SZUBMODULARIS FüGGVENYEK
A KOMBINATORIKUS OPTIMALIZALASBAN

doktori értekezés

irta:

FRANK ANDRAS

Budapest, 1989. január

TARTALOM

II.RÉSZ. UTAK ÉS KöRöK PAKOLÁSA

SZUBMODULÁRIS FÜGGVÉNYEK A KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁSBAN

A "kombinatorikus optimalizálás" (combinatorial optimization) kifejezés mintegy 12 évvel ezelőtt jelent meg egy aránylag jól körülhatárolható és gyorsan fejlődő tématerület elnevezéseként. A tárgy, durván szólva, diszkrét konfigurációk optimalitási és algoritmikus kérdéseit vizsgálja. Két fő forrása a hálózati folyamok és a matroidok, de ide sorolhatók a különféle, gráfokon, hipergráfokon, részbenrendezett halmazokon megfogalmazható optimalizálási kérdések is.

A kombinatorikus optimalizálás különböző eszméi közül a szubmodularitás fogalma különösen hasznosnak és gyümölcsözőnek bizonyult. Jelen dolgozat egyik vezérmotivuma a szubmoduláris függvények vizsgálata és alkalmazása.

Vizsgálódásaink döntően két részre bonthatók. A dolgozat első felében a szubmoduláris függvények mint vizsgálandó objektumok jelennek meg. A második rész a kombinatorikus optimalizálás egy másik területe, az egészértékű többtermékes folyamok, vagy másnéven a diszjunkt utak problémáját vizsgálja. Ez annyiban kapcsolódik az első részhez, hogy a bizonyításokban gyakran támaszkodunk szubmodularitást használó gondolatokra.

Egy $b:2^S \to R$ halmazfüggvényt akkor nevezünk *szubmodulárisnak*, ha $b(X)+b(Y) \geq b(X\cap Y)+b(X\cup Y)$ fennáll minden $X,Y \subseteq S$ halmaz párra. Szubmoduláris függvényekkel kapcsolatos egyik kiinduló fogalom a matroid fogalma. H.Whitney bebizonyította, hogy minden matroidhoz egyértelmű módon hozzárendelhető az ún. rang függvénye, amely szubmoduláris, nemnegativ, egészértékű, monoton növő, és értéke minden X halmazon legfeljebb az X elemszáma.

Később kiderült, hogy szubmoduláris függvények más területeken is, implicit vagy explicit, fontos szerepet játszanak. Igy gráfelméletben, játékelméletben, a valószinűségszámitásban, hálóelméletben, információelméletben találhatunk példákat szubmoduláris függvények használatára. Meglepően szoros analógia mutatkozik a konvex függvények és a szubmoduláris függvények között. Mindezekről részletes beszámolót ad Lovász László [1983] szép áttekintő dolgozata.

A szubmoduláris függvények szisztematikus vizsgálatát J.Edmonds kezdeményezte [1970]. A fő gondolata az volt, hogy minden szubmoduláris függvényhez egy-egy értelmüen hozzá lehet rendelni egy poliédert, és ezután elegendő a poliédert vizsgálni. A kapott poliédert polimatroidnak nevezte el. Edmonds, tanitványával R.Giles-szal együtt, számos érdekes, polimatroidokra vonatkozó eredményt vezetett le, melyek közül a két legfontosabb a polimatroid metszet tétel és a mohó algoritmus.

A polimatroid fogalmának azonban van néhány hátránya. Igy a szuper- ill. szubmoduláris függvények szerepe aszimmetrikussá válik. Csak korlátos és nemnegativ szubmoduláris függvények vizsgálatára alkalmas. További nehézség, hogy alkalmazásokban gyakran olyan függvények kerülnek elő, melyeknél a szubmodularitási egyenlőtlenséget nem minden halmaz párra kötjük ki.

Ezen okok miatt újabb, a polimatroidokkal analóg módon viselkedő poliéderek kerültek bevezetésre. Lényegében Edmondssal egyidőben Shapley játékelméleti indittatásból definiált és vizsgált egy hasonló jellegű poliédert azzal a különbséggel, hogy szupermoduláris függvényekből indult ki. S.Fujishige nevéhez fűződik a bázis poliéder illetve a szubmoduláris rendszer fogalma.

Polimatroidokkal kapcsolatban további nehézség, hogy polimatroid lapja, eltoltja, téglával való metszete, vagy tükörképe már nem polimatroid, bár ezek a poliéderek ugyanolyan szépen viselkednek, mint a polimatroidok (pl. TDI tulajdonságúak és érvényes rájuk a metszet tétel).

Ezeket a hátrányokat kikerülendő és a fenti különféle poliéderek egységes tárgyalása érdekében [Frank 1984c]-ben bevezetésre került az általánositott polimatroid, vagy röviden g-polimatroid fogalma. A dolgozat 2. fejezetében a g-polimatroidok tulajdonságainak részletes elemzését tűzzük ki célul. Kimutatjuk, hogy e poliéder osztály zárt az eltolásra, tükrözésre, vetitésre, lapképzésre, téglával való metszésre, összeadásra, homomorf kép képzésre. g-polimatroidokra is érvényes a metszet tétel és a mohó algoritmus. Leirjuk, hogy az egész g-polimatroidok miképp állnak elő matroid poliéderből.

Egy másik, a g-polimatroidoknál bonyolultabb fogalom a szubmoduláris folyam fogalma. Ez J.Edmondstól és R.Gilestól származik. Fő haszna abban van, hogy közös keretül szolgál olyan látszólag távol eső problémák kezeléséhez, mint a hálózati folyam probléma, a matroid metszet probléma, vagy a Lucchesi- Younger tétel. A 3. fejezetben elemezzük a szubmoduláris folyam poliéderek fő tulajdonságait és kapcsolatukat g-polimatroidokkal. Nevezetesen, kimutatjuk, hogy egy poliéder pontosan akkor szubmoduláris folyam poliéder, ha előáll két g-polimatroid metszetének vetületeként. E fejezet másik célja, hogy leirja a g-polimatroidoknál és szubmoduláris folyamoknál felvetődő optimalizálási problémák elvi hátterét.

Ezen optimalitási kérdésekre a 4. fejezetben adunk algoritmusokat. Az eljárások a klasszikus folyam algoritmusok nagyfokú kiterjesztésének tekinthetők.

Az I.rész 5. fejezetét teljes egészében a vázolt elmélet és algoritmusok különféle alkalmazásainak bemutatására szánjuk. Például megmutatjuk, hogy egyéb szub- illetve szupermoduláris függvényeket valamint gráfokat magukban foglaló modellek miként kezelhetők szubmoduláris folyamok segitségével. Különféle gráfelméleti alkalmazások is helyet kapnak.

A dolgozat második részében alapvetően utak és körök pakolásával foglalkozunk. Ezt a munkát nagyban befolyásolta az áramkörök huzalozás tervezéséből adódó impulzus. Egyik fő eredményünk azt mutatja, hogy négyzetrácsban (ami huzalozás tervezési problémáknál tipikus alapstruktúra) az útpakolási probléma fontos speciális esetekben szépen megoldható. Ezen az úton továbbhaladva bebizonyitjuk e négyzetrácsos tétel és Okamura és Seymour tételének közös általánositását. Ennek egyik jelentősége abban van, hogy legalábbis bizonyos mértékig, lehetséges a paritási megkötésektől megszabadulni, közelebb kerülve a potenciális gyakorlati felhasználás lehetőségéhez.

