezik c-nek olyan $c = c_1 + c_2$ felbontása, hogy mind c_1, mind c_2 1-szűk. Eltolással feltehető, hogy c_1 különböző értékei $1, 2, \ldots, t$. Vezessük be $i=1,\ldots,t$-re a következő jelöléseket. Legyen $R_i := \{s\in R : c_1(s) = i\}$, $X_i := \{s \in S : c_1(s) \geq i+1\}$, $Y_i := \{s \in S : c_2(s) \geq 1-i\}$. Itt az R_i halmazok között lehetnek üresek is, és X_t biztosan az. Mindenesetre $\{R_1, \ldots, R_t\}$ az R-nek partíciója, és minden i-re $\{R_i, X_i, Y_i\}$ partíciója S-nek.

Az (1.13) képlet alapján tudjuk, hogy $\hat{r}_1(c_1) = r_1(S) + \sum_{i=1}^{t} r_1(X_i)$ és $\hat{r}_2(c_2) = (-t)r_2(S) + \sum_{i=1}^{t} r_2(Y_i)$. (Ezen utóbbi rögtön látszik, ha $R_t \neq \emptyset$, míg ha R_t üres, úgy $S = Y_t$, és emiatt $\hat{r}_2(c_2) = (-t+1)r_2(S) + \sum_{i=1}^{t-1} r_2(Y_i) = (-t)r_2(S) + \sum_{i=1}^{t} r_2(Y_i)$.)

A 3.2.3 tétel nyomán van egy B közös bázis, amelyre $c(B) = |B-R| = \hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) = [r_1(S) + \sum_{i=1}^{t} r_1(X_i)] + [(-t)r_2(S) + \sum_{i=1}^{t} r_2(Y_i)] = (1-t)k + \sum_{i=1}^{t}[r_1(X_i) + r_2(Y_i)]$, amiből $|R\cap B| = k - |B-R| = k - \{(1-t)k + \sum_{i=1}^{t}[r_1(X_i)+r_2(Y_i)]\} = \sum_{i=1}^{t}[k - r_1(X_i) - r_2(Y_i)]$. •

Partíció-korlátos bázisok

Adott egy $M=(S,r)$ matroid és az alaphalmaznak egy $\mathcal{P}$ partíciója. Olyan bázist keresünk, amelynek metszete minden partíció résszel előre megadott korlátok közé esik. Legyen $f : \mathcal{P} \to Z_+$, illetve $g : \mathcal{P} \to Z_+$ alsó és felső korlátok, melyekre feltesszük, hogy $X \in \mathcal{P}$ esetén $f(X) \leq g(X) \leq |X|$. A kérdés az, hogy mikor létezik olyan bázis, amely mindegyik $X\in\mathcal{P}$ partíció részt legalább $f(X)$ és legfeljebb $g(X)$ elemben metszi. A 2.2.6 feladatban r-uniform matroidokra már megadtuk ennek a feltételét, ahol tehát az volt a kérdés, hogy mikor létezik egy olyan r elemű halmaz, amelynek mindegyik partíció résszel való metszete adott korlátok közé esik. Az ott megfogalmazott eredmény valójában a következő tétel specializált esete. A tétel megfogalmazásához jelölje $\mathcal{P}^*$ azon halmazok rendszerét, melyek $\mathcal{P}$ néhány tagjának egyesítéseként állnak elő. Terjesszük ki f-t (és g-t) a $\mathcal{P}^*$ tagjaira a természetes módon: $f(S_{i_1}\cup\ldots\cup S_{i_j}) := f(S_{i_1}) + \ldots + f(S_{i_j})$.

TÉTEL 3.3.5 *Egy* (r rang- és t ko-rangfüggvényű) *M matroidnak akkor és csak akkor létezik olyan B bázisa, amelyre*

(i) *$|X\cap B| \leq g(X)$ minden $X\in\mathcal{P}$-re, ha minden $Z\in\mathcal{P}^*$ halmazra fennáll*

$$g(Z) \geq t(Z), \text{ vagy ekvivalensen } g(Z) + r(S-Z) \geq r(S), \tag{3.28}$$

(ii) *$|X\cap B| \geq f(X)$ minden $X\in\mathcal{P}$-re, ha minden $Z\in\mathcal{P}^*$ halmazra fennáll*

$$f(Z) \leq r(Z) \tag{3.29}$$

(iii) *$f(X) \leq |X\cap B| \leq g(X)$ minden $X\in\mathcal{P}$-re, ha külön-külön létezik* (i)*-t kielégítő és* (ii)*-t kielégítő bázis, azaz minden $Z\in\mathcal{P}^*$ halmazra mind* (3.28)*, mind* (3.29) *fennáll.*

Biz. Ha az (i) részben a kívánt B bázis létezik, akkor $g(Z) \geq |B\cap Z| \geq t(Z)$ és így (3.28) szükséges. Az elegendőség igazolásához legyen M_1 a g felső korlát által meghatározott partíciós matroid és $M_2 := M$. Azt kell kimutatnunk, hogy létezik $k := r(S)$ elemű közös független halmaz. Ha nincs, akkor a metszettétel szerint az $r_1(Z) + r_2(S-Z) \geq k$ egyenlőtlenség megsérül valamilyen Z-re. Válasszuk Z-t minimális r_1-rangúnak és ezen belül maximális elemszámúnak. Ekkor egyrészt Z-nek nincsen z elvágó eleme, azaz olyan, amelyre $r_1(Z-z) = r_1(Z)-1$, mert akkor $Z-z$ is sértő. Másrészt Z zárt M_1-ben, hiszen a lezártja is sértő. Márpedig a partíciós matroidban az elvágó elem mentes zárt halmazok éppen a $\mathcal{P}^*$ tagjai, és ezekre (3.28) épp az $r_1(Z) + r_2(S-Z) \geq k$ egyenlőtlenség.

Az (ii) rész rögtön következik az (i)-részből, ha azt a duális M^* matroidra és a $g^*(X) := |X| - f(X)$ függvényre alkalmazzuk. Miután $g^*(Z) = |Z| - f(Z)$ és $t^*(Z) = |Z| - r(Z)$, az M^*-ra és g^*-ra felírt (3.28) éppen a (3.29) feltétellel ekvivalens.

Az (iii) rész bizonyításához tekintsünk egy olyan F_0 független halmazt, amelyre $|F_0\cap X| = f(X)$ minden $X\in\mathcal{P}$-re. Az (ii) rész miatt ilyen F_0 létezik. Alkalmazzuk Edmonds matroid-metszet algoritmusát a g által meghatározott M_1 partíciós matroidra és az $M_2 := M$ matroidra. Miután az (i) feltevés miatt ennek a két matroidnak létezik közös bázisa és az algoritmus bármely közös független halmazzal indítható, az F_0-ból indulva az algoritmus megtalál egy ilyen B közös bázist. Az Edmonds algoritmus egyszerűen megfigyelhető tulajdonsága, hogy az aktuális F közös független halmaz cseréjekor nyert eggyel nagyobb elemszámú F' közös független halmaz lezártja mindkét matroidban magában foglalja az F lezártját, azaz $i=1,2$-re $\sigma_i(F) \subset \sigma_i(F')$ (3.1.5 feladat). Ebből következik, hogy $|F'\cap X| \geq |F\cap X|$ minden $X\in\mathcal{P}$-re. Ezért a végső B bázisra is $|B\cap X| \geq |F_0\cap X| = f(X)$ minden $X\in\mathcal{P}$-re. •

Feladat 3.3.2 *A dott $m : \mathcal{P} \to Z_+$ függvényhez akkor és csak akkor létezik olyan B bázis, amelyre $|X \cap B| = m(X)$ minden $X \in \mathcal{P}$-re, ha $m(S) = r(S)$ és $m(Z) \geq t(Z)$ minden $Z \in \mathcal{P}^*$ halmazra fennáll* (ami azzal ekvivalens, hogy $m(S) = r(S)$ és $m(Z) \leq r(Z)$ minden $Z \in \mathcal{P}^*$ halmazra fennáll).

Feladat 3.3.3 *A* 3.3.2 *feladatra valamint a 1.4 szakaszban bebizonyított 1.4.10 lemmára és a 1.4.12 gyakorlatra támaszkodva adjunk alternatív bizonyítást a* 3.3.5 *tétel (iii) részére.* •

Egy másik lánctulajdonság

A 3.3.5 tételben megfogalmazott jelenséget (:*ha az alsó korlátos feladat illetve a felső korlátos feladat különkülön megoldható, akkor együtt is)* **lánctulajdonság**nak (linking) nevezzük. Egy régebbi előfordulása a Mendelsohn-Dulmage tétel, amely azt állítja, hogy *ha egy $(S, T; E)$ páros gráf pontjainak egy $X \subseteq S$ részhalmaza és egy $Y \subseteq T$ részhalmaza is fedhető egy-egy párosítással, akkor létezik olyan párosítás is, amely egyszerre fedi az X és az Y halmazokat.* Két további megjelenését tartalmazza a 4.1.12 és a 4.1.13 tétel. A Mendelsohn-Dulmage tétel egy más irányú kiterjesztése matroid metszetekre vonatkozik.

TÉTEL 3.3.6 (Kundu és Lawler) *Legyen $M_1 = (S, r_1)$ és $M_2 = (S, r_2)$ két matroid, melyek lezárási függvényét jelölje σ_1 és σ_2. Legyen F_1 és F_2 két közös független halmaz. Ekkor létezik olyan F közös független halmaz, amelyre $\sigma_1(F) \supseteq F_1$ és $\sigma_2(F) \supseteq F_2$.*

Biz. Legyen F olyan közös független, amely M_1-ben feszíti F_1-t és amelyre $|F \cap F_2|$ maximális. Állítjuk, hogy F feszíti M_2-ben F_2-t. Ha indirekt nem feszítené, akkor létezik egy $s \in F_2 - \sigma_2(F)$ elem, amelyre $F + s$ független M_2-ben. $|F \cap F_2|$ maximalitása miatt $F + s$ függő M_1-ben és legyen $C := C_1(F, s)$ a keletkező alapkör. Mivel F_2 közös független, $C \not\subseteq F_2$. Legyen $t \in C - F_2$. Ekkor az $F' := F - t + s$ halmaz közös független, M_1-ben ugyanazt feszíti, mint az F, és $|F' \cap F_2| > |F \cap F_2|$, ellentmondásban F maximális választásával. •

Gyakorlat 3.3.4 *Vezessük le a Mendelsohn-Dulmage tulajdonságot a Kundu-Lawler tételből.*

3.3.2 Alkalmazások gráfokra: párosítások, fák, irányítások

A matroid metszet probléma fő motivációját páros gráfok párosítás problémája jelentette, de számos más, gráfokra vonatkozó optimalizálási feladat megoldására is használható.

Maximális súlyú teljes párosítások

Amiképp a metszettétel általánosítja Kőnig tételét, a 3.2.3 súlyozott metszettételből könnyen levezethető Egerváry alaperedménye páros gráfok maximális súlyú teljes párosításának súlyáról.

TÉTEL 3.3.7 (Egerváry) *Legyen $G = (A, B; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráf, melynek élhalmazán adott egy c egészértékű súlyozás. Ekkor a teljes párosítások maximális súlyára*

$$\max\{c(P) : P \textit{ teljes párosítás}\} = \min\{\textstyle\sum_{v \in A \cup B} \pi(v) : \pi \textit{ egészértékű súlyozott lefogás}\}, \tag{3.30}$$

ahol a $\pi : A \cup B \to \mathbf{Z}$ függvényre akkor mondjuk, hogy **súlyozott lefogás**, *ha minden uv élre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$.*

Biz. A max $\leq$ min egyenlőtlenség könnyű, a fordított irányhoz legyen az E halmazon M_1 és M_2 az a partíciós matroid, amelyben egy $F \subseteq E$ halmaz akkor független, ha $d_F(v) \leq 1$ minden A-beli csúcsra illetve minden B-beli csúcsra fennáll. Ekkor a közös bázisok a teljes párosítások. A 3.2.3 tétel szerint a teljes párosítások maximális súlya $\min\{\hat{r}_1(c_1) + \hat{r}_2(c_2) : c_1 + c_2 = c, c_i \text{ egészértékű}\}$. Legyen c_1, c_2 optimális megoldás. Annak megfelelően, hogy egy v csúcs A-ban van vagy B-ben, definiáljuk $\pi(v)$-t a v végű élek c_1-súlyának illetve c_2-súlyának maximumaként. Ekkor π súlyozott lefogás és könnyen látszik, hogy $\hat{r}_1(c_1) = \sum[\pi(v) : v \in A]$ valamint $\hat{r}_2(c_2) = \sum[\pi(v) : v \in B]$. Így a teljes párosítások maximális súlya egyenlő a $\sum[\pi(u) : u \in A \cup B]$ értékkel. •

Fokszámkorlátos fák

Lovász 2.6.14 tétele felfogható az olyan összefüggő $G = (S, T : E)$ páros gráfok jellemzéseként, melyekben van olyan erdő, amely minden T-beli pontban másodfokú, vagy ekvivalensen, van olyan feszítő fa, amely minden T-beli pontban legalább másodfokú. Ennek általánosítása a következő.

TÉTEL 3.3.8 *Legyen $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf és $T \subset V$ a G pontjainak egy stabil részhalmaza. Legyen továbbá $f_T : T \to \mathbf{Z}_+$ és $g_T : T \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f_T \leq g_T$. Akkor és csak akkor létezik G-nek olyan F feszítő fája,*

(i) *amelyre $d_F(v) \leq g_T(v)$ minden $v \in T$-re, ha*

$$g_T(X) \geq |X| + c(X) - 1 \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq T \text{ halmazra,} \tag{3.31}$$

ahol $c(X)$ jelöli a $G - X$ komponenseinek a számát,

(ii) *amelyre $d_F(v) \geq f_T(v)$ minden $v \in T$-re, ha*

$$f_T(X) \leq |X| + |\Gamma(X)| - 1 \text{ minden } \emptyset \subset X \subseteq T \text{ halmazra,} \tag{3.32}$$

ahol $|\Gamma(X)|$ jelöli az X-beli pontok szomszédainak halmazát,

(iii) *amelyre $f_T(v) \leq d_F(v) \leq g_T(v)$ minden $v \in T$-re, ha mind* (3.32), *mind* (3.31) *teljesül.*

Biz. Szükségesség. Legyen F egy feszítő fa és legyen $X \subseteq T$ nemüres halmaz. Jelölje F_X az F-nek az X-szel szomszédos élekből álló részerdejét.

Legyen most F olyan, amelyre $d_F(v) \leq g_T(v)$ fennáll minden $v \in T$-re. Mivel egy feszítő fa V tetszőleges t részes partíciójára legalább $t-1$ keresztélt tartalmaz, így az X pontjaiból mint egyelemű halmazokból valamint a $G - X$ komponenseiből álló $|X| + c(X)$ részes partícióra F legalább $|X| + c(X) - 1$ keresztélt tartalmaz. E keresztélek persze mind X pontjaival szomszédosak (hiszen két komponens között egyáltalán nincs él), így a kereszt élek száma legfeljebb $g(X)$, és a kettőt összevetve (3.31) következik.