Egy további eredmény P.Seymour egészértékű sikbeli két-termékes folyam tételét általánositja arra az esetre, amikor az összekötendő pont-párok egy sikgráf két ablakán helyezkednek el.

A vizsgálatok egy újabb iránya adott homotópiájú utak pakolásával foglalkozik. Egyik alapvető eredmény Robertson és Seymour tétele, amely hengerre rajzolt gráfban keres adott számú megadott hmotópiájú utat. Ezt általánositani fogjuk azáltal, hogy megadunk a hengeren bepakolható adott homotópiájú utak maximális számára egy min-max alakot abban az esetben, amikor a Robertson-Seymour féle feltétel nem áll.

Egy idevonatkozó további eredményünk a Rothschild-Whinston tétel irányitott ellenpárját szolgáltatja. Végül Fleischnernek és Seymournak egy-egy sik Euler-gráfok körfelbontásaira vonatkozó tételének közös általánositása szerepel.

E dolgozat a kandidátusi értekezésem megirása (1979) óta eltelt időszakban végzett kutatásaim összefoglalója. Ebben az periódusban számos kutatóval kerültem szakmai kapcsolatba, akiknek munkája, közvetve vagy közvetlenül, befolyásolta az érdeklődésemet, és akiktől nagyon sokat tanulhattam. Közülük különösen nagy hatással volt rám Jack Edmonds, Lovász László, Alexander Schrijver és Paul Seymour. Köszönetet mondok nekik egyrészt azért a személyes hatásért, amellyel munkámat előre lenditették, másrészt azért az örömért, amelyhez dolgozataik megismerése révén jutottam.

Köszönettel tartozom Abos Imre kandidátus villamos mérnöknek is, akitől erős ösztönzést kaptam, hogy áramkörök huzalozási problémáinak gráfelméleti hátterével foglalkozzak. Ő fogalmazta meg azt a négyzetrácsos problémát, amelynek megoldása a jelen dolgozat második részének kifejlődéséhez vezetett.

A Távközlési Kutató Intézet és az Eötvös Loránd Tudományegyetem, a volt és a jelen munkahelyem, megfelelő környezetet biztositott a kutató munka számára.

Külön köszönet illeti a Bonni Egyetem Operációkutatási Intézetet, mindenek előtt annak igazgatóját, Bernhard Korte professzort. Az eltelt nyolc év alatt összesen több mint három évet töltöttem ebben az intézetben. Ennek nem csak az volt a haszna, hogy ottlétem során az elképzelhető legideálisabb körülmények között végezhettem kutató munkámat, hanem az is, hogy anyagilag ez tette lehetővé, hogy Magyarországon is kellő időt foglalkozhassak matematikával.

Végül, nagy örömömre szolgál megemlitenem Tardos Éva kandidátus, volt tanitványom, majd munkatársam nevét. Vele 1981-85 között igen intenziven dolgoztam együtt és ennek eredményeként számos közös dolgozatot is irtunk.

I. RÉSZ

SZUBMODULÁRIS FüGGVÉNYEK

1. JELöLÉSEK, ELŐISMERETEK

Az első részben végig egy véges S alaphalmazzal dolgozunk. Az egyelemű halmazt, amennyiben nem okoz félreértést, nem különböztetjük meg az egyetlen elemétől. Például valamely $b:2^S\to R$ halmazfüggvény esetén, ha $s\in S$, akkor a $b(\{s\})$-t $b(s)$-sel rövidítjük. $u,v\in S$ esetén egy $X\subseteq S$ halmazt *$\bar{u}v$-halmaznak* hivunk, ha $u\in X$, $v\notin X$. Az $X,Y\subseteq S$ halmazokat *metszőnek* nevezzük, ha $X-Y$, $Y-X$, $X\cap Y$ halmazok egyike sem üres. Ha még ráadásul $V-(X\cup Y)$ sem üres, akkor X és Y *keresztező*. X és Y *ko-diszjunkt*, ha $X\cup Y=S$. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszert *metszőnek* (*keresztezőnek*) hivunk, ha minden X,Y metsző (keresztező) tagjára $X\cap Y$ és $X\cup Y$ is $\mathcal{F}$-ben van. Ha $\mathcal{F}$ zárt a metszet és unió képzésre, akkor *halmazgyűrűnek* nevezzük. $\mathcal{F}$-et *láncnak* nevezzük, ha $\mathcal{F}$ bármely két tagja tartalmazza egymást. Egy $\mathcal{F}$ halmazrendszer *lamináris* (*keresztezés-mentes*), ha nincs két metsző (keresztező) tagja.

Valamennyi szereplő halmazfüggvényről feltesszük, hogy az üres halmazon az értéke 0. Legyen $b:2^S\to R\cup\{\infty\}$ az S részhalmazain értelmezett függvény. b-re azt mondjuk, hogy *véges*, ha értéke mindenhol véges. Azt mondjuk, hogy b *szubmoduláris* az X,Y halmazokon, ha

$$b(X)+b(Y)\geq b(X\cap Y)+b(X\cup Y). \tag{1.1}$$

A b függvény *metszőn* (*keresztezőn*) *szubmoduláris*, ha (1.1) teljesül minden metsző (keresztező) X, Y halmazra. Ha (1.1) minden X,Y párra teljesül, akkor b *teljesen szubmoduláris* vagy röviden *szubmoduláris*. Egy véges, egészértékű, nemnegativ, monoton növő függvényt *polimatroid függvénynek* hivunk. Amennyiben b polimatroid függvény minden X halmazon legfeljebb $|X|$ értékű, akkor b, ismert módon, egy matroid rangfüggvénye.

Általában a b", b', b jelöléseket fogjuk használni egy keresztezőn, egy metszőn és egy teljesen szubmoduláris függvényre.

A $p:2^S\to R\cup\{\infty\}$ halmazfüggvényt *szupermodulárisnak* nevezzük, ha $-p$

szubmoduláris.

Egy m halmazfüggvény *moduláris*, ha (1.1) mindig egyenlőséggel teljesül. Könnyű látni, hogy minden véges moduláris halmazfüggvényt az egyelemű halmazokon felvett értéke meghatározza. Ha $f:S\to R$ függvény, akkor $Z\subseteq S$ esetén $f(Z):=\Sigma(f(s):s\in Z)$.

Fontos, ismert művelet a reszelés (truncation). Egy $b':2^S\to R\cup\{\infty\}$ halmazfüggvény *alsó reszeltjén* az

$$(1.2)\qquad b(X)=\min(\Sigma(b'(X_i)):\ \{X_i\}\text{ az }X\text{ partíciója})$$

függvényt értjük. Ha a b' függvény értékkészlete $R\cup\{-\infty\}$ és min helyett max szerepel, akkor *felső reszeltről* beszélünk. Az alsó (felső) reszelés műveletét mindig metszőn vagy keresztezőn szub- moduláris (szupermoduláris) függvényre fogjuk alkalmazni, ezért az alsó illetve felső jelzőket rendszerint elhagyjuk.

Egy másik, egyszerűbb művelet a monotonná tevés. Adott b halmazfüggvényhez definiáljuk a $b_{mon}(X)=\min(b(Y):\ Y\supseteq X)$ függvényt. Nyilván b_{mon} monoton növő és könnyen látszik, hogy ha b szubmoduláris, akkor b_{mon} is az. Később a reszelés fogalmát kiterjesztjük és kiderül majd, hogy a monotonná tevés is egyfajta reszelés.

Legyen $p:2^S\to R\cup\{\infty\}$ és $b:2^S\to R\cup\{\infty\}$ két halmazfüggvény. Azt mondjuk, hogy p és b *összeillik*, ha

$$(1.3)\qquad b(X)-p(Y)\geq b(X-Y)-p(Y-X)$$

fennáll minden X,Y halmazra. Ha (1.3) csak metsző X és Y-ra van megkövetelve, akkor p és b *gyengén összeillő*. Az (1.2) egyenlőtlenséget *kereszt egyenlőtlenségnek* hivjuk.

A (p,b) párt *erős párnak* nevezzük, ha -p és b is teljesen szubmoduláris, és p és b összeillik. A (p,b) párt *gyenge párnak* nevezzük, ha -p és b metszőn szubmoduláris és p és b gyengén összeillő.

Egy $b:2^S\to R\cup\{\infty\}$ halmazfüggvénnyel kapcsolatban a következő három poliédert fogjuk vizsgálni.

1. $P(b):=\{x\in R^S:\ x\geq 0,\ x(A)\leq b(A)$ minden $A\subseteq S$-re$\}$,

2. $S(b):=\{x\in R^S:\ x(A)\leq b(A)$ minden $A\subseteq S$-re$\}$,

3. $B(b):=\{x\in R^S:\ x(A)\leq b(A)$ minden $A\subseteq S$-re és $x(S)=b(S)\}$.

Egy (p,b) halmazfüggvény párhoz hozzárendeljük a következő poliédert.

4. $Q(p,b):=\{x\in R^S:\ p(A)\leq x(A)\leq b(A)$ minden $A\subseteq S$-re$\}$.

Ha b polimatroid függvény akkor P(b) egy *polimatroid* [J.Edmonds 1970]. Amikor b matroid rangfüggvény, akkor P(b) egy matroid független halmazainak konvex burka, amint ezt Edmonds kimutatta. Ilyenkor P(b)-t a *matroid poliéderének* hivjuk. Ha b teljesen szubmoduláris, akkor S(b) neve *szubmoduláris poliéder* [S.Fujishige 1984]. Ha b teljesen szubmoduláris és b(S) véges, akkor B(b)-ét *bázis poliédernek* [S.Fujishige] hivjuk. Az utóbbi esetben, ha b(S)=0, úgy B(b) *0-bázis poliéder*. Ha b matroid rangfüggvény, akkor B(b), ismét Edmonds egy tétele szerint, a matroid bázisainak konvex burka. Végül, p teljesen szupermoduláris függvény esetén az $\{x\in R^S:\ x(A)\geq p(A)$ minden $A\subseteq S$-re$\}$ poliédert *kontra polimatroidnak* nevezzük. Ezt [Shapley] tanulmányozta. Ismertetünk néhány alapvető eredményt.

<u>1.1 TÉTEL</u> [J.Edmonds] *Minden P polimatroidhoz létezik egy egyértelmű b polimatroid függvény, melyre P=P(b), nevezetesen $b(A)=\max(x(A):\ x\in P)$.*∎

Tetszőleges b függvény esetén nyilván fennáll, hogy $S(b)=S(b_{mon})$. A reszelésre vonatkozó alapvető eredmény a következő.

<u>1.2 (RESZELÉSI) TÉTEL</u> [Lovász L.] *b' metszőn szubmoduláris függvény b reszeltje teljesen szubmoduláris. Továbbá S(b')=S(b).*

<u>1.3 TÉTEL</u> [J.Edmonds] *Legyen b' nemnegatív, metszőn szubmoduláris függvény (nem szükségszerűen monoton). Ekkor P(b') polimatroid, éspedig P(b')=P(b), ahol $b(X)=\min(\Sigma(b'(X_i)):\ \cup X_i\supseteq X$, az X_i-k diszjunktak). (Azaz b a b'-ből reszeléssel és monotonná tevéssel áll elő).*∎

Megemlitünk még egy szub- illetve szupermoduláris függvényekre vonatkozó lényeges tételt, amely [Frank 1984b]-ban szerepelt.

1.4 TÉTEL (Diszkrét szeparációs tétel) *Legyen* $b:2^S \to R\cup\{\infty\}$ *teljesen szubmoduláris függvény és legyen* $p:2^S \to R\cup\{-\infty\}$ *teljesen szupermoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan (véges) moduláris függvény, melyre* $p \le m \le b$, *ha* $p \le b$. *Ha* $p \le b$, p *és* b *egészértékű, akkor* m *választható egészértékűnek.*∎

A 3.3 fejezetben bebizonyítjuk majd ezt a tételt. A reszelési tétellel összekombinálva kapjuk:

1.5 TÉTEL *Legyen* $b':2^S \to R\cup\{\infty\}$ *metszőn szubmoduláris függvény és legyen* $p':2^S \to R\cup\{-\infty\}$ *metszőn szupermoduláris függvény. Akkor és csak akkor létezik olyan (véges) moduláris függvény, melyre* $p' \le m \le b'$, *ha* $\sum p'(F_i) \le \sum b'(G_j)$ *fennáll, ahol* $\{F_i\}$ *és* $\{G_j\}$ *mindegyike diszjunkt halmazokból áll és* $\cup F_i = \cup G_j$. *Ha* p' *és* b' *egészértékű, akkor* m *választható egészértékűnek.*∎

Egy nemnegativ $y:2^S \to R_+$ függvényt *súlyozott láncnak* hivunk, ha az $\mathcal{F}=\{X: y(X)>0\}$ halmazrendszer lánc. Minden y súlyozott láncnak megfeleltetünk egy nemnegativ $\pi=\sum_A y(A)\chi_A$ $(\in R^S)$ vektort, amit y *mélység vektorának* nevezünk. A megfeleltetés 1-1-értelmű: egy nemnegativ $\pi \in R^S$ vektor komponenseinek különböző értékei legyenek $0 \le \pi_1 < \pi_2 < \ldots < \pi_k$ és jelölje $X_i:=\{s: \pi(s) \ge \pi_i\}$. Definiáljuk $y(X):= \pi_i - \pi_{i-1}$, ha $X=X_i$ $(i=1,\ldots,k)$ (ahol $\pi_o=0$). Nyilván ez az y súlyozott lánc, melynek mélység vektora π. Ezért y-t a π *súlyozott láncának* nevezzük.

Legyen b teljesen szubmoduláris függvény. A b természetesen kiterjeszthető nemnegativ vektorokra. Éspedig $\pi \in R^S_+$ esetén $\hat{b}(\pi):=\sum(y(X)b(X): y(X)>0)$, ahol y a π súlyozott lánca. Nyilvánvalóan $\hat{b}$ pozitivan homogén, azaz nemnegativ α szám esetén $\hat{b}(\alpha\pi)= \alpha\hat{b}(\pi)$. Lovász [1983] megmutatta, hogy $\hat{b}$ konvex, ami a homogenitás folytán ekvivalens azzal, hogy szubadditiv.

Lineáris egyenlőtlenség-rendszerek elméletéből az alábbiakat fogjuk használni. Legyen A egy $m*n$-es mátrix és b egy m-vektor. A $cx \le g$ egyenlőtlenséget $(c \in R^n$, $g \in R)$ az $Ax \le b$ egyenlőtlenség rendszer *következményének* mondjuk, ha a c vektor az A sorainak olyan nemnegativ lineáris kombinációja, azaz $c=yA$, $y \ge 0$, amelyre $yb \le g$. Ha y egészértékűnek választható, akkor azt mondjuk, hogy $cx \le g$ az $Ax \le b$

egész következménye.