Legyen most F olyan, hogy $d_F(V) \geq f_T(v)$ fennáll minden $v \in T$-re, akkor egyrészt $|F_X| \geq f_T(X)$, másrészt, mivel egy erdő élszáma kisebb a pontszámánál, $|F_X| \leq |V(F_X)| - 1 = |X| + |\Gamma_{F_X}(T)| - 1 \leq |X| + |\Gamma(X)| - 1$, és a kettő összevetéséből (3.32) következik.

Az elegendőség bizonyításához feltehetjük, hogy G páros gráf. Ha ugyanis $\bar{T} := V - T$ feszítene élt, akkor ezeket egy-egy ponttal felosztva, az osztáspontokat T-hez véve és mindegyik osztásponthoz 0 alsó illetve ∞ felső korlátot rendelve az eredetivel ekvivalens feladatot kapunk (mind a primál oldalon, mind a feltételi oldalon).

Ezek szerint az T pontjai az élhalmaz egy partícióját határozzák meg. Azzal a jelölési konvencióval élünk, hogy a T egy X részhalmazával szomszédos élek halmazát X'-vel jelöljük, és értelemszerűen az f és g függvényeket az élhalmazra is kiterjesztjük. X' tehát néhány partíció-rész uniója. Legyen M a gráf körmatroidja és alkalmazzuk a 3.3.5 tételt S helyén E-vel.

Most $r(E) = |V|-1$ és $r(E-X')$ nem más, mint a $G-X'$ gráf körmatroidjának rangja, azaz $|V-X|-c(X)$. Így a $g(X') + r(E - X') \geq r(E)$ feltétel azzal ekvivalens, hogy $g(X) + |V - X| - c(X) \geq |V| - 1$, azaz $g(X) \geq |X| + c(X) - 1$. Vagyis (3.31) ekvivalens a (3.28) feltétellel.

Hasonlóképpen a (3.29)-beli $f(X') \leq r(X')$ feltételt elég a körmatroid összefüggő halmazaira ellenőrizni. Ilyenekre viszont $r(X')$ nem más, mint a $X \cup \Gamma(X)$ halmaz által feszített gráf rangja, ami $|X \cup \Gamma(X)| - 1$. Így az $f(X') \leq r(X')$ feltétel azzal ekvivalens, hogy $f(X) \leq |X \cup \Gamma(X)| - 1 = |X| + \Gamma(X) - 1$. Vagyis (3.32) ekvivalens a (3.29) feltétellel. •

Maximális súlyú fenyvesek

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán egy $c : A \to \mathbf{R}_+$ súlyozás. A maximális súlyú fenyves problémája súlyozott matroid metszet problémaként fogalmazható meg, ahol az egyik matroid az irányítatlan alapgráf körmatroidja, míg a másik az a partíciós matroid, amelyben egy élhalmaz akkor független, ha minden csúcsba legfeljebb egy éllel lép be. Alkalmazhatjuk a súlyozott matroid metszet algoritmust, és a súlyozott metszet tételből levezethető az alábbi min-max formula. Ehhez nevezzünk egy (p, y) párt fedésnek, ha $p : V \to \mathbf{R}_+, y : 2^V \to \mathbf{R}_+$ és D minden uv élére $c(uv) \leq p(v) + \sum[y(B) : \{u, v\} \subseteq B \subseteq V]$. A fedés **értéke** $\sum_{v \in V} p(v) + \sum[y(B)(|B| - 1) : B \subseteq V]$.

TÉTEL 3.3.9 (Edmonds, Chu és Liu) *A maximális súlyú fenyves súlya egyenlő a minimális értékű (p, y) fedés értékével. Ha c egészértékű, úgy az optimális (p, y) fedés is választható egészértékűnek.* •

Megjegyzendő, hogy a tételnek létezik viszonylag egyszerű (algoritmikus) direkt bizonyítása is.

Erősen összefüggővé tevés

Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő. Nevezzünk élek egy részhalmazát **kötés**nek, ha összehúzásával erősen összefüggő digráfot kapunk. Célunk egy minimális elemszámú, vagy általánosan minimális költségű kötést meghatározni. Megjegyezzük, hogy egy élhalmaz pontosan akkor kötés, ha minden irányított vágást lefog.

Lemma 3.3.10 *Egy-egy értelmű kapcsolat van D kötései és két matroid közös bázisai között.*

Biz. Minden $e = uv$ élre helyezzünk el két új pontot: az e_v fej- és az e_u tőpontot, és legyen S az új pontok halmaza. Legyen $\mathcal{P} := \{Z \subseteq V$: nem lép ki Z-ből él$\}$ és minden $Z \in \mathcal{P}$ halmazra legyen $F(Z) := \{e_v : e = uv \in A, v \in Z\} \cup \{e_u : e = uv \in A, u \in Z\}$. Legyen $\mathcal{F} := \{F(Z) : Z \in \mathcal{P}\}$. $\mathcal{F}$ tagjain definiáljuk a p függvényt a következőképpen: $p(\emptyset) = 0, p(S) = |A|$ és $p(X) = i(Z) + 1$, ha $X = F(Z), Z \in \mathcal{P}, Z \neq V, \emptyset$, ahol $i(Z)$ jelöli a Z által feszített élek számát. Könnyen látható, hogy $\mathcal{F}$ keresztező halmazrendszer és p keresztező szupermoduláris $\mathcal{F}$-en. Így a 2.5.13 következmény alapján $\mathcal{B} := \{B \subseteq S : |B| = p(S), |B \cap X| \geq p(X)$ minden $X \in \mathcal{F}\}$ halmazrendszer egy M_1 matroid bázisait alkotja. Figyeljük meg, hogy $\mathcal{B}$ nem üres, hiszen a fejpontok halmaza biztosan benne van. Legyen M_2 az a partíciós matroid S-n, amelyben egy halmaz akkor független, ha minden él fejpontja és tőpontja közül legfeljebb az egyiket tartalmazza.

Könnyen ellenőrizhető, hogy valamely $C \subseteq A$ kötésre a C fejpontjai az $A - C$ tőpontjaival együtt közös bázist alkotnak, és megfordítva, ha B közös bázis, akkor azon D-beli élek halmaza, melyek fejpontja B-ben van egy kötést alkot. •

Legyen most minden fejpont költsége 1, a tőpontoké pedig 0. Ekkor egy minimális költségű közös bázis éppen egy minimális elemszámú kötésnek felel meg. Általánosabban, ha a D élhalmazán adott egy c nemnegatív költségfüggvény, akkor az $e = uv$ él fejpontjának költségét $c(e)$-vel definiálva kapjuk, hogy a minimális költségű közös bázisok minimális költségű kötéseknek felelnek meg.

k-élösszefüggő irányítások

Nash-Williams egy tétele szerint egy $2k$-élösszefüggő $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak létezik k-élösszefüggő irányítása. Tegyük most fel, hogy minden élre az él lehetséges két irányának adott egy költsége. Célunk minimális költségű k-élösszefüggő irányítást keresni.

Lemma 3.3.11 *Egy-egy értelmű kapcsolat van G k-élösszefüggő irányításai és két matroid közös bázisai között.*

Biz. Minden $e = uv \in E$ élre helyezzük el az e_v és e_u új pontokat, és legyen S az új pontok halmaza. Minden $Z \subseteq V$ halmazra legyen $F(Z) := \{e_v : e = uv \in A, v \in Z\}$. Legyen $\mathcal{F} := \{F(Z) : \emptyset \subset Z \subset V\}$. $\mathcal{F}$ tagjain definiáljuk a p függvényt a következőképpen: $p(\emptyset) = 0, p(S) = |A|$ és $p(X) = i(Z) + k$, ha $F(Z) = X \in \mathcal{F}$, ahol $i(Z)$ jelöli a Z által feszített élek számát. Különben $p(X) := -\infty$. Könnyen látható, hogy $\mathcal{F}$ keresztező halmazrendszer és p keresztező szupermoduláris $\mathcal{F}$-en. Így a 2.5.13 következmény alapján $\mathcal{B} := \{B \subseteq S : |B| = p(S), |B \cap X| \geq p(X)$ minden $X \in \mathcal{F}\}$ halmazrendszer egy M_1 matroid bázisait alkotja. Legyen M_2 az a partíciós matroid S-n, amelyben egy halmaz akkor független, ha minden él fejpontja és tőpontja közül legfeljebb az egyiket tartalmazza.

Legyen B egy közös bázis. Ez minden élre a ráhelyezett két pont közül az egyiket tartalmazza. Irányítsuk az élt errefelé, és jelölje D az így kapott digráfot. Ekkor D k-élösszefüggő, mert $\varrho(Z) = \sum_{v \in Z} \varrho(v) - i(Z) = |B \cap F(Z)| - i(Z) \geq p(F(Z)) - i(Z) \geq k$. Hasonlóképpen látható, hogy ha D egy k-élösszefüggő irányítás, akkor a fejpontok B halmaza az M_1 és M_2 matroidok közös bázisát alkotja. •

Egy $e = uv$ élre az e_v új pont költségét definiáljuk az e-nek v felé való irányításának a költségével. Ekkor a minimális költségű k-élösszefüggőre való irányítás egy minimális költségű közös bázisnak felel meg.

2007. május 6. ulmat33

3.3.3 Alkalmazások gráfokra: gyökeres összefüggőség

Gyökeresen k-élösszefüggő digráfok

Legyen $D = (V, A)$ gyökeresen k-élösszefüggő irányított gráf, ami azt jelenti, hogy D-nek van egy r kijelölt gyökérpontja, amelyből D minden pontjába vezet k élidegen út. Menger tétele alapján tudjuk, ez azzal ekvivalens, hogy $\varrho(X) \geq k$ minden nemüres $X \subseteq V - r$ halmazra. (Edmonds 2.6.1 fenyő tételének gyenge változata szerint pedig azzal, hogy D-ben létezik k élidegen r gyökerű feszítő fenyő: erre azonban nem lesz szükségünk). Tegyük fel, hogy D élhalmazán adott egy $c : A \to \mathbf{R}_+$ nemnegatív költségfüggvény, és szeretnénk meghatározni D minimális költségű gyökeresen k-élösszefüggő részgráfját. Ez még a $k = 1$ esetben sem kézenfekvő, amikor egy minimális költségű r gyökerű feszítő fenyő kiszámításával ekvivalens. A feladatot visszavezetjük a súlyozott matroid metszet problémára. Feltehetjük, hogy a gyökérbe egyáltalán nem lép be él.

Lemma 3.3.12 *Egy r gyökerű $D' = (V, A')$ digráf akkor és csak akkor élelhagyásra nézve minimális gyökeresen k-élösszefüggő, ha D' minden r-től különböző pontjának befoka k és a csúcsok minden nemüres $X \subseteq V - r$ részhalmaz által feszített élek $i'(X)$ számára $i'(X) \leq k(|X| - 1)$.*

Biz. Legyen D' élelhagyásra nézve minimális gyökeresen k-élösszefüggő. Ekkor minden gyökértől különböző pont befoka pontosan k, mert ha egy $v \neq r$ csúcs befoka k-nál nagyobb volna, akkor véve k élidegen utat r-ből v-be, az ezek által nem használt v-be lépő éleket kihagyhatnánk a digráfból a gyökeres k-élösszefüggőség megsértése nélkül. Az $X \subseteq V - r$ halmazra

$$\varrho'(X) = \sum[\varrho'(v) : v \in X] - i'(X) = k|X| - i'(X) \tag{3.33}$$

és $\varrho'(x) \geq k$ miatt $i'(X) = k|X| - \varrho'(X) \leq k|X| - k = k(|X| - 1)$.

Megfordítva, ha minden r-től különböző pont befoka k, akkor (3.33) érvényben van, így $i'(X) \leq k|X| - k$ miatt $\varrho'(X) = k|X| - i'(X) \geq k$, azaz D' gyökeresen k-élösszefüggő. Ráadásul a fokszám feltétel miatt D' minimálisan gyökeresen k-élösszefüggő. •

A $D = (V, A)$ digráf élhalmazon definiáljunk két matroidot. Legyen M_2 az a partíciós matroid, amelyben minden pontba legfeljebb k él lép be, míg M_1 az a matroid, amelyben egy F élhalmaz akkor független, ha minden X nemüres részhalmazára $|X| \leq k|V(X)| - k$. Miután a $b(X) := k|V(X)| - k$ függvény metsző szubmoduláris, így a 2.5.8 tétel miatt M_2 valóban matroid. Könnyen látható, hogy F pontosan akkor független, ha a csúcsok bármely $Z \subseteq V - r$ nemüres részhalmaza legfeljebb $k(|Z| - 1)$ F-beli élt feszít. (A 2.4.10 tételből könnyen kiolvasható és a következő fejezet a 4.2.1 tételében ezt meg is tesszük, hogy M_1-ben egy halmaz pontosan akkor független, ha felbontható k erdőre, de ezen szép jellemzésre most nincs szükségünk).

A lemma szerint az élelhagyásra nézve minimális gyökeresen k-élösszefüggő részgráfok éppen a két matroid közös bázisai. Ennek alapján a súlyozott matroid metszet algoritmus segítségével ki lehet számolni egy minimális költségű gyökeresen k-élösszefüggő részgráfot. Annak érdekében, hogy az algoritmust ténylegesen futtatni lehessen, szükség van egy szubrutinra, amelynek segítségével az M_1 matroidban egy halmaz függetlenségét el tudjuk dönteni. A szakasz végén mutatunk egy ilyen eljárást.

Gyökeresen k-összefüggő digráfok

Azt mondjuk, hogy két s-ből t-be vezető út **nyíltan** diszjunkt, ha végpontjaiktól eltekintve diszjunktak. Jelölje $\kappa(r, z)$ az r-ből z-be vezető nyíltan diszjunkt utak maximális számát. A $D = (V, A)$ digráfot akkor nevezzük az $r \in V$ csúcsból **gyökeresen k-pontösszefüggő**nek (rövidebben gyökeresen k-összefüggőnek), ha D minden z csúcsára $\kappa(r, z) \geq k$. Megmutatjuk, hogy a minimális költségű gyökeresen k-összefüggő részgráf problémája is megfogalmazható matroidmetszetként, bár itt a visszavezetés némileg trükkösebb, mint az élösszefüggő esetben.

Tekintsük az $X = (X_K, X_B)$ **párhalmaz**okat, ahol $X_B \subseteq X_K \subseteq V - r$. X_K a párhalmaz **külső** tagja, míg X_B a **belső**. Egy párhalmaz **triviális**, ha $X_B = \emptyset$. Az X és Y párhalmazok **metszete** $(X_K \cap Y_K, X_B \cap Y_B)$, míg **uniója** $(X_K \cup Y_K, X_B \cup Y_B)$. Egy uv él **belép** az X párhalmazba, ha mind X_K-ba, mind X_B-be belép. $\varrho_D(X) = \varrho(X)$ jelöli az X-be lépő élek számát. Az X párhalmaz **feszíti** az uv élt, ha $u \in X_K$, $v \in X_B$. Jelölje $I_D(X) = I(X)$ az X által feszített élek halmazát és legyen $i_D(X) = i(X) := |I(X)|$. Egy $X = (X_K, X_B)$ párhalmazra legyen $\mu(X) := |X_K| - |X_B| = |X_K - X_B|$.