1.6 FARKAS LEMMA ***A $cx\leq g$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor következménye az $Ax\leq b$ egyenlőtlenség rendszernek, ha minden x, ami kielégíti $Ax\leq b$ -t, kielégíti $cx\leq g$ -t is.*** ∎

A dolgozatban különféle optimalizálási kérdéseket is vizsgálunk majd. Azzal a megállapodással élünk, hogy egy függvény minimuma az üres halmazon definició szerint $+\infty$, a maximuma pedig $-\infty$.

Legyen $Q=\{x\in R^n\colon Ax\leq b\}$ egy poliéder. A Q egy Q_F *oldalán* az $\{x\in Q\colon A_Fx\leq b_F\}$ poliédert értjük, ahol A_F az A-nak egy m_F*n-es részmátrixa és b_F a b-nek a megfelelő "részvektora". Q maximális Q-tól különböző oldalait *lapoknak* hivjuk. Egy Q poliédert *egésznek* nevezünk, ha minden oldala tartalmaz egész pontot, azaz Q az egész pontjainak konvex burka.

Edmonds és Giles nyomán egy $Ax\leq b$ egyenlőtlenség rendszert *TDI-nek* (total dual integral) nevezünk, ha tetszőleges egész $d\in R^n$ vektor esetén a $\max(dx\colon Ax\leq b)$ lineáris programnak, ha van optimális megoldása, akkor van egész is.

1.7 TÉTEL [Hoffman, Edmonds és Giles] ***Ha A és b egészértékű és $Ax\leq b$ TDI rendszer, akkor az $\{x\in R^n\colon Ax\leq b\}$ poliéder egész.*** ∎

Egyszerű, bár fontos az alábbi

1.8 ÁLLÍTÁS ***Ha az $Ax\leq b$-ből néhány egész következmény hozzávételével előálló rendszer TDI, akkor maga az $Ax\leq b$ rendszer is TDI.*** ∎

Legyen P és Q két poliéder R^S-ben. Ezek P+Q *összegén* az $\{x\colon p+q,$ valamely $p\in P$ és $q\in Q$-ra$\}$ poliédert értjük. Legyen $\{S_1,\dots,S_k\}$ az S halmaz partíciója nemüres részekre. R^S minden x vektorához hozzárendelünk egy $z=\varphi(x)\in R^k$, az x *homomorf képének* hivott vektort, a következőképp. $z(i):=x(S_i)$ $(i=1,\dots,k)$. Valamely $P\subseteq R^S$ poliéder $\varphi(P)$ *homomorf képén* a $\varphi(P):=\{\varphi(x)\colon x\in P\}$ halmazt értjük.

Legyen $s\in S$ és P egy poliéder R^S-ben. P-nek az *s mentén való vetületén* egy eggyel alacsonyabb dimenzióban fekvő halmazt értünk, melynek minden eleme P egy eleméből az s-nek megfelelő koordináta elhagyásával áll elő. S egy részhalmaza mentén történő vetitést analóg módon lehet definiálni.

$G=(V,E)$ gráfban, amely lehet irányitott vagy irányitatlan, $E_G(X)$-szel jelöljük az $X\subseteq V$ ponthalmaz által feszitett élek halmazát. Ha nem okoz félreértést a G indexet elhagyjuk (ez a megjegyzés érvényes az összes alábbi G-től függő jelölésre). Ha $X=\{u,v\}$ akkor $E(X)$-re az $E(u,v)$ jelölést használjuk.

$\nabla_G(X,Y)$ az X-Y és Y-X között vezető élek halmaza. Ennek elemszáma $d_G(X,Y)$. Speciálisan az $\{u,v\}$ és $V-\{u,v\}$ halmaz között vezető élek halmazát $\nabla_G(\{u,v\})$ jelöli. $\nabla_G(X,V-X)$-et $\nabla_G(X)$-szel rövidítjük. Hasonlóan $d_G(X):=d_G(X,V-X)$. Egy v csúcsra $d(v)$ a csúcs fokszáma.

Ha G irányitott gráfot jelöl, akkor $\varrho_G(X)$ jelöli az X-be lépő élek halmazát, mig $\delta_G(X)$ az X-ből kilépőkét. Ha $x:E\to R$ egy vektor akkor $\varrho_x(A):=\Sigma(x(e):$ e enters $A)$, $\delta_x(A):=-\varrho_x(V-A)$ és $\lambda_x(A):=\varrho_x(A)-\delta_x(A)$. Világos, hogy bármely x esetén λ_x moduláris. Adott $X\subseteq V$ esetén $\lambda_{\underline{X}}:E\to\{0,\pm 1\}$ jelöli azt a vektort, amely egy e élen 1, ha e belép X-be, $=-1$ ha kilép és 0 egyébként. $\varrho_{\underline{X}}:E\to\{0,+1\}$ azon vektor amely, egy e élen +1, ha e belép X-be. Végül $\delta_{\underline{X}}:=\varrho_{\underline{V-X}}$. Általában nem teszünk majd különbséget egy halmaz és karakterisztikus vektora között, igy például $\varrho_{\underline{X}}$ fogja jelölni az X-be lépő élek halmazát is.

Ha G és H két gráf ugyanazon a V csúcshalmazon, akkor G+H azt a gráfot jelöli V-n, melynek élhalmaza G és H élhalmazának egyesitése.

2. ÁLTALÁNOSÍTOTT POLIMATROIDOK

2.1. MÁSOD-RESZELÉS

Vizsgálataink során alapvető fontosságú lesz a reszelés fogalmának alábbi kiterjesztése. Legyen $b'':2^S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ keresztezőn szubmoduláris függvény, amelyre $Q:=B(b'')$ nemüres. Jelölje $k=b''(S)$ és definiáljuk p''-t a $p''(X):=k-b''(S-X)$ összefüggéssel. Jelölje p' a p'' felső reszeltjét és legyen $b'(X):=k-p'(S-X)$. A b' függvény b alsó reszeltjét b'' másod-reszeltjének nevezzük. Keresztezőn szupermoduláris függvény másod-reszeltjét analóg módon definiáljuk (azaz p'' másod-reszeltje definíció szerint $-p''$ másod-reszeltjének -1-szerese).

2.1.1 TÉTEL *A b''-höz a fenti módon hozzárendelt b függvény teljesen szubmoduláris és $B(b'')=B(b)$.*

BIZONYITÁS. Látható, hogy a definiált p'' függvény keresztezőn szupermoduláris és $Q=Q'':=\{x \in R^S : x(S)=k$ és $x(A) \geq p''(A)$ minden $A \subseteq S$-re$\}$. Az is világos, hogy $Q''=Q':= \{x \in R^S : x(S)=k$ és $x(A) \geq p'(A)$ minden $A \subseteq S$-re$\}$ és az 1.2 tétel alapján p' szupermoduláris minden olyan X,Y halmaz páron, melyek nem ko-diszjunktak. Azt állitjuk, hogy $p'(S)=p''(S)=k$. Valóban, p'' definíciójából $p''(S)=k$ világos. A felső reszelés definíciójából $p'(S) \geq p''(S)$ fennáll. Mivel $Q=Q'$ nemüres, igy nem lehet $p'(S)>k$.

Most b' metszőn szubmoduláris és $B(b')=Q'=Q$. Az 1.2 tétel újabb alkalmazásával nyerjük, hogy b teljesen szubmoduláris és $B(b)=B(b')= Q$.∎

2.1.2 TÉTEL *Legyen b a b'' másod-reszeltje és $b''(S)=k$. Ekkor*

$$(2.1.1) \qquad b(X)=\min(\sum b''(X_{ij}) + (n-m)k).$$

ahol m az X_{ij} halmazok száma, az $X_i=\bigcup_j X_{ij}$, $i=1,2,\dots,n$, halmazok az X partícióját adják, és rögzitett i-re az X_{i1}, $X_{i2},\dots$ halmazok komplementerei az X_i komplementerének partícióját adják.

BIZONYITÁS. Az 1.2 tételből leolvasható, hogy $b(X)=\min(\sum b'(X_i)$: $\{X_i\}$: az X particiója). Továbbá, $b'(X_i)=k-p'(S-X_i)$ és $p'(Z_i)=\max(\sum p''(Z_{ij})$: $\{Z_{ij}\}$ az X_i particiója), ahol $Z_i=S-X_i$. Mivel $p''(Z_{ij})=k-b''(S-Z_{ij})$, az állitás következik.∎∎∎

A másod-reszelés definiciójából leolvasható:

<u>2.1.3 ÁLLITÁS</u> *Legyen b a b'' másod-reszeltje. Egy $x(A)\leq b(A)$ egyenlőtlenség egész következménye az $x(A)=k$ egyenlőségnek és az $x(X)\leq b''(X)$ $(X\subseteq S)$ egyenlőtlenségeknek.*∎

A 4.3 szakaszban szükségünk lesz az alábbi állitásra.

<u>2.1.4 KÖVETKEZMÉNY</u> *Legyen b a b'' másod-reszeltje és $b''(S)=0$. Ekkor $\min(b''(X):X\subseteq S)=\min(b(X):X\subseteq S)$.*

BIZONYITÁS. A szóbanforgó minimumokat jelöljük rendre λ'' és λ-val. Mivel $b(X)\leq b''(X)$ minden $X\subseteq S$, igy $\lambda\leq\lambda''$. Az egyenlőség pedig következik a 2.1.3 állitásból.∎

2.2. ÁLTALÁNOSITOTT POLIMATROIDOK

Legyen (p,b) erős pár. A $Q=Q(p,b)$ poliédert *általánositott polimatroidnak* vagy röviden g-polimatroidnak nevezzük. Megállapodunk abban, hogy az üres poliédert is g-polimatroidnak tekintjük. Ha p és b egészértékű, akkor Q g-polimatroidot egésznek mondjuk. Látni fogjuk, hogy Q pontosan akkor egész, ha mint poliéder egész.

A g-polimatroidok fogalma és néhány alaptulajdonsága [Frank 1984c]-ben szerepel először. A [Frank-Tardos 1986] dolgozatban ezeket a tulajdonságokat tovább elemeztük. Most ismertejük ezeket.

2.2.1 TÉTEL ***Polimatroidok, kontra polimatroidok, bázis poliéderek, szubmoduláris poliéderek mind g-polimatroidot alkotnak.***

BIZONYITÁS. Látható, hogy ha p-ét azonosan 0-nak definiáljuk, akkor egy (p,b) pár akkor és csak akkor erős pár, ha b polimatroid függvény. Ekkor $Q(p,b)$ polimatroidot definiál. Ha p teljesen szupermoduláris és $b\equiv\infty$, akkor $Q(p,b)$ kontrapolimatroidot definiál. Ha b teljesen szubmoduláris és $p(X)= b(S)-b(S-X)$, akor (p,b) erős pár és $Q(p,b)$ bázis poliéder. Ha b teljesen szubmoduláris és $p\equiv-\infty$, akkor (p,b) erős pár és $Q(p,b)$ szubmoduláris poliéder.■■■

2.2.2 TÉTEL ***Ha (p,b) erős pár, akkor a $Q=Q(p,b)$ g-polimatroid nemüres. Ha p és b egészértékű, akkor Q tartalmaz egész pontot.***

BIZONYITÁS. $|S|$ szerinti indukció. $|S|=1$ esetén az állitás világos. Legyen $|S|>1$, $s\in S$ és $S_1=S-s$. Legyen p-nek és b-nek az S_1-re való megszoritása p_1 ill. b_1. Ekkor (p_1,b_1) erős pár, igy az indukciós feltevés alapján létezik $Q(p_1,b_1)$-ben egy x_1 vektor. Azt állitjuk, hogy $m:=\min(b(X)-x_1(X):\ s\in X\subseteq S)\ \geq\ M:=\ \max(p(Y)-x_1(Y):\ s\in Y\subseteq S)$. Valóban, $s\in X\cap Y$ esetén fennáll, hogy $b(X)-p(Y)\geq\ b(X-Y)-\ p(Y-X)\geq x_1(X-Y)-\ x_1(Y-X)=\ x_1(X)-\ x_1(Y)$. Definiáljuk most $x\in R^S$-et úgy, hogy S_1-en megegyezzék x_1-gyel és $m\geq\ x(s)\geq\ M$. Ekkor $x\in Q(p,b)$ és ha p,b egészértékű volt, akkor x_1 és igy x is választható egésznek.■■■

2.2.3 TÉTEL *$Q=Q(p,b)$ g-polimatroid esetén minden $A\subseteq S$ részhalmazra fennáll a $\max(x(A)\colon x\in Q)=b(A)$ és a $\min(x(A)\colon x\in Q)=p(A)$ összefüggés.*

BIZONYITÁS. Mivel p és b szimmetrikus szerepet játszik, csak az első egyenlőséget bizonyitjuk. Nyilvánvaló $\max(x(A)\colon x\in Q)\le b(A)$. Ha itt a maximum ∞, akkor $b(A)=\infty$ és készen vagyunk. Igy tegyük fel, hogy a maximum véges és tekintsük a következő primál-duál lineáris programot.

$$(2.2.1)\qquad \max(x(A)\colon\ x(X)\ge p(X),\ x(X)\le b(X)\ \text{minden}\ X\subseteq S\text{-re}),$$

$$(2.2.2)\qquad \begin{aligned}&\min(\Sigma_{Y\subseteq S}y_Y b(Y)-\Sigma_{Z\subseteq S}z_Z p(Z)\colon\ y,z\le 0,\\ &\Sigma_{Y\subseteq S}y_Y\chi(Y)-\Sigma_{Z\subseteq S}z_Z\chi(Z)=\chi(A)).\end{aligned}$$

(Ezt úgy kell pontosabban érteni, hogy ha $p(X)=-\infty$ valamely $X\subseteq S$-re, akkor az X-nek megfelelő primál feltétel (2.2.1)-ben és duál változó (2.2.2)-ben nem szerepel).