Gyakorlat 3.3.5 *ϱ_D szubmoduláris, i_D szupermoduláris, μ pedig moduláris.*

Lemma 3.3.13 *Az r gyökerű $D = (V, A)$ digráf akkor és csak akkor gyökeresen k-összefüggő, ha minden nemtriviális $X = (X_K, X_B)$ párhalmazra*

$$\varrho(X) + \mu(X) \geq k. \tag{3.34}$$

Biz. Tegyük fel, hogy D gyökeresen k-összefüggő. Az $X = (X_K, X_B)$ párhalmazhoz válasszunk egy $z \in X_B$ pontot. Ekkor létezik r-ből z-be k nyíltan diszjunkt út. Ezen utak mindegyike vagy egy X-be belépő élt használ vagy egy $X_K - X_B$-beli csúcsot, így valóban $\varrho(X) + \mu(X) \geq k$.

A megfordításhoz tegyük fel (3.34)-t. Jelölje $\alpha \geq 0$ az r-ből z-be menő párhuzamos élek számát és D' az ezen α él törlésével D-ből keletkező digráfot. Azt kell kimutatnunk, hogy D'-ben létezik $k' := k - \alpha$ nyíltan diszjunkt út r-ből z-be, hiszen ezekhez hozzávéve az eltörölt élekből álló α darab egyélű rz utat D-ben kapunk k nyíltan diszjunkt rz utat. Menger tétele szerint, ha D'-ben nem létezik k' diszjunkt rz út, akkor van egy k'-nél kisebb elemszámú $Z \subseteq V - \{r, z\}$ halmaz, amelyre $D' - Z$-ben nincs út r-ből z-be. Jelölje X_B azon pontok halmazát, amelyekből z elérhető $D' - Z$-ben, és legyen $X_K := X_B \cup Z$. Ekkor az $X = (X_K, X_B)$ párhalmazra $\varrho_D(X) + \mu(X) = \alpha + |Z| < k$, azaz (3.34) nem teljesül. •

Nevezzünk egy digráfot k-**lomb**nak, ha gyökeresen k-összefüggő, de bármely élének elhagyása után már nem az.

Állítás 3.3.14 *Ha a $H = (V, B)$ digráf k-lomb, akkor $\varrho(v) = k$ minden $v \in V - r$ pontra és $\varrho(r) = 0$.*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy $\varrho(z) \geq k+1$ valamely z pontra. Válasszunk k nyíltan diszjunkt utat r-ből z-be. Mivel z-be k-nál több él lép be, van olyan $e = uz$ él, amelyet ezen utak egyike sem használ. Állítjuk, hogy a $H' = H - e$ digráf is gyökeresen k-összefüggő, mert ha nem volna az, akkor a 3.3.13 lemma miatt valamely $X = (X_K, X_B)$ párhalmazra $\varrho_{H'}(X) + \mu(X) < k$. Mivel $\varrho_H(X) + \mu(X) \geq k$, így e belép X-be és ezért $z \in X_B$. De a z-be vezető k nyíltan diszjunkt út mindegyike vagy tartalmaz X-be lépő élt vagy használ $X_K - X_B$-beli pontot, ezért $\varrho_{H'}(X) + \mu(X) \geq k$, ellentmondás. •

TÉTEL 3.3.15 *Legyen $D = (V, A)$ az $r \in V$ csúcsból gyökeresen k-összefüggő. Az A alaphalmazon létezik két matroid úgy, hogy az élek egy $k(|V| - 1)$ elemű $B \subseteq F$ részhalmazából álló $D_B = (V, B)$ digráf akkor és csak akkor k-lomb, ha B a két matroid közös bázisa.*

Biz. Feltehetjük, hogy az r gyökérbe egyáltalán nem lép be él. Az élek egy $J \subseteq A$ részhalmazára legyen $V(J) := \{u : u$ töve vagy feje egy J-beli élnek$\}$. Legyen $H(J) := \{v : u$ feje egy J-beli élnek$\}$. Legyen

$$b(J) := (k-1)|H(J)| + |V(J)| - k, \text{ ha } J \neq \emptyset \tag{3.35}$$

és $b(\emptyset) = 0$. Könnyen ellenőrizhetően mind a $|V(J)|$, mind a $|H(J)|$ függvény teljesen szubmoduláris, így b metsző szubmoduláris. A definícióból látszik, hogy b monoton növő, azaz $I \subseteq J$ esetén $b(I) \leq b(J)$. Jelölje M_1' az A alaphalmazon a b metsző szubmoduláris függvény által definiált matroidot, amelyben tehát egy $F \subseteq A$ halmaz akkor független, ha minden $J \subseteq F$ részhalmazára $|J| \leq b(J)$.

Megjegyzés A $k = 1$ speciális estben egy F halmaz pontosan akkor független, ha minden J részhalmazára $|J| \leq b(J) = (k-1)|H(J)| + |V(J)| - k = |V(J)| - 1$, ami pont az irányítatlan alapgráf körmatroidja.

Hasznos az M_1'-beli függetlenség alábbi ekvivalens megfogalmazása.

Állítás 3.3.16 *F akkor és csak akkor független M_1'-ben, ha minden nemtriviális $X = (X_K, X_B)$ párhalmazra*

$$i_F(X) \leq k(|X_B| - 1) + \mu(X). \tag{3.36}$$

Biz. Legyen F független M_1'-ben és tekintsük a $J := I_F(X)$ halmazt. Ha ez üres, akkor $i_F(X) = 0 \leq k(|X_B| - 1) + \mu(X)$. Ha J nemüres, akkor $|J| \leq b(J) = (k-1)|H(J)| + |V(J)| - k \leq (k-1)|X_B| + |X_K| - k = k(|X_B| - 1) + \mu(X)$, azaz (3.36) teljesül.

Megfordítva, ha F nem független M_1'-ben, akkor van egy olyan J részhalmaza, amelyre $|J| > b(J)$. Legyen $X_B := H(J)$ és $X_K := V(J)$. Ekkor az $X = (X_K, X_B)$ párhalmaz J minden elemét feszíti, és így $i_F(X) \geq |J| > b(J) = (k-1)|H(J)| + |V(J)| - k = (k-1)|X_B| + |X_K| - k = k(|X_B| - 1) + \mu(X)$, azaz (3.36) megsérül. •

Jelölje M_2 azt a partíciós matroidot az A alaphalmazon, amelyben egy $I \subseteq A$ halmaz akkor független, ha $\varrho_I(v) \leq k$ minden $v \in V - r$ pontra.

Állítás 3.3.17 *A $D_B = (V, B)$ digráf akkor és csak akkor k-lomb, ha B az M_1' és M_2 matroidok $k(n-1)$ elemű közös független halmaza, ahol $n = |V|$.*

Biz. Ha D_B k-lomb, akkor a 3.3.14 állítás miatt $\varrho_B(v) = k$ és $\varrho_B(r) = 0$, így D-nek pontosan $k(n-1)$ éle van és B független M_2-ben. Az $X = (X_K, X_B)$ nemtriviális párhalmazra $\varrho_B(X) + \mu(X) \geq k$ miatt $i_B(X) = \sum[\varrho_B(v) : v \in X_B] - \varrho_B(X) \leq k|X_B| + \mu(X) - k$, és így az 3.3.16 állítás miatt B független M_1'-ben is.

Fordítva, tegyük fel, hogy a B élhamaz $k(n-1)$ elemű közös független. Ekkor $\varrho_B(v) = k$ minden $v \in V - r$-re és $\varrho_B(r) = 0$. Továbbá bármely nemtriviális $X = (X_K, X_B)$ párhalmazra $i_B(X) \leq k(|X_B| - 1) + \mu(X)$. Ezért $\varrho_B(X) + \mu(X) = \sum[\varrho_B(v) : v \in X_B] - i_B(X) + \mu(X) = k|X_B| - i_B(X) + \mu(X) \geq k|X_B| - k(|X_B| - 1) = k$ és így a 3.3.13 állítás szerint $D_B = (V, B)$ gyökeresen k-összefüggő. • •

Függetlenségi orákulum

Beláttuk, hogy egy digráf élelhagyásra nézve minimális gyökeresen k-élösszefüggő és k-összefüggő részgráfjai két matroid közös bázisait alkotják. Így a súlyozott matroidmetszet algoritmus alkalmazható a legolcsóbb ilyen részgráf kiszámítására feltéve, hogy a szóbanforgó két matroidra a függetlenségi orákulum megkonstruálható. Ez az M_2 partíciós matroidra nem probléma, az M_1 illetve M_1' esetén pedig szükségünk lesz az alábbi ismert irányítási eredményre.

Lemma 3.3.18 *Egy $G = (U, E)$ irányítatlan gráfnak adott $g : U \to \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ függvényhez akkor és csak akkor van olyan irányítása, amelyben minden v csúcsra $\varrho(v) \leq g(v)$, ha a csúcsok minden X részhalmazára $g(X) \geq i_G(X)$.*

Biz. (Elegendőség) Tetszőleges irányításból kiindulva utak egymás utáni átfordításával fokozatosan csökkentjük a $\sum[(\varrho(v) - g(v))^+ : v \in U]$ hibaösszeget. Nevezetesen, ha egy z pont hibás (azaz $\varrho(z) > g(z)$) és azon pontok Z halmazában, amelyekből z irányított úton elérhető létezik egy alultelített u pont (azaz $\varrho(u) < g(u)$), akkor egy u-ból z-be menő utat megfordítva a hibaösszeg csökken. Ha viszont ilyen u pont nem létezik, akkor a Z halmaz megsérti a feltételt, hiszen $\varrho(Z) = 0$ miatt $i(Z) = \sum[\varrho(v) : v \in Z] > \sum[g(v) : v \in Z] = g(Z)$. •

Mind M_1-hez, mind M_1'-hez egy olyan orákulumot adunk meg, amely bármely F' független halmaz és $f = sz \in A - F'$ elem esetén eldönti, hogy $F = F' + f$ független-e. Ennek ismételt alkalmazásával egy tetszőleges halmazról már könnyű megállapítani, hogy független-e. Nézzük először M_1-t.

Definiáljuk a $g : V \to \mathbf{Z}_+$ függvényt az r csúcson 0-nak, a többi csúcson pedig k-nak. Az irányítási lemmából F' függetlenségét felhasználva kiolvasható, hogy $F' + f$ pontosan akkor független M_1-ben, ha a (V, F) digráfnak van olyan irányítása, amelyben minden v pont befoka legfeljebb $g(v)$. Így az irányítási lemma ismételt alkalmazásával F függetlensége valóban eldönthető.

Az M_1'-beli függetlenség tesztelésére térve a $D_F = (V, F)$ digráfhoz készítsük el a $G = (V', V''; E)$ páros gráfot a következőképp. Minden $v \in V$ pontnak megfelel egy $v' \in V'$ és egy $v'' \in V''$ pont, melyek össze vannak kötve egy éllel. Az ilyen élek halmazát jelölje E_V. Ezen kívül minden $e = uv \in F$ irányított élnek megfelel egy $e_G = u'v''$ él. Az ilyen élek halmazát jelölje E_F. Legyen $E := E_V \cup E_F$ és $U := V' \cup V''$. Azzal a konvencióval élünk, hogy egy $X \subseteq V$ halmaznak megfelelő V'-beli illetve V''-beli halmazt X'-vel illetve X''-vel jelöljük, míg egy $J \subseteq F$ élhalmaznak megfelelő G-beli élhalmazt E_J-vel.

Definiáljuk a $g : U \to \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ függvényt a következőképp. Legyen $g(r') := g(r'') := \infty$, $g(z'') := 0$, továbbá minden $v \in V - r$-re legyen $g(v') := 1$, végül minden $v \in V - \{r, z\}$-re $g(v'') := k$.

Lemma 3.3.19 *Legyen F' független M_1'-ben. Az $F = F' + sz$ halmaz akkor és csak akkor független M_1'-ben, ha G-nek létezik olyan irányítása, amelyben minden x pont befoka legfeljebb $g(x)$.*

Biz. Tegyük fel először, hogy nem létezik a kívánt irányítás. A 3.3.18 lemma miatt van olyan $X' \cup Y'' \subseteq U$ halmaz, amelyre $i_G(X' \cup Y'') > g(X' \cup Y'')$. Ebből $i_G(X' \cup Y'') > 0$ miatt bizonyosan $X' \neq \emptyset$ és $Y'' \neq \emptyset$. Legyen $J \subseteq F$ azon $e = uv$ élek halmaza, melyekre $u' \in X'$ és $v'' \in Y''$. Mivel $X' \cup Y''$ $|X \cap Y|$ darab E_V-típusú élt feszít, így $|J| + |X \cap Y| = i_G(X' \cup Y'') > g(X' \cup Y'') \geq |X| + k(|Y| - 1)$, amiből

$$|J| > k|Y| - k + |X| - |X \cap Y|. \tag{3.37}$$

Ha indirekt F független volna, akkor J-re $|J| \leq b(J) = (k-1)|H(J)| + |V(J)| - k \leq (k-1)|Y| + |X \cup Y| - k = k|Y| - |Y| + |X \cup Y| - k = k|Y| - k + |X| - |X \cap Y|$, ellentmondásban a (3.37) egyenlőtlenséggel.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy F nem független M_1'-ben, azaz a 3.3.16 állítás folytán van olyan $X = (X_K, X_B)$ párhalmaz, amelyre

$$|J| = i_F(X) > k(|X_B| - 1) + |X_K| - |X_B|, \tag{3.38}$$

ahol J jelöli az X párhalmaz által feszített F-beli élek halmazát.

Miután F' független M_1'-ben, így az X párhalmaz feszíti f-t, azaz $s \in X_K$ és $z \in X_B$. Emiatt $g(X_B) = k(|X_B| - 1)$. Ha indirekt létezik a szóbanforgó irányítás, akkor az $X_K' \cup X_B'' \subseteq U$ halmaz által $|X_B|$ darab E_V típusú élt feszít és így $|J| + |X_B| = i_G(X_K' \cup X_B'') \leq g(X_K') + g(X_B') = |X_K| + k(|X_B| - 1)$, azaz $|J| \leq |X_K| + k(|X_B| - 1) - |X_B|$, ellentmondásban a (3.38) egyenlőtlenséggel. •

Feladat 3.3.6 *A 3.3.18 irányítási tétel bizonyítását használva módosítsuk a fenti orákulumot úgy, hogy meghatározza az f elem F'-re vonatkozó M_1'-beli alapkörét, amennyiben $F' + f$ nem független.*

4. Fejezet

MATROIDOK ÖSSZEGE (UNIÓJA)

Az előző fejezetben megállapítottuk, hogy egy S alaphalmazon adott k matroid maximális elemszámú közös függetlenjének problémája $k = 2$ esetén szépen kezelhető, míg $k \geq 3$-ra már NP-teljes problémákat foglal magában. A jelen fejezetben azt a korábban már vizsgált rokon kérdést vesszük szemügyre, hogy maximum hány eleme lehet egy olyan halmaznak, amely előáll a k matroidból vett egy-egy független egyesítéseként. Az ilyen halmazokat neveztük a 2.4.3 szakaszban partícionálhatóknak, és beláttuk róluk, hogy egy M_Σ-val jelölt matroid függetlenjeit alkotják, mely matroidot az $M_1, \ldots, M_k$ matroidok összegének (uniójának) neveztük.