Miután most a primál programnak véges az optimuma, a lineáris programozás dualitás tétele miatt a duálnak is. Alkalmazva a jól ismert kikeresztezési technikát és a tényt, hogy (p,b) erős pár, nyerjük, hogy létezik egy olyan optimális (y,z) duális megoldás, amelyre az mind az $\{Y\colon y_Y>0\}$ és a $\{Z\colon z_Z>0\}$ halmazcsalád lánc és $Y\cap Z=\emptyset$ fennáll, hacsak $y_Y>0$ és $z_Z>0$. Ilyen duális megoldás azonban csak egyetlen egy létezhet, nevezetesen az,amikor $y_A=1$ és az összes többi duál változó nulla. Következésképp (2.2.1) és (2.2.2) közös optimuma $b(A)$, amit bizonyitani kellett.■■■

2.2.4 KÖVETKEZMÉNY *Nemüres g-polimatroid definiáló erős párja egyértelmű.*

Ezt polimatroidokra specializálva az 1.1 tételt kapjuk. Az 1.2 tétel is kiterjeszthető g-polimatroidokra:

2.2.5 TÉTEL *Ha (p',b') gyenge pár, akkor a $Q=Q(p',b')$ poliéder g-polimatroid.*

BIZONYITÁS. Mivel az üres halmaz definició szerint polimatroid, feltehetjük, hogy Q nemüres. Vegyünk az S alaphalmazhoz egy új s elemet és definiáljuk a b''_1 halmaz függvényt az $S':=S+s$ részhalmazain a következőképpen.

$$b''_1(X)=\begin{cases} b'(X) & \text{ha } X\subseteq S, \\ -p(S-X) & \text{ha } s\in X. \end{cases}$$

Ekkor b''_1 keresztezőn szubmoduláris és Q a $B(b''_1)$ poliéder vetülete az s elem mentén. Mivel Q nemüres, $B(b'')$ sem az, igy beszélhetünk a b''_1 függvény b_1-gyel jelölt másod reszeltjéről. Most $X\subseteq S$-re definiáljuk $b(X):= b_1(X)$ és $p(X):= -b_1(S'-X)$. A (p,b) pár erős pár és a 2.1.1 tétel alapján $B(b''_1)=B(b_1)$, és ezért $Q(p',b')=Q(p,b)$.∎∎∎

A bizonyitásban konstruált (p,b) párt a kiindulási (p',b') pár *reszeltjének* nevezzük. Láttuk, hogy erős párral definiált g-polimatroid sohasem üres.

2.2.6 TÉTEL *A gyenge (p',b') pár által definiált $Q=Q(p',b')$ g-polimatroid akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$(2.2.3)\qquad \begin{aligned} &a)\ \sum b'(Z_i)\geq p'(\cup Z_i) \quad \text{és} \\ &b)\ \sum p'(Z_i)\leq b'(\cup Z_i). \end{aligned}$$

teljesül az S minden $\{Z_i\}$ particiójára. Ha Q nemüres és p', b' egészértékű, akkor Q tartalmaz egész pontot.

BIZONYITÁS. Az 1.5 tétel alapján Q akkor és csak üres, ha léteznek olyan $\mathcal{F}=\{F_1,\dots,F_k\}$ és $\mathcal{G}=\{G_1,\dots,G_l\}$ halmaz családok. melyekre

a) $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ diszjunkt halmazokból áll

(2.2.4) b) $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} G$

c) $\sum_{F\in\mathcal{F}} b'(F) < \sum_{G\in\mathcal{G}} p'(G)$

Ha léteznek $F\in\mathcal{F}$ és $G\in\mathcal{G}$ metsző halmazok, akkor $b'(F)-p'(G)\geq b'(F-G)-p'(G-F)$. $\mathcal{F}$-ben cseréljük ki F-et F-G-re, $\mathcal{G}$-ben cseréljük ki G-t G-F-re. A módositott $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$-re (2.2.4) továbbra is igaz. Ezenkivül $\sum F_{F\in\mathcal{F}}$ kisebbé vált. Igy ezen kikeresztezési lépés véges sok alkalmazása után elérjük, hogy nincs már $\mathcal{F}$-nek és $\mathcal{G}$-nek metsző tagja.

Legyen X az $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ egy maximális tagja, b) miatt ekkor X felbomlik $\mathcal{G}\cup\mathcal{F}$-beli $Z_1,\dots Z_t$ halmazok egyesitésére. (Itt ha X $\mathcal{F}$-beli, akkor Z_i-k $\mathcal{G}$-beliek, ha X $\mathcal{G}$-beli, akkor Z_i-k $\mathcal{F}$-beliek.) Mivel $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ minden tagja vagy maximális, vagypedig pontosan egy maximális tag particiójához tartozik, a c) tulajdonság alapján az $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ valamelyik X maximális tagja megsérti a (2.2.3) feltételt.■■■

MEGJEGYZÉS A fenti bizonyitás algoritmust ad a (2.2.3) feltételt megsértő halmazok megkeresésére, amennyiben $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ már rendelkezésre áll. A 4.2 szakaszban megmutatjuk, hogy miként lehet $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$-t hatékonyan megtalálni.

Könnyű megmutatni, hogy a 2.2.6 tétel valójában ekvivalens S.Fujishige következő eredményével.

<u>2.2.7 TÉTEL</u> [Fujishige] *Legyen b" keresztezőn szubmoduláris függvény. A B(b") poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$(2.2.5)\qquad \begin{array}{ll} a) & \sum b''(Z_i) \geq b''(S) \text{ és} \\ b) & \sum b''(S-Z_i) \geq (t-1)b''(S) \end{array}$$

fennáll az S minden $\{Z_1,\dots Z_t\}$ particiójára.■■■

Kérdés, hogy keresztezőn szubmoduláris függvények segitségével lehet-e g-polimatroidot definiálni. Könnyű példával megmutatni, hogy Q(p",b") általában nem g-polimatroid, ha p" és b" keresztezőn szuper- ill. szubmoduláris függvények és erősen illenek. Azonban az 2.1.1 tételnek közvetlen folyománya, hogy

2.2.8 TÉTEL *Ha b'' keresztezően szubmoduláris függvény, akkor $B(b'')$ g-polimatroid. (Valójában bázis poliéder).*■

Az 2.1.2 tételben szereplő formulát használva nyerjük:

2.2.9 TÉTEL *Egy gyenge (p',b') pár (p,b) reszeltje a következő. $p(Y)= \max(\Sigma_i p'(Y_i)- \Sigma_j(b'(X_{ij}):$ $X_{ij}\subseteq Y_i$, $\{Y_i-\biguplus_j S_{ij}:$ $i=1,2,\dots\}$ az Y particiója és az X_{ij} $(j=1,2,\dots)$ halmazok diszjunktak). $b(X)= \min(\Sigma_i b'(X_i)-\Sigma_j p'(Y_{ij})$: $Y_{ij}\subseteq X_i$, $\{X_i-\biguplus_j Y_{ij}$: $i=1,2,\dots\}$ az X particiója és minden j-re az Y_{ij} $(i=1,2,\dots)$ halmazok diszjunktak).*■

MEGJEGYZÉS Amikor p' az üres halmazon és egyelemű halmazokon 0, különben $-\infty$, akkor tetszőleges b' metsző szubmoduláris függvényre a (p',b') gyenge pár. Ekkor a 2.2.9 tételben adott formula leegyszerűsödik. Nevezetesen $p\equiv 0$ és $b(X)= \min(\Sigma(X_i)$: $X\subseteq\biguplus X_i$, az X_i halmazok diszjunktak). Most $Q(p',b')$ polimatroid, amelynek a fenti b az egyértelmű definiáló függvénye. Ha ráadásul a kiindulási b' teljesen szubmoduláris, bár nem biztosan monoton, akkor a (p',b') pár reszeltje a $(0,b)$ ahol 0 az azonosan 0 függvényt jelöli és $b(X)= \min(b'(Y), X\subseteq Y)$. Ez a megközelités azt mutatja, hogy a bevezetőben emlitett monotonná tevés a reszelés egy speciális esetének tekinthető.

Megemlitünk két speciális esetet, ahol a 2.2.9 tétel reszelési képlete sokkal egyszerűbb. Legyen α és β két valós szám, melyekre $p(S)\leq \alpha\leq \beta\leq b(S)$, és legyen (p,b) erős pár. Definiáljuk a p_1' és b_1' függvényeket:

$p_1'(X)=p(X)$, ha $X\neq S$ és $p_1'(S)=\alpha$, $b_1'(X)=b(X)$ ha $X\neq S$ és $b_1'(S)=\beta$.