4.1 FEDÉS ÉS PAKOLÁS

A 2.4.3 szakasz 2.4.9 tételében meghatároztuk a maximális partícionálható halmaz elemszámát, másszóval az összegmatroid rangját. Ebből rögtön következett a 2.4.10 tétel arról, hogy maga az S alaphalmaz mikor partícionálható. Most fordított utat bejárva direkt bizonyítást kapunk az említett eredményekre.

4.1.1 Az összegformula újra

Kezdjük tehát a 2.4.10 tétel megismétlésével:

TÉTEL 4.1.1 (Edmonds és Nash-Williams) *Adott az S alaphalmazon k matroid, melyek rangfüggvénye $r_1, \ldots, r_k$. S akkor és csak akkor bomlik fel k halmaz egyesítésére úgy, hogy az i-edik halmaz független az i-edik matroidban, ha*

$$\sum_i r_i(X) \geq |X| \tag{4.1}$$

fennáll minden $X \subseteq S$ részhalmazra.

Biz. Szükségesség. Tegyük fel, hogy S felbomlik az $F_1, \ldots, F_k$ halmazok egyesítésére, ahol F_i független az i-edik matroidban. Ekkor tetszőleges $X \subseteq S$ halmazra $\sum_i r_i(X) \geq \sum_i |F_i \cap X| = |X|$.

Az elegendőség igazolása $|S|$ szerinti indukcióval történik. Legyen $b := \sum_i r_i$. A feltétel azt jelenti, hogy $b(X) \geq |X|$ minden $X \subseteq S$ halmazra. Egy X halmaz **pontos**, ha $b(X) = |X|$. Az üres halmaz mindig pontos, és pontos X, Y halmazok metszete és uniója is pontos. (Valóban, $|X|+|Y| = b(X)+b(Y) \geq b(X\cap Y)+b(X\cup Y) \geq |X \cap Y| + |X \cup Y| = |X| + |Y|$, amiből $b(X \cap Y) = |X \cap Y|$ és $b(X \cup Y) = |X \cup Y|$ következik.)

Legyen t tetszőleges eleme S-nek és P a t-t nem tartalmazó pontos halmazok uniója. Az előző meggondolás szerint P pontos. Van olyan i index, $1 \leq i \leq k$, amelyre $r_i(P + t) > r_i(P)$, mert ha nem volna, akkor $\sum_i r_i(P+t) = \sum_i r_i(P) = |P| < |P+t|$, azaz $P+t$ megsértené a feltételt. Esetleges indexcserével feltehetjük, hogy $r_1(P + t) > r_1(P)$. Legyen $S' := S - t$. Húzzuk össze a t elemet az első matroidban. Az összehúzott matroid rangfüggvénye $r'_1(X) = r_1(X + t) - r_1(t)$.

Állítjuk, hogy

$$r'_1(X) + r_2(X) + \ldots + r_k(X) \geq |X| \text{ minden } X \subseteq S' \text{ halmazra fennáll.} \tag{4.2}$$

Ha ugyanis valamely X-re nem, akkor $r_1(X+t)-1+r_2(X)+\ldots+r_k(X) \leq r_1(X+t)-r_1(t)+r_2(X)+\ldots+r_k(X) \leq |X| - 1$, amiből végig egyenlőség adódik. Speciálisan $r_1(X) = r_1(X + t), r_1(t) = 1, \sum_i r_i(X) = |X|$. Tehát X pontos és így $X \subseteq P$. De ekkor r_1 szubmodularitását az $X + t$ és P halmazokra felírva azt kapjuk, hogy $1 \leq r_1(P+t)-r_1(P) \leq r_1(X+t)-r_1(X) = 0$, amely ellentmondás igazolja (4.2)-t. (A második egyenlőtlenség szemléletes tartalma az, hogy egy elem hozzávétele egy bővebb halmaz rangját nem tudja jobban növelni, mint egy szűkebb halmazét.)

A (4.2) tulajdonság azt jelenti, hogy a tétel feltételei fennállnak az $M_1 \cdot S', M_2|S', \ldots, M_k|S'$ matroidokra. Indukció alapján S' felbomlik ezen matroidokból vett $F_1', F_2, \ldots, F_k$ független halmazokra. Az összehúzás definíciójából adódik, hogy $F_1 := F_1 + t'$ független M_1-ben, és ezért $F_1, F_2, \ldots, F_k$ az S halmaz felbontását adja $M_1, \ldots, M_k$ matroidokból vett független halmazokra. •

Amennyiben valamely X halmazra (4.1) nem teljesül, akkor az S alaphalmaz persze nem partícionálható, azaz S nem független az összegmatroidban. Következő célunk a maximális partícionálható részhalmaz elemszámának, vagyis $r_\Sigma(S)$-nek a meghatározása. Az erre vonatkozó (2.20) összegformulát már az 2.4 szakaszban bebizonyítottuk, most a 4.1.1 tételből közvetlenül adódik. A tétel úgy is interpretálható, hogy $r_\Sigma(S)$ értékét a (4.1)-t legjobban megsértő X halmaz határozza meg. Az alábbi eredmény a már megismert matroid összegformula.

TÉTEL 4.1.2 (Edmonds és Fulkerson) *Adott az S alaphalmazon k matroid. Az S legnagyobb olyan részhalmazának r_Σ elemszáma, amely előáll az egyes matroidokból vett (összesen k darab) független halmaz uniójaként egyenlő a*

$$\min\{\sum_i r_i(X) + |S - X| : X \subseteq S\} \tag{4.3}$$

értékkel.

Biz. Ha az I halmaz k független uniója, akkor $|I| = |I - X| + |I \cap X| \leq |S - X| + \sum_i r_i(X)$, amiből a max $\leq$ min irány következik.

Legyen $\delta := \max_{X \subseteq S}\{|X| - \sum_i r_i(X)\}$. Azt kell igazolnunk, hogy létezik egy $|S| - \delta$ elemszámú részhalmaza S-nek, amely előáll a matroidokból vett egy-egy független halmaz uniójaként. Ez avval ekvivalens, hogy S előáll az $M_0, M_1, \ldots, M_k$ matroidokból vett független halmazok egyesítéseként, ahol M_0 azt az uniform matroidot jelöli, amelynek bázisai a δ elemű részhalmazai S-nek. Mármost ezen $k+1$ matroidra a δ definíciója miatt $\sum[r_i(X) : i = 0, \ldots, k] \geq |X|$ teljesül minden $X \subseteq S$ részhalmazra, így S valóban felbomlik $k+1$ független halmaz egyesítésére. •

A metszettétel és a partíciós tétel ekvivalens

Az előző fejezetben a matroid metszettétel első bizonyítása az összegmatroid rangformulájára támaszkodott. Most megmutatjuk, hogy megfordítva, ezen utóbbi is levezethető a metszettételből.

Biz. (4.1.2 tételé a 3.1.6 metszettételből) Jelölje $S_1, \ldots, S_k$ az S alaphalmaznak k diszjunkt példányát és legyen S_0 az uniójuk. Két matroidot definiálunk S_0-on. Legyen N_1 egy partíciós matroid, amelyben egy halmaz akkor független, ha az S minden s elemére az s-nek az S_0-ban megfelelő k elem közül legfeljebb egyet tartalmaz. Legyen N_2 egy direkt összegként előálló matroid, amelyben akkor független egy $F_1 \cup \ldots \cup F_k$ halmaz, ahol $F_i \subseteq S_i$, ha az F_i-nek S-ben megfelelő részhalmaz független M_i-ben. Jelölje az N_1 és N_2 matroidok rangfüggvényét R_1 és R_2. Könnyen látszik, hogy egy-egy értelmű kapcsolat van az N_1 és N_2 matroidok közös független részhalmazai valamint az S halmaz olyan $\{I_1, I_2, \ldots, I_k\}$ rész-partíciói között, melyekben I_i független M_i-ben. Ezért a metszettétel alapján $r_\Sigma = \min\{R_1(X_0) + R_2(S_0 - X_0)\}$, ahol a minimum az S_0 azon X_0 részhalmazaira megy, amelyek zártak az N_1-ben. X_0 viszont pontosan akkor zárt az N_1 partíciós matroidban, ha X_0 az S egy X részhalmazának az S_i példányokban megfelelő k darab halmaz egyesítéseként áll elő, és ilyenkor $R_1(X_0) = |X|$. Ilyen X_0-ra a direkt összeg rangfüggvénye alapján fennáll, hogy $R_2(S_0 - X_0) = \sum r_i(S - X)$. Mindezeket összevetve (4.3) következik. •

A 4.1.2 tételt eddig már háromféleképp is igazoltuk: a 2.4 részben a homomorf képet használva, fentebb direkt, és a matroid metszettételből. Most még egy konstruktív bizonyítással is szolgálunk.

4.1.2 A partíciós algoritmus

Korábban már láttuk, hogy ha $M_1, \ldots, M_k$ a közös S alaphalmazon definiált matroidok, akkor az M_Σ összegük vagy másnéven uniójuk matroidot alkot. M_Σ-ban egy halmaz definíció szerint akkor független, ha partícionálható, azaz előáll az egyes matroidokból vett egy-egy független halmaz uniójaként. A 4.1.2 matroid partíciós tételben meghatároztuk az M_Σ rangját:

TÉTEL 4.1.3 *A közös S alaphalmazon lévő $M_1, M_2, \ldots, M_k$ matroidok összegének rangja* $\min\{\sum_i r_i(X) + |S - X| : X \subseteq S\}$.

Most a tétel nemtriviális irányára ($r_\Sigma(S) \geq \min$) egy újabb, konstruktív bizonyítást adunk. Másszóval leírunk egy algoritmust, amely egyrészt megad $F_1, \ldots, F_k$ diszjunkt halmazokat úgy, hogy az F_i független

M_i-ben, másrészt megad egy X halmazt úgy, hogy $S = X \cup (\cup_i F_i)$ és $F_i \cap X$ az M_i matroidban feszíti X-et. E feltételekre optimalitási kritériumként fogunk hivatkozni.

Az algoritmus egy közbenső állapotában adva vannak az egyes matroidokban független diszjunkt F_i halmazok, amelyek mindegyike kezdetben lehet például az üres halmaz. Legyen a kimaradó pontok halmaza R, és készítsünk el egy segédgráfot a következőképpen. Mindegyik matroidhoz vegyünk fel egy új t_i pontot és legyen az új pontok halmaza T. Egy $x \in S - F_i$ pontból vezessünk élt t_i-be, ha M_i-ben $F_i + x$ független, azaz ha x az F_i-hez vehető. Az $x \in S - F_i$ pontból vezessünk élt az $y \in F_i$ pontba, ha $F_i + x$ függő M_i-ben és y benne van az $F_i + x$ egyetlen körében.

Egy útkereső algoritmussal határozzuk meg az R halmazból irányított úton elérhető pontok X halmazát. Két eset lehetséges.

1. eset *Nincs út R-ből T-be, azaz X diszjunkt T-től.* Miután X-ből nem lép ki semmilyen él, mindegyik i-re érvényes, hogy bármely $x \in X - F_i$ pontra $F_i + x$ függő halmaz M_i-ben és ráadásul az $F_i + x$-ben lévő egyetlen M_i-beli kör teljesen X-ben fekszik. Ez pont azt jelenti, hogy az $F_i \cap X$ halmaz feszíti az M_i matroidban X-et. Tehát a meglévő F_i független halmazok a megtalált X halmazzal teljesítik az optimalitási kritériumokat, és ilyenkor az algoritmus véget ér.

2. eset *Létezik út R-ből T-be.* Válasszunk ki egy P legrövidebb utat (amelyről csak annyit fogunk használni, hogy nincsen hozzá előreugró él.) Legyen P utolsó éle st_j. Bővítsük ki F_j-t az s elemmel, azaz legyen $F_j := F_j + s$. Mindegyik F_i halmazra tekintsük az útnak az F_i-be lépő xy éleit és ezek mindegyikének y fejét hagyjuk ki F_i-ből és x tövét vegyük be F_i-be. Miután a P út legrövidebb volt, alkalmazhatjuk a 3.1.9 lemmát, amiből következik, hogy a keletkező F_i' halmaz is független lesz M_i-ben. Így tehát olyan diszjunkt F_i' független halmazokat kaptunk, amelyek uniója egy elemmel (éspedig a P út kezdőpontjával) bővebb, mint a kiindulási F_i halmazok uniója.

Következik, hogy az eljárást ismételve, legfeljebb $|S|$ útkeresés után az 1. eset fog előfordulni. •

Megjegyzendő, hogy a 4.1.2 tételnek a matroid metszettételből történő levezetésére fentebb bemutatott elemi konstrukció arra is használható, hogy a matroid metszet algoritmust alkalmazzuk a matroid partícióra. E megközelítésnek hátránya, hogy az alaphalmazt meg kell k-szorozni. Az imént közölt partíciós algoritmus úgy interpretálható, mintha a matroid metszet algoritmust az S alaphalmazon mondanánk el.

Feladat 4.1.1 *Dolgozzunk ki algoritmust annak eldöntésére, hogy a minden komponensében* $1/2$ *értékű vektor benne van-e egy adott matroid függetlenjeinek poliéderében.*

Súlyozott partíció

Tegyük most fel, hogy az S alaphalmazon adott egy $w \geq 0$ súlyfüggvény és olyan partícionálható halmazt keresünk, amelynek a súlya maximális. Az eddigiek után ez nem jelent problémát, hiszen feladatunk azt kívánja, hogy az összegmatroidban keressünk maximális súlyú független halmazt. Ehhez pedig a mohó algoritmus használható, hiszen a partíciós algoritmus nyomán rendelkezésünkre áll az összegmatroid függetlenségi orákuluma. Valójában a két algoritmust összeolvasztva a maximális súlyú partícionálható halmazt úgy határozhatjuk meg, hogy a fenti algoritmusban az elemeket a súlyuk szerinti sorrendben tekintjük, és a még független halmazokban nem lévő elemek közül mindig a legnagyobb súlyúból indulva próbálunk utat keresni a segédgráfban.