2.2.10 KÖVETKEZMÉNY *(p_1',b_1') gyenge pár, melynek (p_1,b_1) reszeltjét a következő formula adja:*

$$p_1(X)= \max(p(X),\ \alpha-b(S-X))$$

$$b_1(X) = \min(b(X),\ \beta - p(S-X)). \blacksquare \tag{2.2.6}$$

Másodszor, legyen $f: S \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ és $g: S \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ két függvény, $f \leq g$, és (p,b) pedig egy erős pár. Legyen $p_1'(X) = p(X)$, ha $|X|>1$ és $p_1'(X) = \max(p(v), f(v))$, ha $X=\{v\}$ és legyen $b_1'(X) = b(X)$, ha $|X|>1$ és $b_1'(X) = \min(b(v), g(v))$, ha $X=\{v\}$.

<u>2.2.11 KÖVETKEZMÉNY</u> *(p_1', b_1') gyenge pár, melynek (p_1, b_1) reszeltjét a következő formula adja:*

$$p_1(X) = \max_Y (p(Y) + f(X-Y) - g(Y-X))$$
$$b_1(X) = \min_Y (b(Y) + g(X-Y) - f(Y-X)). \blacksquare \tag{2.2.7}$$

2.3 KONSTRUKCIÓK

A megelőző szakaszban láttuk, hogy a polimatroid, kontra-polimatroid, szubmoduláris poliéder, bázis poliéder mindegyike a g-polimatroid specializációja. Azt is megmutattuk, hogy gyenge pár illetve keresztezőn szubmoduláris függvény segítségével hogyan lehet g-polimatroidot konstruálni. Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy a g-polimatroidok osztálya zárt számos műveletre nézve.

Végig felteszünk egy $Q=Q(p,b)$ g-polimatroidot, amely (p,b) erős párral van definiálva. Az alábbi összes művelet olyan, hogy egész g-polimatroidra alkalmazva egész g-polimatroidot eredményez, feltéve, hogy a szereplő numerikus paraméterek egész értékűek.

2.3.1 TÜKRÖZÉS. *$-Q$ g-polimatroid, melynek definiáló erős párja $(-b,-p)$.*

2.3.2 ELTOLÁS. *Valamely $v \in R^S$ vektorra Q-nak $Q+v$ eltoltja g-polimatroid, melynek definiáló (p_1,b_1) erős párja a következő: $p_1(X)=p(X)+v(X)$, $b_1(X)=b(X)+v(X)$.*

Figyeljük meg, hogy ha Q egy matroid bázis poliédere és $v=(1,1,\dots,1)$, akkor $Q'=-Q+v$ a duális matroid bázis poliédere.

2.3.3 METSZÉS SÁVVAL *Legyen α és β két szám (esetleg $\pm\infty$), melyekre $\alpha\leq\beta$. Ekkor Q-nak és a $P=\{x\in R^S : \alpha\leq x(S)\leq\beta\}$ sávnak* a Q_1 metszete g-polimatroid. Q_1 akkor és csak akkor nemüres, ha $\alpha\leq b(S)$ és $\beta\geq p(S)$. Ha Q_1 nemüres, a definiáló erős párt a (2.2.6) képlet szolgáltatja.

Itt és a következő konstrukcióban a nemürességre vonatkozó állítás a 2.2.6 tétel specializációjával adódik.

2.3.4 METSZÉS TÉGLÁVAL *Legyen $f\in(R\cup\{-\infty\})^S$ és $g\in(R\cup\{\infty\})^S$, $f\leq g$. Q-nak és a $B=\{x\in R^S,\ f\leq x\leq g\}$ téglának* a Q_1 metszete g--polimatroid. Q_1 akkor és csak akkor nemüres, ha $f(X)\leq b(X)$ és $p(X)\leq g(X)$ minden $X\subseteq S$

részhalmazra. A Q_1-et definiáló (p_1, b_1) erős párt a (2.2.7) képlet adja.

A nemürességre adott jellemzésnek fontos következménye az alábbi megfigyelés, melynek az 5. fejezetben látunk majd alkalmazásait.

<u>2.3.5 KÖVETKEZMÉNY</u> *Legyen $B_1 = \{x \in R^S,\ f \leq x\}$, $B_2 = \{x \in R^S,\ g \geq x\}$ és Q egy g-polimatroid. A $Q \cap B_1 \cap B_2$ akkor és csak akkor nemüres, ha mind $Q \cap B_1$ és $Q \cap B_2$ nemüres.*

<u>2.3.6 KÖVETKEZMÉNY</u> *Legyen b teljesen szubmoduláris. Ekkor*

$$\min(b(X):\ X \subseteq S) = \max(x(S):\ x \in S(b),\ x \geq 0).$$

BIZONYITÁS. Tekintsük az $S(b)$ és $B_2 = \{x \in R^S,\ x \leq 0\}$ tégla Q metszetét. (2.2.7) ből látható, $Q = S(b_1)$, ahol $b_1(X) = \min\ (b(Y) : Y \subseteq X)$. A 2.2.3 tételből a fenti formula következik.∎

MEGJEGYZÉS J.Edmonds [1970] megmutatta, hogy adott b polimatroid függvény esetén az $\mathcal{F} = \{X : b(Y) \geq |Y|,\ Y \subseteq X\}$ halmaz család egy M matroid független halmazait alkotja. Ez a konstrukció tekinthető úgy, hogy a $P(b)$ polimatroidot elmetszük a 0-1-es egységkockával. A keletkező polimatroid szükségképpen matroid poliéder. A (2.2.7) képletből most $p_1 \equiv 0$ és $b_1(X) = \min_Y (b(Y) + |X-Y|)$ adódik. A b monotonitása miatt itt elég a minimumot csupán az X részhalmazaira venni.

Általánosabban, Edmonds azt is belátta, hogy egy b' metsző szubmoduláris nemnegatív halmazfüggvény esetén $\mathcal{F} = \{X : b'(Y) \geq |X \cap Y|$ minden $Y \subseteq S$-re$\}$ halmaz család egy M matroid független halmazait alkotja, melynek rangfüggvénye $b_1(X) = \min(\sum b'(X_i) + |X - \cup X_i| :\ X_1, \ldots, X_k \subseteq S$ diszjunktak). Ez a képlet is rögtön következik a jelen megközelitésből, ha a $(0, b')$-re alkalmazzuk a 2.2.9 tételt.

A 2.2.8 tétel alkalmazásával egy újfajta matroid konstrukciót nyerhetünk. Ez először [Frank-Tardos 1984]-ben szerepelt:

2.3.7 TÉTEL *Legyen b'' keresztezőn szubmoduláris függvény és k pozitiv egész. Az $\mathcal{B}:=\{D\subseteq S: |D\cap X|\leq b''(X)$ minden $X\subseteq S$ és $|D|=k\}$ halmaz család, amennyiben nemüres, egy matroid bázisait alkotja.*∎

2.3.8 VETITÉS *Az S egy T részhalmazára Q-nak az R^T-be való $Q_T:=\{x_T\in R^T : (x_T,x_S)\in Q$ valamely $x_{S-T}\in R^{S-T}$-re$\}$ vetülete g-polimatroid, amelyet a (p_1,b_1) erős pár definiál, ahol $p_1=p|T$, $b_1=b|T$.*

BIZONYITÁS. $Q(p_1,b_1)\subseteq Q_T$ nyilvánvalóan igaz. A forditott tartalmazás rögtön következik a 2.2.2 tétel bizonyitásából.∎

Legyen s egy új S-n kivüli elem és $S_1:=S+s$. A következő állitás igen hasznos, mert segitségével számos g-polimatroidokra vonatkozó állitást elég lesz csupán bázis poliéderekre bizonyitani. Az állitás bizonyitása kézenfekvő.