Valójában egy még általánosabb algoritmikus kérdés is felvethető. Mi a helyzet, ha mind a k matroidnak megvan a maga önálló súlyfüggvénye? Azaz, adottak a $w_1, \ldots, w_k$ nemnegatív súlyfüggvények és keresünk páronként diszjunkt $I_1, \ldots, I_k$ halmazokat úgy, hogy I_i független az M_i-ben és $\sum_i w_i(I_i)$ maximális.

A kérdés elég természetes: tegyük fel például, hogy egy összefüggő gráfban k élidegen feszítő fát keresünk. Ezt persze a partíciós algoritmussal meg tudjuk tenni. De most meg akarunk építtetni k élidegen feszítő fát. A munkát k cég között osztjuk fel: mindegyikük egy fát épít. Mindegyik cég megadja a gráf egyes éleinek építési költségét (ami persze cégenként eltérhet), és a mi feladatunk k élidegen feszítő fa kiválasztása és cégekhez rendelése úgy, hogy a teljes építési költség minimális legyen. Az így kapott feladat nyilván az előbbi több-súlyú partíciós probléma speciális esete.

Ennek megoldása pedig ismét a matroid unió problémának a metszet problémára történő visszavezetésével történhet. A különbség csupán annyi, hogy ezúttal nem az elemszámra vonatkozó, hanem a súlyozott metszet algoritmust kell használni.

4.1.3 A szintező algoritmus

Bemutatunk egy másik algoritmust is a matroid partíciós problémára, amely szintén bizonyítja a 4.1.2 tételt. Az eljárás a maximális folyam kiszámítására vonakozó előfolyam algoritmus adaptációjának tekinthető. Szükségünk lesz a következő egyszerű megfigyelésre.

Lemma 4.1.4 *Legyen B az $M = (S, \mathcal{B})$ matroid egy bázisa. Tegyük fel, hogy adott az elemeken egy $h : S \to \{0, 1, \ldots, n\}$ „szintfüggvény", amelyre*

$$u \in S - B,\ v \in C(B, u) \text{ esetén } h(v) \leq h(u) + 1. \tag{4.4}$$

Legyenek $s \in S - B$ és $t \in C(B, s)$ olyan elemek, melyekre $h(t) = h(s) + 1$. Ekkor (4.4) *fennáll a $B' := B - t + s$ bázisra vonatkozólag is.*

Biz. Jelöljük egy z elem B-hez illetve B'-höz tartozó alapkörét rendre C_z és C'_z-vel. Egy $X \subseteq B$ halmazra legyen $h(X) := \max\{h(v) : v \in X\}$. Ekkor (4.4) azzal ekvivalens, hogy $u \in S - B$-re $h(C_u) \leq h(u) + 1$. Ha $u = t$, akkor $C'_u = C_s$, így $h(C'_u) = h(C_s) = h(t) < h(u) + 1$. Tegyük most fel, hogy $u \neq t$. Ha $t \notin C_u$, akkor $C'_u = C_u$, így $h(C'_u) = h(C_u) \leq h(u) + 1$. Ha $t \in C_u$, akkor $h(C_s) = h(t) \leq h(u) + 1$, amiből $h(C_u \cup C_s) \leq h(u) + 1$. A köraxióma miatt létezik egy u-t tartalmazó $C' \subseteq C_s \cup C_u - t$ kör, és így szükségképpen $C'_u = C'$, amiből $h(C'_u) \leq h(C_u \cup C_s) \leq h(u) + 1$. •

Célunk tehát az M_i matroidok egy-egy B_i bázisának megtalálása valamint egy $Z \subseteq S$ részhalmazé, melyekre

$$S - Z \subseteq \cup_i B_i \tag{4.5}$$

$$B_i \cap B_j \cap Z = \emptyset \text{ minden } 1 \leq i < j \leq k\text{-ra} \tag{4.6}$$

$$B_i \cap Z \text{ feszíti } M_i\text{-ben } Z\text{-t minden } i = 1, \ldots, k\text{-ra.} \tag{4.7}$$

Az algoritmus egy általános helyzetében adottak a $B_1, \ldots, B_k$ bázisok valamint egy $h : S \to \{0, 1, \ldots, n = |S|\}$ szintfüggvény, melyekre fennállnak a következők.

(A) $u \in S - B_i$, $v \in C_i(B_i, u)$ esetén $h(v) \leq h(u) + 1$,
(B) $u \in S - \cup_i B_i$ esetén $h(u) = 0$, azaz minden fedetlen pont szintje 0.

Ha nincs többször fedett pont, azaz a bázisok diszjunktak, akkor $Z := S$ teljesíti az optimalitási feltételeket, míg ha nincs a bázisok által fedetlen pont, akkor $Z := \emptyset$.

Legyen t a legalsó többször fedett pont és az őt tartalmazó bázisokat jelölje $B_1, \ldots, B_l$ ($l \geq 2$). Ha ezek között van egy B_i bázis és van egy $s \in S - B_i$ elem, amelyre $t \in C_i(B_i, s)$ és $h(t) = h(s) + 1$, akkor helyettesítsük B_i-t a $B_i - t + s$ M_i-beli bázissal. Ha pedig nem létezik ilyen B_i bázis, akkor emeljük meg t szintjét eggyel.

Az algoritmus akkor ér véget, amikor az aktuális t pont szintjének emelésekor a j-dik szint kiürült (azaz az emelés előtt t volt az egyetlen olyan pont, amelyre $h(t) = j$). Ez legfeljebb n^2 szintemelés során biztosan bekövetkezik, hiszen akkor már van n szintű pont, így üres szint is.

A j-dik szint kiürülésekor a $Z := \{z : h(z) \leq j\}$ halmaz minden $u \in S - B_i$ elemére az **(A)** tulajdonság miatt fennáll, hogy $C_i(B_i, u) \subseteq Z$, vagyis (4.7) teljesül. A **(B)** tulajdonság miatt $S - Z$ minden eleme fedett, azaz (4.5) is teljesül. Végül (4.6) is fennáll, hiszen t volt a legalsó öbbször fedett elem.

Egy bázis cserénél a bázisok uniójának elemszáma vagy eggyel nő vagy nem változik. Nevezzük az algoritmus futásának azon részét egy fázisnak, amelynek során sem a bázisok uniója nem nő, sem a szintemelés nem történik. Mivel összesen legfeljebb $n + n^2$ fázis lehet és egy fázis során legfeljebb n bázis csere történhet (hiszen ilyenkor a legalsó többször fedett pont szintje mindig eggyel csökken), ezért az algoritmus $O(n^3)$ lépés után végetér. •

4.1.4 Részfedések és részpakolások folytatása

Vizsgáljuk most meg azt az általánosabb kérdést, amikor előre adva vannak $I_1, \ldots, I_k$ független halmazok és ezeket akarjuk függetlenné kiterjeszteni úgy, hogy az alaphalmaznak egy fedését vagy pedig k diszjunkt bázist kapjunk. Kezdjük azzal a speciális esettel, amikor a k matroid ugyanaz és mindegyik I_j halmaz legfeljebb egyelemű. Meglepő módon ilyenkor semmilyen többlet feltevés nem kell:

TÉTEL 4.1.5 *Legyen M hurokmentes matroid az S alaphalmazon, és legyen $J \subseteq S$ tetszőleges legfeljebb k elemű halmaz.* (A) *Ha S felbomlik k független halmaz egyesítésére, akkor úgy is felbomlik, hogy mindegyik független legfeljebb egy J-beli elemet tartalmaz.* (B) *Ha létezik k diszjunkt bázis, akkor úgy is létezik, hogy mindegyik bázis legfeljebb egy J-beli elemet tartalmaz és a bázisok uniója tartalmazza a teljes J halmazt.*

Biz. A két részt egyszerre igazoljuk. Legyen $\mathcal{F} := \{F_1, \ldots, F_k\}$ diszjunkt független halmazoknak egy rendszere úgy, hogy a halmazok F uniója maximális és ezen belül minimális sok F_i nem metszi J-t. Ekkor $J \subseteq F$, mert ha mondjuk egy $s \in J$ elem nincs F-ben, akkor $|J| \leq k$ miatt valamelyik i-re $F_i \cap J = \emptyset$, és ennek valamely elemére s becserélhető.

Állítjuk, hogy mindegyik F_i legfeljebb egy J-beli elemet tartalmaz. Ha nem ez a helyzet, akkor az F_i halmazok között létezik kettő, mondjuk F_1 és F_2 úgy, hogy $|F_1 \cap J| \geq 2$ és $F_1 \cap J = \emptyset$. Az 1.4.4 következményből kapjuk, hogy vagy $F_2 + s_1$ független vagy s_1 szimmetrikusan kicserélhető egy $s_2 \in F_2$ elemmel. Mindkét esetben egy jobb $\mathcal{F}'$ függetlenekből álló halmaz rendszert kapunk. •

Fedések folytatása

Térjünk most rá az általános esetre, amikor S-n adott k tetszőleges matroid továbbá $I_1, \ldots, I_k$ halmazok úgy, hogy I_i független az M_i matroidban. Kérdés, hogy mikor lehet ezeket független halmazokká kiegészíteni, melyek uniója S. A választ a 4.1.1 tétel egyfajta önerősítő jellege folytán kapjuk meg.

Legyen $S' := S - \cup_i I_i$ és legyen M'_i az a matroid S'-n, amely az $M_i|(S' \cup I_i)$-ből keletkezik az I_i halmaz összehúzásával. A feladat így azzal ekvivalens, hogy keressünk az M'_i matroidoknak S'-t fedő független halmazait. Miután az M'_i matroid rangfügvénye $r'_i(X) = r_i(X \cup I_i) - |I_i|$ $(X \subseteq S')$, a 4.1.1 tételt alkalmazva kapjuk a következőt.

TÉTEL 4.1.6 *Az M_i matroidok I_i független halmazai $(i = 1, \ldots, k)$ akkor és csak akkor egészíthetők ki S-t fedő független halmazokká, ha*

$$\sum_i [r_i(X \cup I_i) - |I_i|] \geq |X| \tag{4.8}$$

fennáll minden $X \subseteq S'$ részhalmazra. •

Abban az esetben, ha a matroidok egyenlőek, elég a (4.8) feltételt csak speciális halmazokra megkövetelni. Az így kapott eredménynek a (4.2) szakaszban vesszük majd hasznát.

TÉTEL 4.1.7 *Legyenek $I_1, \ldots, I_k$ független halmazai az $M = (S, r)$ matroidnak és legyen $S' = S - \cup_i I_i$. S akkor és csak akkor fedhető le k olyan független halmazzal, melyek rendre magukba foglalják az I_i halmazokat, ha*

$$\sum_i [r(X \cup I_i) - |I_i|] \geq |X| \tag{4.9}$$

teljesül minden olyan $X \subseteq S'$ halmazra, amely egy zárt halmaz S'-be eső része. Amennyiben $I_1 = \ldots = I_k = \emptyset$, úgy a (4.9) egyenlőtlenségnek a

$$kr(X) \geq |X| \tag{4.10}$$

egyenlőtlenségre specializálódó alakját elegendő felbonthatatlan, zárt $X \subseteq S$ halmazokra megkövetelni.

(Egy X halmazt az 1.3 szakaszban akkor neveztünk felbonthatatlannak, ha bármely két eleme rajta van egy X-ben fekvő körön, ami azzal volt ekvivalens, hogy $r(Y) + r(X - Y) > r(X)$ fennáll az X minden Y valódi, nemüres részhalmazára).

Biz. Azt már az előbb láttuk, hogy a keresett felbontás létezésének szükséges és elegendő feltétele, hogy (4.9) minden (!) $X \subseteq S'$ részhalmazra fennáll. Azt kell tehát csak igazolnunk (az elegendőséghez), hogy ha (4.9) megsérül, akkor a következményben megadott speciális X halmazon is megsérül.

Tegyük fel tehát, hogy létezik egy $X \subseteq S'$ halmaz, amely megsérti (4.9)-t. Ekkor állítjuk, hogy $X' := S' \cap \sigma(X)$ is megsérti. Valóban X' definíciója miatt $X' \supseteq X$, és semelyik $x \in X' - X$ elem nem növeli X rangját (azaz $r(X + x) = r(X)$). De akkor x nem növeli a bővebb $X \cup I_i$ halmaz rangját sem, és emiatt $r(X' \cup I_i) = r(X \cup I_i)$, tehát X' is megsérti (4.9)-t.

A második részhez legyen mindegyik I_i halmaz üres, és tegyük fel, hogy egy X zárt halmaz megsérti (4.10)-t. Az 1.3.8 tétel bizonyításából tudjuk, hogy X egyértelműen felbomlik $X_1, \ldots, X_t$ diszjunkt, nemüres, felbonthatatlan (=összefüggő) részekre. Állítjuk, hogy valamennyi X_i zárt. (Ez az állítás már szerepelt az 1.4.14 feladatban.) Valóban, legyen F_j tetszőleges maximális független részhalmaza X_j-nek. Ha mondjuk X_1 nem volna zárt, akkor létezne olyan $s \in S - X_1$ elem, amelyre $F_1 + s$ tartalmaz kört. A direkt összeg tulajdonsága miatt s nem lehet X-ben. Miután $F = \cup F_j$ az X-nek maximális függetlenje, $r(X + s) = r(F + s) = |F| = r(X)$ vagyis X nem volna zárt.

Az X_i halmazok tehát mind zártak és felbonthatatlanok, így (4.10) alapján $kr(X) = k\sum_j r(X_j) \geq \sum_j |X_j| = |X|$ miatt X mégsem sértené meg (4.10)-t, ellentmondásban a feltevésünkkel. •

Pakolások folytatása

Egy matroidban egy X halmaz $r(X)$ rangja az X és egy bázis metszetének *maximális* elemszáma volt, míg a $t(X)$ ko-rang az X és egy bázis metszetének minimális elemszáma, azaz $t(X) := \min\{|B \cap X| : B \text{ bázis}\}$. Mivel tetszőleges bázis $S - X$-ből legfeljebb $r(S - X)$ elemet tartalmaz, ezért $t(X) = r(S) - r(S - X)$.

TÉTEL 4.1.8 *Adott az S alaphalmazon k matroid, melyek rang-függvénye r_i és ko-rang függvénye t_i $(i = 1, \ldots, k)$. Akkor és csak akkor létezik S-nek k diszjunkt részhalmaza úgy, hogy az i-edik halmaz bázis az i-edik matroidban, ha*

$$\sum_i t_i(X) \leq |X| \tag{4.11}$$

fennáll minden $X \subseteq S$ részhalmazra, ami viszont azzal ekvivalens, hogy

$$\sum_i [r_i(S) - r_i(Y)] \leq |S - Y| \tag{4.12}$$

fennáll minden $Y \subseteq S$ részhalmazra.

Biz. Miután $t(X) = r(S) - r(S - X)$, (4.11) és (4.12) ekvivalenciája az $Y = S - X$ helyettesítéssel következik. (4.11) szükségessége nyilvánvaló, bizonyítsuk (4.12) elegendőségét. Azt kell csupán belátnunk, hogy (4.12) fennállása esetén létezik egy $\sum_i r_i(S)$ méretű halmaz, amely előáll k független egyesítéseként. Nagyobb nyilván nem lehet, így az egyenlőséghez (4.3) alapján csak az kell, hogy $\sum_i r_i(Y) + |S - Y| \geq \sum_i r_i(S)$. Ez viszont pontosan (4.12). •

Következmény 4.1.9 *Az S halmazon adott egy matroid. S akkor és csak akkor tartalmaz k diszjunkt bázist, ha*

$$k(r(S) - r(Y)) \leq |S - Y|, \text{ vagy ekvivalensen } kt(X) \leq |X| \tag{4.13}$$

teljesül minden zárt $Y \subseteq S$ halmazra illetve minden zárt halmaz X komplementerére.

Biz. Világos, hogy ha egy Y' halmaz megsérti (4.13)-t, akkor a lezártja is, és így a tétel az előzőből következik. •

A 4.1.6 illetve a 4.1.7 tétel mintájára, a 4.1.8 tételt is általánosíthatjuk arra az esetre, amikor előre adva vannak $I_1, \ldots, I_k$ diszjunkt halmazok úgy, hogy I_i független az M_i matroidban, és ezeket akarjuk diszjunkt bázisokká kiegészíteni. Legyen $S' := S - \cup_i I_i$ és legyen M_i' az a matroid S'-n, amely az $M_i|(S' \cup I_i)$-ből keletkezik az I_i halmaz összehúzásával. A feladat így azzal ekvivalens, hogy keressünk az M_i' matroidoknak diszjunkt bázisait. A 4.1.8 tételt alkalmazva kapjuk a következőt.

TÉTEL 4.1.10 *Az M_i matroidok diszjunkt I_i független halmazai $(i = 1, \ldots, k)$ akkor és csak akkor egészíthetők ki diszjunkt bázisokká, ha*

$$\sum_i [r_i(S' \cup I_i) - r_i(Y \cup I_i)] \leq |S' - Y| \tag{4.14}$$

fennáll minden $Y \subseteq S'$ részhalmazra. Amennyiben az M_i matroidok mindegyike ugyanaz az M matroid, akkor a (4.14) speciálizálódó

$$k[r(S' \cup I_i)] - r(Y \cup I_i)] \leq |S' - Y| \tag{4.15}$$

alakját elegendő olyan Y halmazokra feltenni, melyekre Y egy M-beli zárt halmaz S'-be eső része. •

4.1.5 Fedés-szám és méret-korlátos fedés és pakolás

A 4.1.1 tétel arra adott választ, hogy az S alaphalmazt mikor lehet k független halmazzal lefedni. Ez nyilván ekvivalens azzal, hogy mikor lehet az S halmazt az $M_1, \ldots, M_k$ matroidok egy-egy bázisával lefedni. A 4.1.8 tételben k diszjunkt bázist kerestünk.

Fedés-szám korlátok

Felvetődik a kérdés, hogy mikor létezik k bázis úgy, hogy minden $s \in S$ elem pontosan $m(s)$-ben van közülük benne, ahol $m : S \to Z_+$ adott előírás. A 4.1.1 tételből a válasz közvetlenül adódik.

TÉTEL 4.1.11 *Adott az S alaphalmazon k matroid valamint az $m : S \to Z_+$ vektor. Akkor és csak akkor lehet a k matroid egy-egy bázisát úgy kiválasztani, hogy mindegyik $s \in S$ elem pontosan $m(s)$ bázisban legyen benne, ha $m(S) = \sum_i r_i(S)$ és minden $X \subseteq S$ részhalmazra*

$$\sum_i r_i(X) \geq m(X). \tag{4.16}$$

Biz. A feltételek nyilván szükségesek. Az elegendőséghez mindegyik s elemet helyettesítsünk $m(s)$ példánnyal és ezen elemek legyenek párhuzamosak mind a k matroidban. Az $m(s) = 0$ esetben ez jelentse az s törlését. A (4.16) feltétel ekvivalens (4.1)-gyel, így a megnövelt halmaznak létezik függetlenekkel való fedése. Ez azzal ekvivalens, hogy az M_i matroidokból kiválasztható egy-egy független úgy, hogy mindegyik s elem legalább $m(s)$-ben forduljon elő. De az $\sum_i r_i(S) = m(S)$ feltétel miatt ez csak úgy fordulhat elő, hogy mindegyik független valójában bázis és mindegyik s elem pontosan $m(s)$-ben fordul elő. •

Tekinthetjük a következő még általánosabb feladatot. Legyenek adottak az $f : S \to Z$ és $g : S \to Z$ alsó és felső korlátok, melyekre $0 \leq f \leq g$. Mikor létezik a k matroidnak egy-egy bázisa úgy, hogy mindegyik $s \in S$ elem legalább $f(s)$ és legfeljebb $g(s)$ bázisban szerepel?

TÉTEL 4.1.12 *Az M_i matroidokból, melyek rang- illetve ko-rangfüggvény r_i és t_i, $(i = 1, \dots, k)$, akkor és csak akkor választható ki egy-egy bázis úgy, hogy*
(i) *mindegyik s elem legalább $f(s)$ bázisban fordul elő, ha minden $X \subseteq S$ részhalmazra*

$$b(X) := \sum_i r_i(X) \geq f(X), \tag{4.17}$$

(ii) *mindegyik s elem legfeljebb $g(s)$ bázisban fordul elő, ha minden $X \subseteq S$ részhalmazra*

$$p(X) := \sum_i t_i(X) \leq g(X), \tag{4.18}$$

(iii) *mindegyik s elem legfeljebb $g(s)$ és legalább $f(s)$ bázisban fordul elő, ha az* (i) *és az* (ii) *feladatok különkülön megoldhatók, azaz ha teljesül* (4.17) *és* (4.18).

Biz. A tétel első két része párhuzamos elem-többszörözéssel rögtön adódik a 4.1.1 és 4.1.8 tételekből.
Az (iii) részben az elegendőség igazolásához figyeljük először meg, hogy a $t_i(X) = r_i(S) - r_i(S - X)$ azonosság valamint az r_i függvények szubmodularitása miatt minden $\{X, Y\}$ halmazpárra fennáll a következő úgynevezett kereszt-egyenlőtlenség: $b(X) - p(Y) \geq b(X - Y) - p(Y - X)$.
A bizonyításhoz a 4.1.11 tétel alapján egy olyan egész $m : S \to \mathbf{Z}$ függvény létezését kell igazolnunk, amelyre egyrészt

$$f \leq m \leq g, \tag{4.19}$$

másrészt

$$m(S) = b(S) \text{ és minden } X \subseteq S \text{ -re } m(X) \leq b(X). \tag{4.20}$$

Állítjuk, hogy (4.20) ekvivalens a

$$p(X) \leq m(X) \leq b(X) \text{ minden } X \subseteq S \text{ -re.} \tag{4.21}$$

feltétellel. Valóban, ha (4.20) fennáll, akkor $p(X) = b(S) - b(S - X) = m(S) - b(S - X)$ miatt $m(X) \geq p(X)$ ekvivalens $m(S - X) \leq b(S - X)$ egyenlőtlenséggel, tehát (4.21) valóban fennáll. A fordított irányhoz csak azt kell látni, hogy a (4.21) feltételből $m(S) = b(S)$ következik, ami persze rögtön adódik $p(S) \leq m(S) \leq b(S) = p(S)$-ből.
A (4.19)-t és (4.21)-t kielégítő m pedig az 1.4.10 linking lemma miatt létezik. •

Az alábbi alkalmazásban érdekesség, hogy a bizonyítás a partíciós algoritmus futásának elemzésén alapul.

Méret korlátok

A tételben egy x szám esetén használjuk az $x^+ := \max\{x, 0\}$ jelölést.

TÉTEL 4.1.13 *Az S alaphalmazon adottak az $M_1, \dots, M_k$ matroid, melyek rangfüggvénye $r_1, \dots, r_k$. Adottak továbbá az $f_i \leq g_i$ $(i = 1, \dots, k)$ nemnegatív egészek. Akkor és csak akkor választhatók ki az egyes matroidokból vett $I_1, \dots I_k$ független halmazok,*
(i) *melyek lefedik S-t és $|I_j| \leq g_j$ minden $j = 1, \dots, k$-ra, ha*

$$|X| \leq \textstyle\sum_i \min\{r_i(X), g_i\} \text{ minden } X \subseteq S\text{-re fennáll,} \tag{4.22}$$

(ii) *melyek diszjunktak és $|I_j| \geq f_j$ minden $j = 1, \dots, k$-ra, ha*

$$|X| \geq \textstyle\sum_i (f_i - r_i(S - X))^+ \text{ minden } X \subseteq S\text{-re fennáll,} \tag{4.23}$$

(iii) *melyek partícionálják S-t és $f_j \leq |I_j| \leq g_j$ minden $j = 1, \dots, k$-ra, ha mind* (4.22)*, mind* (4.23) *fennáll.*

Biz. Az (i) rész rögtön adódik a 4.1.1 tételből, ha azt az M'_i matroidokra alkalmazzuk, ahol M'_i-ben a függetlenek az M_i legfeljebb g_i elemű függetlenjei (azaz M'_i az M_i g_i-vel vett csonkoltja).
Az (ii) részben (4.23) szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőség igazolásához tegyük fel, hogy (4.23) fennáll. Ebből adódik, hogy $f_i \leq r_i(S)$ minden i-re, mert különben $X = \emptyset$ megsértené (4.23)-t. Jelölje M'_i az M_i matroid f_i-vel való csonkoltját, amelynek rangfügvénye tehát $r'_i(X) = \min\{f_i, r_i(X)\}$. A kérdéses pakolás pont akkor létezik, ha az M'_i matroidokból ki lehet választani diszjunkt bázisokat, tehát a 4.1.8 tétel szerint pont akkor, ha

$$|X| \geq \sum_i [r'_i(S) - r'_i(S - X)] \text{ minden } X \subseteq S \text{ -re fennáll.} \tag{4.24}$$

Miután $r'_i(S) = \min\{r_i(S), f_i\} = f_i$, kapjuk, hogy $\sum_i [r'_i(S) - r'_i(S - X)] = \sum_i [f_i - \min\{r_i(S - X), f_i\}] = \sum_i (f_i - r_i(S - X))^+$, vagyis (4.23) és (4.24) valóban ekvivalensek.

Az (iii) rész bizonyítását kezdjük annak tudatosításával, hogy a matroid partíciós algoritmus bármely $F_i, \dots, F_k$ diszjunkt független halmazokból álló rendszerből indítható. Egy javító lépés során az M_i-hez tartozó független halmaz természetesen nagymértékben átalakulhat, de elemszáma sohasem csökken!

Az (ii) rész alapján léteznek diszjunkt független F_i halmazok, melyek méretére $|F_i| = f_i$, és a partíciós algoritmus ezeket meg is találja (hiszen az f_i-vel csonkolt matroidoknak kell diszjunkt bázisait keresni). Ezután futtassuk tovább az algoritmust immár a g_i-vel csonkolt matroidokra vonatkozólag. Miután az S lefedhető ezen matroidokból vett függetlenekkel, az algoritmus megtalál egy ilyen fedést, ami tehát pont egy előírt partíciója lesz S-nek, hiszen a szóbanforgó függetlenek mérete sohasem csökken, és így nem kerül f_i alá. •

Lista színezés

Belátjuk a matroidok listaszínezési tételét. Szükségünk lesz az 1.4.2 részben igazolt (1.9) általánosított szubmodularitási egyenlőtlenségre.

TÉTEL 4.1.14 (Seymour) *Tegyük fel, hogy az $M = (S, r)$ matroid alaphalmaza felbomlik k független halmaz uniójára. Legyenek adva $L_1, L_2, \dots, L_m \subseteq S$ részhalmazok úgy, hogy minden elem legalább k halmazban van benne. Ekkor léteznek olyan $F_i \subseteq L_i$ független részhalmazok, melyek partícionálják S-et.*

A tétel úgy is megfogalmazható, hogy ha egy matroid megszínezhető k színnel úgy, hogy az egyszínű halmazok függetlenek, továbbá minden elemhez adott egy k tagú színlista (nevezetesen, a tételben L_i jelenti azon elemek halmazát, melyek listájában szerepel az i-edik szín), akkor minden elem színezhető a listájának egy színével úgy, hogy az egyszínű halmazok függetlenek.

Biz. Az L_i halmazok esetleges szűkítésével feltehető, hogy minden elem pontosan k darab L_i halmazban van benne. Legyen $M_i = (S, r_i)$ az a matroid, amely az $M|L_i$ részmatroidnak és az $S - L_i$ elemeinek, mint hurkoknak a direkt összegeként áll elő. Legyen $X \subseteq S$ tetszőleges részhalmaz és legyen $X_i := X \cap L_i$. Nyilván $r_i(X) = r(X_i)$. Miután $\sum_i \chi_{X_i} = k\chi_X$, az 1.4.9 lemma alapján $\sum_i r_i(X) = \sum_i r(X_i) \geq \hat{r}(\sum_i \chi_{X_i}) = \hat{r}(k\chi_X) = kr(X)$. A feltevés szerint $kr(X) \geq |X|$, így $\sum_i r_i(X) \geq |X|$ teljesül minden $X \subseteq S$ halmazra. De ekkor a matroid partíciós tétel miatt az S előáll M_i-beli független halmazok egyesítéseként. •

A tétel elegendő feltételt szolgáltat lista színezés létezésére. A megközelítés ugyanakkor lehetővé teszi, hogy tetszőlegesen adott $L_1, \dots, L_m$ részhalmazok esetén eldöntsük, hogy léteznek-e $F_i \subseteq L_i$ független halmazok melyek partícionálják S-t, hiszen ehhez csak azt kell ellenőrizni, hogy a bizonyításban definiált M_i matroidok összegében S független-e vagy sem.

2007. május 6. ulmat41

4.2 ALKALMAZÁSOK, KÖVETKEZMÉNYEK, III

4.2.1 Gráfok fedése fákkal

TÉTEL 4.2.1 (Nash-Williams) *Egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf élhalmaza akkor és csak akkor bontható fel k erdőre, ha a pontok bármely Z részhalmazára*

$$i(Z) \leq k(|Z| - 1), \tag{4.25}$$

ahol $i(Z)$ a Z által feszített $I(Z)$ élhalmaz elemszámát jelöli. A feltételt elég megkövetelni 2-összefüggő részgráfot feszítő Z halmazokra.

Biz. Miután egy erdő a Z által feszített élek közül legfeljebb $|Z|-1$-t tartalmazhat, a fedésnek (4.25) szükséges feltétele. Az elegendőséghez alkalmazzuk a 4.1.7 tétel második felét a gráf körmatroidjára. Figyeljük meg, hogy a körmatroid egy X halmaza pontosan akkor felbonthatatlan és zárt, ha $X = I(Z)$ valamely 2-összefüggő részgráfot feszítő $Z \subseteq V$ halmazra. Ezért a $kr(X) \geq |X|$ feltétel ekvivalens a $k(|Z| - 1) \geq |I(Z)| = i(Z)$ egyenlőtlenséggel. •

Természetesen a 4.1.7 tétel első részét is ki lehet mondani a gráf körmatroidjára, bár itt a matroid specialitásából nem igazán adódik egyszerűsödés. Legyen a $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfban adottak az $F_1, \ldots, F_k$ erdők, ahol F_i a szóbanforgó erdő élhalmazát jelöli, míg $V(F_i)$ csúcshalmazát). Jelölje $E' := E - \cup_i F_i$ és $Z \subseteq V$-re jelölje $I'(Z)$ a Z által feszített E'-beli élek halmazát. Legyen továbbá r a G körmatroidjának rangfüggvénye, míg r_i az F_i összehúzásával keletkező gráf körmatroidjának a rangfüggvénye, azaz $r_i(X) = r(F_i \cup X) - |F_i|$. Ekkor $r_i(X)$ azt méri, hogy X-ből maximum hány élt lehet F_i-hez hozzávenni, hogy erdőt kapjunk.

TÉTEL 4.2.2 *A G gráf $F_1, \ldots, F_k$ erdői akkor és csak akkor egészíthetők ki E'-ből olyan erdőkké, melyek uniója E, ha V minden $\mathcal{P} := \{Z_1, \ldots, Z_t\}$ részpartíciója által feszített $X := \cup_j I'(Z_j)$ halmazra*

$$|X| \leq \sum_i r_i(X) \ (= \sum_i [r(F_i \cup X) - |F_i|]\ ). \tag{4.26}$$

A feltételben elegendő olyan $\{Z_i\}$ részpartíciókra szorítkozni, melyek minden tagjára $I'(Z_i)$ összefüggő gráfot feszít.

Biz. A 4.1.7 tétel szerint (4.9)-nek kell minden olyan $X \subseteq E'$ halmazra teljesülnie, amely egy zárt halmaz S'-be eső része. Márpedig egy gráf körmatroidjában a zárt halmazok éppen a részpartíciók által feszített élek, így (4.9) ekvivalens a (4.26) feltétellel. A második részhez csak azt kell megfigyelni, hogy egy részpartíció által feszített $X \subseteq E'$ élhalmaz ugyanaz, mint a (V, X) részgráf komponensei által feszített élhalmaz. •

A (4.26) feltételben lényegi különbség a 4.2.1 tétel feltételéhez képest, hogy itt V minden részpartíciójára követelünk meg egy egyenlőtlenséget, míg ott csak minden részhalmazra. A következő példa azt mutatja, hogy 4.2.2 tételben a feltételt nem is elegendő egyrészes részpartíciókra (azaz részhalmazokra) megkövetelni. A gráf álljon a $\{v_1, v_2, v_3, v_4,\}$ pontokból és kilenc élből: k_1, z_1, e_1 három párhuzamos él v_1 és v_2 között, k_2, z_2, e_2 három párhuzamos és v_3 és v_4. Ezenkívül vannak még az $e_3 = v_2v_4, p_1 = v_1v_4, p_2 = v_2v_3$ élek. Legyen $k = 3$ és tekintsük az $F_k := \{k_1, k_2\}, F_z := \{z_1, z_2\}, F_p := \{p_1, p_2\}$ erdőket. Az $E' := \{e_1, e_2, e_3\}$ elemeit nem lehet egyszerre ezekhez hozzávenni, hogy erdőket kapjunk (sőt már e_1-t és e_2-t sem lehet), amit ránézésre láthatunk, de a $Z_1, = \{v_1, v_2\}, Z_2 := \{v_3, v_4\}$ partíció is mutatja, hiszen erre $\cup_j I'(Z_j) = \{e_1, e_2\}$, $r(F_p \cup \cup_j I'(Z_j)) - |F_p| = 3-2 = 1$, $r(F_k \cup \cup_j I'(Z_j)) - |F_k| = 2-2 = 0$, $r(F_z \cup \cup_j I'(Z_j)) - |F_z| = 2-2 = 0$, és így a (4.26) egyenlőtlenség megsérül. Ugyanakkor könnyen látszik, hogy (4.26) egyrészes részpartíciókra fennáll.

Ezen kis példa fényében érdekes, hogy ha a 4.2.2 tételben szereplő F_i erdők fák, akkor a 4.2.1 tétel általánosításaként mégiscsak elegendő a (4.26) feltételt egyrészes részpartíciókra, azaz részhalmazokra megkövetelni. Az egyszerűsítés a következő kézenfekvő megfigyelésen múlik.

Állítás 4.2.3 *Legyen F' a $G = (V, E)$ gráf részfája, és legyen $\{Z_1, \ldots, Z_t\}$ a V részpartíciója. Jelölje r' az F' összehúzásával keletkező gráf körmatroidjának rangfüggvényét. Legyenek az $I_j \subseteq I'(Z_j)$ halmazok olyanok, hogy $F' \cup I_j$ fa minden $j = 1, \ldots, t$-re. Ekkor $F' \cup \cup_j I_j$ fa. Következésképp, $r'(\cup_j I'(Z_j)) = \sum_j r'(I'(Z_j))$.* •

Megjegyezzük, hogy ha F erdő, úgy az állítás már nem feltétlenül igaz.

TÉTEL 4.2.4 *Legyenek a $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfban adottak az $F_1, \ldots, F_k$ részfák, melyekre megengedjük, hogy nem tartalmaznak élt, de feltesszük, hogy $V(F_i)$ ponthalmazuk nem üres. Az F_i fák akkor* *és csak akkor egészíthetők ki $E' := E - \cup F_i$-ből olyan erdőkké, melyek uniója E, ha minden olyan $Z \subseteq V$ részhalmazra, amely E'-ben összefüggő gráfot feszít*

$$|I'(Z)| \leq \sum_i |Z - V(F_i)| - p(Z), \tag{4.27}$$

ahol $I'(Z)$ az Z által feszített E'-beli élek halmaza, $p(Z)$ pedig azon F_i fák száma, melyekre $V(F_i) \cap Z = \emptyset$.

Biz. Egy F_i-t magában foglaló erdő legfeljebb $|Z - V(F_i)|$ élt tartalmazhat $I'(Z)$-ből, ha $Z \cap V(F_i) \neq \emptyset$ és legfeljebb $|Z - V(F_i)| - 1 = |Z| - 1$-t, ha $Z \cap V(F_i) = \emptyset$. Így ha a kívánt fedés létezik, akkor $|I'(Z)| \leq \sum_i |Z - V(F_i)| - p(Z)$, vagyis (4.27) szükséges.

Ha egy $Z \subseteq V$ halmaz összefüggő gráfot feszít E'-ben, akkor $r_i(I'(Z)) = |Z - V(F_i)| - p_i(Z)$, ahol $p_i(Z)$ aszerint 1 vagy 0, hogy $Z \cap V(F_i)$ üres vagy sem. Emiatt $\sum_i r_i(I'(Z)) = \sum_i |Z - V(F_i)| - p(Z)$, vagyis a (4.27) feltétel azzal ekvivalens $|I'(Z)| \leq \sum_i r_i(I'(Z))$.

Mármost V-nek egy olyan $\{Z_1, \ldots, Z_t\}$ részpartíciójára, melyre mindegyik Z_i az E'-ben összefüggő részgráfot feszít a 4.2.3 állításból kapjuk, hogy $|X| = |\cup_j I'(Z_j)| = \sum_j |I'(Z_j)| \leq \sum_j [\sum_i r_i(I'(Z_j))] = \sum_i [\sum_j r_i(I'(Z_j))] = \sum_i r_i(\cup_j I'(Z_j)) = \sum_i r_i(X)$, azaz (4.26) fennáll és így a 4.2.2 tétel alkalmazható. •

4.2.2 Feszítő fák pakolása

TÉTEL 4.2.5 (Tutte) *Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fa, ha a ponthalmaz bármely $\{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójának határa legalább $k(t-1)$ elemű. Elegendő olyan partíciókat tekinteni, amelyeknek minden tagja összefüggő részgráfot feszít.*

Biz. Miután egy feszítő fa egy t részes partíció határából legalább $t - 1$ élt tartalmaz, a feltétel szükséges. Az elegendőséghez alkalmazzuk a 4.1.9 következményt a gráf körmatroidjára. Egy $X \subseteq E$ halmaz pontosan akkor ko-zárt, ha a csúcsok egy olyan partíciójának a határa, melynek részei összefüggő részgráfot feszítenek. Ilyenkor $t(X)$ éppen a részek száma minusz egy, vagyis a (4.13) feltétel fennáll. •

Következmény 4.2.6 *Minden $2k$-élösszefüggő gráf tartalmaz k élidegen feszítő fát.*

Biz. Tetszőleges t-részes partíció határának elemszáma a részek fokszámösszegének a fele. Márpedig, ha a gráf $2k$-élösszefüggő, akkor ez az összeg legalább $2kt$, ezért a határ legalább kt elemű, és így Tutte tétele alkalmazható. •

Tutte tételét is kiterjeszthetjük arra az esetre, amikor a gráfban már adva van néhány élidegen részerdő és ezeket szeretnénk kiegészíteni élidegen feszítő fákká.

TÉTEL 4.2.7 *Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban adottak az $F_1, \ldots, F_k$ élidegen részerdők. Akkor és csak akkor lehet ezeket élidegen feszítő fákká kiegészíteni a felhasználható élek $E' := E - \cup_i F_i$ halmazából, ha a V ponthalmaz bármely $\mathcal{P} := \{V_1, \ldots, V_t\}$ partíciójának határa legalább $\sum_i t_i(\mathcal{P})$ felhasználható élt tartalmaz, ahol $t_i(\mathcal{P})$ a V_j részek egy pontra húzásával majd az F_i éleinek összehúzásával keletkező gráf pontjainak száma minusz egy.*

Biz. Alkalmazzuk a 4.1.10 tételt a gráf körmatroidjára. •

Gráfok megerősítése

Tegyük most fel, hogy a $G = (V, E)$ gráf nem tartalmaz k élidegen feszítő fát, és minimális összköltségű új él bevételével szeretnénk elérni, hogy tartalmazzon. Ez a gráf megerősítési feladat. Legyen az új élek gráfja $H = (V, F)$, és legyen $c : F \to \mathbf{R}$ nemnegatív költségfüggvény. Annak érdekében, hogy létezzék egyáltalán jó bővítés, feltesszük, hogy $G^* = (V, E^*)$ tartalmaz k élidegen feszítő fát, ahol $E^* = E \cup F$.

Jelölje $c^* : E^* \to \mathbf{R}$ azt a költségfüggvényt, amelyre $c^*(e) = 0$, ha $e \in E$ és $c^*(f) = c(f)$, ha $f \in F$. A megerősítési feladat azzal ekvivalens, hogy G^*-ban kell a c^* költségfüggvényre nézve egy minimális összköltségű részgráfot találni, amely k élidegen feszítő fa uniója. Magyarán a G^* körmatroidjának k-szorosának kell minimális költségű bázisát kiszámítani. Márpedig a 4.1.2 fejezet Súlyozott partíció című alfejezetében megmutattuk, hogy miként lehet egy tetszőleges matroid k-szorosának maximális súlyú bázisát kiszámítani.

4.2.3 Partíció-összefüggő hipergráfok

Egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf élhalmazán a 2.6.4 szakaszban értelmeztük a hipergráf M_H körmatroidját, amelyben az erdős részhipergráfok voltak a függetlenek. Bevezettük a partíció-összefüggőség fogalmát is (bármely t részes partíció határa legalább $t-1$ hiperélt tartalmaz), és megállapítottuk, hogy ez erősebb az összefüggőségnél, még ha gráfokra a két fogalom ekvivalens is. Emlékeztetünk arra, hogy a 2.6.4 részben hozzárendeltünk a hipergráfhoz egy $G = (V, U; E)$ páros gráfot, ahol U elemeit az $\mathcal{E}$ elemeivel azonosítottuk. Az alábbiakban a H hipergráf helyett gyakran a G reprezentáló gráffal dolgozunk.

Valamely pozitív egész k-ra nevezzünk egy hipergráfot k-**élösszefüggő**nek, ha csúcsainak bármely kétrészes partíciójára van legalább k darab mindkét részt metsző hiperél. A $k = 1$ esetben ez a H összefüggősége. A H hipergráfra azt mondjuk, hogy k-**partíció-összefüggő**, ha bármely t részes partíció határa legalább $k(t-1)$ elemű, mással szóval a pontok bármely t részes partíciójára a köztes hiperélek száma legalább $k(t-1)$ (egy hiperélt köztesnek hívtunk, ha legalább két partíció részt metsz).

Gyakorlat 4.2.1 *Igazoljuk, hogy egy hipergráf akkor és csak akkor partíció-összefüggő, ha akárhogy kihagyva j hiperélt, legfeljebb $j+1$ összefüggő komponens keletkezik. Általánosabban, H akkor és csak akkor k-partíció-összefüggő, ha akárhogy kihagyva j hiperélt legfeljebb $j/k+1$ komponens keletkezik.*

Valamely pozitív egész k-ra jelölje M_{kH} azt a matroidot, amelyben hiperélek egy halmaza akkor független, ha felbomlik k erdős részhipergráfra. Magyarán M_{kH} az M_H matroid k-szorosa. A következő eredmény Tutte fenti diszjunkt fákra vonatkozó 4.2.5 tételének direkt általánosítása.

TÉTEL 4.2.8 *Az M_{kH} matroid rangfüggvényét az alábbi formula adja meg.*

$$r_{kH}(X) = \min\{k(|V| - |\mathcal{P}|) + e_X(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partíciója } V\text{-nek.}\} \tag{4.28}$$

Biz. Miután M_{kH} matroid X-re való megszorítása megegyezik az X-be nem tartalmazó hiperélek törlésével keletkező hipergráf körmatroidjának k-szorosával, a tételt elég csak az $X = U$ speciális esetre igazolni.

Mivel egy független halmaza bármely $V_i \in \mathcal{P}$ partíció-részből legfeljebb $k(|V_i| - 1)$ hiperélt tartalmazhat, így $r_{kH}(X)$ legfeljebb $k(|V| - |\mathcal{P}|) + e_X(\mathcal{P})$ lehet.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához V-nek egy olyan $\mathcal{P}$ partícióját kell találnunk, amelyre $r_{kH} = k(|V| - |\mathcal{P}|) + e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P})$. Az (2.20) és (2.61) formulák ötvözéséből kapjuk, hogy $r_{kH}(U) = \min_{Z\subseteq U}[kr_H(Z) + |U - Z|] = \min_{Z\subseteq U}[k \min\{|V| - |\mathcal{P}| + e_Z(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partíciója } V\text{-nek}\} \ + |U - Z|]$.

Legyen most $Z \subseteq U$ egy legszűkebb olyan halmaz, amelyen a minimum felvétetik, és legyen $\mathcal{P}$ egy olyan partíció, amelyen a belső minimum felvétetik.

Állítjuk, hogy ekkor $e_Z(\mathcal{P}) = 0$. Ha ugyanis létezne olyan $z \in Z$ elem, amelynek két partíció-részben is van szomszédja, akkor $Z' := Z - z$-re $k\, e_{Z'}(\mathcal{P}) + |U - Z'| = k[e_Z(\mathcal{P}) - 1] + [|U - Z| + 1] = k\, e_Z(\mathcal{P}) + |U - Z| - (k-1)$, ami $k \geq 2$ esetben ellentmond Z minimalizáló voltának, a $k = 1$ esetben pedig Z legszűkebb választásának.

Érvényes továbbá, hogy nincsen olyan $x \in U - Z$ elem, amelyre $e_x(\mathcal{P}) = 0$, mert különben $Z' := Z + x$-re $e_{Z'}(\mathcal{P}) = e_Z(\mathcal{P})$ és $|U - Z'| = |U - Z| - 1$ miatt ellentmondásban lennénk Z minimalizáló voltával.

Megállapíthatjuk tehát, hogy $U - Z$ pontosan azon U-beli elemekből áll, amelyeknek legalább két partíció-részben van szomszédjuk, azaz $|U - Z| = e_U(\mathcal{P})$. Amiből azt kapjuk, hogy $r_{kH}(U) = k[|V| - |\mathcal{P}| + e_Z(\mathcal{P})] + |U - Z| = k[|V| - |\mathcal{P}| + 0] + e_U(\mathcal{P})$, ami a célunk volt. •

Következmény 4.2.9 *Egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf akkor és csak akkor k-partíció-összefüggő, ha felbomlik k darab partíció-összefüggő részhipergráfra.*

Biz. A definíciókból a feltétel elegendősége rögtön adódik.

A szükségesség igazolásához tegyük fel, hogy H k-partíció-összefüggő, azaz $e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) \geq k(|\mathcal{P}| - 1)$ fennáll a V minden $\mathcal{P}$ partíciójára. Ez azzal ekvivalens, hogy $k(|V| - t) + e_{\mathcal{E}}(\mathcal{P}) \geq k(|V| - 1)$, ahol $t = |\mathcal{P}|$, és így a 4.2.8 tétel alapján $r_{kH} = k(|V| - 1)$. Tehát az M_{kH} k-szoros matroid minden bázisa $k(|V| - 1)$ elemű, és definíció szerint előáll k darab M_H-beli bázis egyesítéseként. Ebből következik, hogy M_H rangja $|V| - 1$ és M_H-nak létezik k páronként diszjunkt bázisa. Miután az 2.6.18 következmény alapján H-nak egy $H' = (V, \mathcal{E}')$ részhipergráfja pontosan akkor partíció-összefüggő, ha $r_H(\mathcal{E}') = |V| - 1$, a k diszjunkt bázis létezése M_H-ban épp azt jelenti, hogy H felbontható k partíció-összefüggő részhipergráfra. •

Egy hipergráf **rang**ján a legnagyobb hiperélének elemszámát értjük. A fenti 4.2.6 következmény direkt általánosítása az alábbi:

Következmény 4.2.10 *Egy legfeljebb q rangú (qk)-él-összefüggő H hipergráf élhalmaza felbomlik k darab partíció-összefüggő (speciálisan k darab összefüggő) részre.*

Biz. Az 4.2.9 következmény alapján elég azt kimutatnunk, hogy H k-partíció-összefüggő. Legyen $\mathcal{P}$ tetszőleges partíciója V-nek. Minden V_i partíció-részhez a (qk)-élösszefüggőség miatt H-nak van legalább qk olyan hiperéle, amely metszi V_i-t és $V - V_i$-t is. Miután minden hiperél legfeljebb q részt metszhet, kapjuk, hogy a köztes hiperélek száma legalább $(qk)|\mathcal{P}|/q > k(|\mathcal{P}| - 1)$, vagyis H tényleg k-partíció-összefüggő. •

4.2.4 Kapcsoló játék

A partíciós algoritmus egy szép alkalmazásaként megadjuk a Shannon féle kapcsoló játék megoldását. Egy $M = (S, r)$ matroidban $e_0 \in S$ egy kijelölt elem, ami nem hurok. Két játékos, a vágó V és a kötő K, felváltva választanak eddig még nem választott, e_0-tól különböző elemeket. Kötő nyer, ha kiválasztott egy e_0-t tartalmazó kört, vágó nyer, ha kiválasztott egy e_0-t tartalmazó vágást (azaz duális kört). (Korábban láttuk, hogy egy matroidban egy körnek és egy vágásnak nem lehet egyetlen közös eleme.)

A játék szemléletesebb egy gráf körmatroidján. Tegyük fel, hogy az e_0 él két végpontja s és t. Ekkor kötő célja az, hogy a kijelölt élei tartalmazzanak egy s-et és t-t összekötő utat, míg vágó célja az, hogy a kijelölt élei tartalmazzanak egy s-et és t-t elválasztó vágást.

Visszatérve a matroidokra, a játék alábbi, ekvivalens megfogalmazásával fogunk dolgozni. K és V felváltva összehúz és elhagy e_0-tól különböző elemeket. K nyer, ha a játék végére az e_0 rangja nullává válik (azaz e_0 hurok lesz), míg V nyer, ha 1 marad.

TÉTEL 4.2.11 *Tegyük fel, hogy Vágó kezd. Kötőnek pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha*
(1) *létezik olyan $X \subseteq S - e_0$ halmaz, hogy az $M - X$ matroidban van két e_0-t nem tartalmazó diszjunkt B_1, B_2 bázis.*

Vágónak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha
(2) *létezik olyan $X \subseteq S - e_0$ halmaz, hogy az összehúzott M/X matroidban $S - X$ két független F_1', F_2' halmaz uniójára bomlik.*

Tegyük fel, hogy Kötő kezd. Vágónak pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha
(3) *létezik olyan $X \subseteq S - e_0$ halmaz, hogy az $X + e_0$ összehúzásával keletkező matroidban $S - X - e_0$ két függetlenre bomlik.*

Kötőnek pontosan akkor van nyerő stratégiája, ha
(4) *létezik olyan $X \subseteq S - e_0$ halmaz, hogy az X elhagyásával keletkező matroidban $S - X$ két diszjunkt bázisra bomlik.*

Biz. Először belátjuk, hogy ha az adott konfigurációk rendelkezésre állnak, akkor a szóbanforgó nyerő stratégia tényleg létezik.

Tegyük fel, hogy (1) teljesül. Feltehető, hogy $X = S - e_0 - (B_1 \cup B_2)$. Belátjuk, hogy a Vágó bármely lépése után Kötő tud olyant lépni, hogy a keletkező matroidban az (1) feltétel ismét fennáll. Ekkor K tényleg nyer, hiszen a játék legvégén a szóbanforgó két bázis szükségképpen üres lesz, és így e_0 hurok.

Tegyük először fel, hogy Vágó az $S - (B_1 \cup B_2) - e_0$ egy s elemét hagyja el, akkor K válaszként összehúzza a B_1 egy tetszőleges e elemét. Legyen $f \in B_2$ a $B_2 + e$-ben lévő alapkör egy eleme. Most $B_1' := B_1 - e, B_2' := B_2 - f$ bázisok lesznek $M/e - X$-ben.

Tegyük most fel, hogy Vágó mondjuk B_1-nek egy t elemét hagyja el. Ekkor van olyan $k \in B_2$, hogy $B_1 - t + k$ bázis $M - X$-ben. Kötő válaszul ezt a k elemet húzza össze! Maradjon X az eredeti, és akkor $B_1 - t$ és $B_2 - k$ jó lesz bázisoknak.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor (3) teljesül. Ekkor tehát K kezd és azt látjuk be, hogy Vágónak van nyerése. Egészítsük ki F_1-t és F_2-t e_0-t tartalmazó M/X beli B_1 illetve B_2 bázisokká. Legyen $B_1^* := S - B_1 - X, B_2^* := S - B_2 - X$. Ezek diszjunkt bázisai az $M^* - X$ $(= (M/X)^*)$ matroidnak, amelyek M^*-ban feszítik e_0-t. Ekkor tehát a duális matroidra megkaptuk az (1) feltételt, azaz, ha a duális-vágó vagyis a kötő kezd, akkor a duális-kötő vagyis a vágó nyer.

Vizsgáljuk most meg a (2) esetet, amikor Vágó kezd. Tegyük fel, hogy e_0 mondjuk F_1'-ben van. Vágó hagyja ki az e_0-nak az F_2'-re vonatkozó (M/X matroidbeli) alapkörének bármely $f \neq e_0$ elemét, vagy ha $F_2' + e_0$ is független, akkor $F_1' \cup F_2' - e_0$ bármely f elemét. Ekkor az $S - f$ alaphalmazon definiált $M - f$ matroidra vonatkozólag, az előbb leírt (3)-as szituáció áll fenn, tehát kötő kezdésével vágó nyer.

A (4)-es eset analóg megy vissza (1)-re: Legyen B_1 és B_2 az $M - X$ matroid két bázisa, melyek partícionálják $S - X$-t. Legyen e_0 mondjuk B_1-ben. Ekkor van olyan $f \in B_2$ elem, amelynek az $M - X$ matroidban a B_1-re vonatkozó alapköre tartalmazza e_0-t. Ha most a Kötő ezen f elem összehúzásával kezd, akkor az M/f matroid olyan, hogy van benne egy X halmaz, amelynek elhagyása után a maradék tartalmaz két e_0-t nem tartalmazó bázist, nevezetesen $B_1 - e_0$ és $B_2 - f$ ilyen bázisok. Ez tehát pontosan az (1) esetben leírt szituáció, amelyről láttuk már, hogy vágó kezdése mellett is kötő nyer. •

TÉTEL 4.2.12 *Az* (1) *és* (2) *eset közül az egyik fennáll.*

Biz. A fent leírt matroid partíciós algoritmust alkalmazzuk először az $S - e_0$ alaphalmazon az $M_1 := M_2 := M - e_0$ matroidokra. Az algoritmus az F_1, F_2 független halmazokkal terminál valamint egy X_R halmazzal, ahol X_R az R-ből a segédgráfban elérhető pontok halmaza.

Most vegyük be az e_0 elemet és folytassuk az algoritmust. Tegyük fel először, hogy van e_0-ból javító út. Ez szükségképpen diszjunkt az X_R halmaztól, így az út által definiált csere csak az X_R-n kívüli részt érinti.

Jelölje a csere után a két független halmaz X_R-n kívüli részét F_1' és F_2'. (Tehát $F_1' \cup F_2' = (F_1 \cup F_2) - X_R + e_0$). Most az $X := X_R$ teljesíti az (2) feltételt, hiszen az összehúzásával keletkező matroidban mind F_1' mind F_2' független lesz (merthogy mind $F_1 \cap X$, mind $F_2 \cap X$ maximális függetlenje X-nek az M matroidban).

Tegyük most fel, hogy az $R + e_0$-ból elérhető pontok X' halmaza diszjunkt $\{t_1, t_2\}$-től. Legyen $X := S - X'$. Ez teljesíti (1)-t hiszen X-t kihagyva a keletkező matroidnak $F_1 \cap X$ és $F_2 \cap X$ diszjunkt bázisai. •

4.2.5 Báziskicserélés

Következő alkalmazásként bemutatjuk az 1.4.5 tétel általánosítását. Ismét szükségünk lesz az 1.4.2 részben igazolt (1.9) általánosított szubmodularitási egyenlőtlenségre.

TÉTEL 4.2.13 (Greene és Magnanti) *Legyen B_1 és B_2 az M matroid két bázisa és $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$ a B_1 bázis egy partíciója. Ekkor a B_2 bázisnak létezik olyan $\{Y_1, \ldots, Y_m\}$ partíciója, amelyre $(B_1 - Z_i) \cup Y_i$ bázis minden $i = 1, \ldots, m$-re.*

Biz. Jelölje a matroid rangját k. Minden $i = 1, \ldots, m$-re tekintsük a $B_1 - Z_i$ halmaz összehúzásával keletkező matroid B_2-re való $M_i = (B_2, r_i)$ megszorítását. A B_2 valamely X részhalmazára legyen $X_i := (B_1 - Z_i) \cup X$. Ekkor $\sum_i \chi_{X_i} = (m-1)\chi_{(B_1 \cup X)} + \chi_X$, és így az $\hat{r}$ definíciójából $\hat{r}[(m-1)\chi_{(B_1 \cup X)} + \chi_X] = (m-1)r(B_1 \cup X) + r(X)$. Az 1.4.9 lemma alapján $\sum_i r(X_i) \geq \hat{r}(\sum_i \chi_{X_i}) = \hat{r}[(m-1)\chi_{(B_1 \cup X)} + \chi_X] = (m-1)r(B_1 \cup X) + r(X) \geq (m-1)k + |X|$. Miután $r_i(X) = r(X_i) - r(B_1 - Z_i) = r(X_i) - |B_1 - Z_i|$, kapjuk: $\sum_i r_i(X) = \sum_i [r(X_i) - |B_1 - Z_i|] = \sum_i r(X_i) - (km - k) \geq (m-1)k + |X| - (km - k) = |X|$.

A partíciós tétel miatt B_2 felbontható $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ halmazokra úgy, hogy Y_i független M_i-ben. M_i definíciója miatt $|Y_i| \leq |Z_i|$, és $\sum |Z_i| = \sum |Y_i|$. Ezért $|Y_i| = |Z_i|$, és ekkor $(B_1 - Z_i) \cup Y_i$ bázisa M-nek. •

Érdemes a 4.2.13 tételt az $m = 2$ speciális esetben külön megfogalmazni, mert ezáltal az 1.4.3 tételben megfogalmazott szimmetrikus bázis-kicserélési tulajdonság általánosítását is megkapjuk.

TÉTEL 4.2.14 (Greene) *Legyen B_1 és B_2 az M matroidnak két bázisa. Ekkor minden $F_1 \subseteq B_1$ halmazhoz létezik egy olyan $F_2 \subseteq B_2$ halmaz, amelyre mind $B_1 - F_1 \cup F_2$, mind $B_2 - F_2 \cup F_1$ a matroid bázisa.*

Biz. A 4.2.13 tételt $m = 2$-re és a $Z_1 := F_1, Z_2 := B_1 - F_1$ halmazokra alkalmazva kapjuk, hogy létezik B_2-nek olyan $\{Y_1, Y_2\}$ partíciója, amelyre $B_1 - Z_1 \cup Y_1$ és $B_1 - Z_2 \cup Y_2$ is bázis. De ekkor $F_2 := Y_1$ kielégíti a tétel kívánalmait, hiszen $(B_1 - F_1) \cup F_2 = (B_1 - Z_1) \cup Y_1$ és $(B_2 - F_2) \cup F_2 = (B_1 - Z_2) \cup Y_2$. •

2007. május 6. ulmat42

Tartalom

Frank András

KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁS, II:

MATROIDELMÉLET

2007. május 6.

ELTE TTK, Operációkutatási Tanszék