2.3.9 ÁLLITÁS. *Létezik egy 1-1 értelmű megfeleltetés a (p,b) erős párok $(-p,b: 2^S\to R\cup\{\infty\})$ és az S_1 részhalmazain értelmezett $b_1(S_1)=0$ egyenlőségnek eleget tevő teljesen szubmoduláris b_1 függvények között, nevezetesen,*

$$(2.3.1)\qquad b_1(X)=b(X),\ \text{ha}\ X\subseteq S\ \text{és}\ b_1(X)=-p(S-X),\ \text{ha}\ s\in X\subseteq S+s.$$

Továbbá tetszőleges $Q(p,b)$ g-polimatroid a $B(b_1)$ 0-bázis poliéder s mentén való vetülete.∎

2.3.10 ÁLLITÁS *Egy $Q=Q(p,b)$ g-polimatroid akkor és csak akkor bázis poliéder, ha $p(S)=b(S)$.*

BIZONYITÁS. A 2.2.3 tétel szerint bázis poliéderre $p(S)=b(S)$. Megforditva, legyen $p(S)=b(S)$. Azt állitjuk, hogy $Q=B(b)$. Valóban, $Q\subseteq B(b)$ nyivánvaló. Másrészt $x\in B(b)$ és $A\subseteq S$ esetén $x(A)\leq b(A)$ és $x(A)=b(S)-x(S-A)\geq b(S)-b(S-A)\geq p(A)$. Ebből $x\in Q$, és igy $Q=B(b)$.∎

A 2.3.3 és 2.3.10 állításokból nyerjük:

2.3.11 ÁLLÍTÁS *Legyen adva (p,b) erős pár és k konstans, amelyre $p(S) \leq k \leq b(S)$. Ekkor $Q(p,b) \cap \{x \in R^S \; ; \; x(S)= k\}$ bázis poliéder.*■

2.3.12 TÉTEL *g-polimatroid minden oldala g-polimatroid.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel, (p,b) és b_1 kielégíti (2.3.1)-et. A $Q(p,b)$ minden oldala $B(b_1)$ egy oldalának vetülete. Így a tételt elég 0-bázis poliéderekre bizonyítani. Legyen $b: 2^S \to R \cup \{\infty\}$ teljesen szubmoduláris, amelyre $b(S)=0$. Elég belátni, hogy valamely rögzített $T \subseteq S$ esetén a $Q_T= \{x \in R^S : x \in B(b) \, , \, x(T)= b(T)\}$ oldal 0-bázis poliéder. Legyen

$$b_T(X)= b(X \cap T) + b(X \cup T) - b(T). \qquad (2.3.2)$$

Könnyen látszik, hogy b_T teljesen szubmoduláris és $b_T(S)= 0$.

ÁLLÍTÁS. *$Q_T = B(b_T)$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $x \in Q_T$. Ekkor $x(X)= x(X \cap T) + x(X \cup T) - x(T) \leq b(X \cap T) + b(X \cup T) - b(T)= b_T(X)$ és innen $Q_T \subseteq B(b_T)$. A másik irányhoz legyen $x \in B(b_T)$. Mivel $x(S)= 0$, kapjuk, hogy $b(T)= b_T(T) \geq x(T)= -x(S-T) \geq -b_T(S-T)= b(T)$, azaz $x(T)= b(T)$. Továbbá $X \subseteq S$ esetén $x(X) \leq b_T(X)= b(X \cap T) + b(X \cup T) - b(T) \leq b(X)$. Következésképp $x \in Q_T$ és ezért $Q_T= B(b_T)$.■

Legyen b teljesen szubmoduláris, melyre $b(S)=0$. A $B(b)$ bármely Q_1 oldalát S részhalmazainak egy $\mathcal{T}$ családjával adhatjuk meg, éspedig $Q_1=\{x: \; x \in B(b), \; x(T)=b(T)$ minden $T \in \mathcal{T}\}$. Legyen $\pi:=\Sigma(\chi_T: \; T \in \mathcal{T})$ és $b_1(X):=\hat{b}(\pi+\chi_X)-\hat{b}(\pi)$. Könnyen kimutatható, hogy b_1 teljesen szubmoduláris. A (2.3.2) formula ismételt alkalmazásával kapjuk:

<u>2.3.13 TÉTEL</u> *A Q_1 oldal akkor és csak akkor nem üres, ha $\hat{b}(\pi)=\Sigma(b(X): X\in\mathcal{F})$ (ez automatikusan teljesül, ha $\mathcal{F}$ lánc). Ha Q_1 nemüres, akkor $Q_1=B(b_1)$.* ∎

Megjegyzés. Ha Q jelöli egy M matroid poliéderét, akkor a $T\subseteq S$ elhagyásával keletkező matroid poliédere Q-nak T mentén való vetülete. A T összehúzásával keletkező matroid poliédere pedig a $Q_T=\{x\in Q: x(T)=r(T)\}$ oldal vetülete T mentén.

Megjegyzés. Korábban láttuk, hogy egy Q egész g-polimatroid (azaz amelynek a definiáló erős párja egészértékű) tartalmaz egész pontot. A 2.3.12 tétel alapján azt is látjuk, hogy Q minden nemüres oldala is egész g-polimatroid. Ezért Q minden nemüres oldala tartalmaz egész pontot, vagyis Q mint poliéder is egész.

<u>2.3.14 TÉTEL</u> *Legyen $\gamma: S\to S'$ szürjektiv leképezés. A Q g-polimatroid $\gamma(Q)$ homomorf képe g-polimatroid. A $\gamma(Q)$-t definiáló (p_1,b_1) erős párra $p_1(X)= p(\gamma^{-1}(X))$, $b_1(X)= b(\gamma^{-1}(X))$. Ezenkivül, ha Q egész, akkor $y\in\gamma(Q)$ egész vektorhoz létezik olyan $x\in Q$ egész vektor, amelyre $y=\gamma(x)$.*

BIZONYITÁS. Nyilván a megadott (p_1,b_1) erős pár és $Q(p_1,b_1)\supseteq\gamma(Q)$. A forditott irányú tartalmazást elég arra az esetre bizonyitani, amikor $S'= S-\{u,v\}\cup\{w\}$ $(u,v\in S$, $w\notin S)$ és $\gamma(s)=s$, ha $s\in S-\{u,v\}$ és $\gamma(s)=w$, ha $s\in\{u,v\}$.

Legyen $x_1\in Q(p_1, b_1)$. Definiáljuk $p_1': S\to R\cup\{-\infty\}$ és $b_1': S\to R\cup\{\infty\}$ a következőképpen.

$$p_1'(X)=\begin{cases} x_1(S') & \text{ha } X=S \\ x_1(s) & \text{ha } S=\{s\},\ s\in S-\{u,v\} \\ p(X) & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$b_1'(X)=\begin{cases} x_1(S') & \text{ha } X=S \\ x_1(s) & \text{ha } S=\{s\},\ s\in S-\{u,v\} \\ b(X) & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor (p_1',b_1') gyenge pár. A 2.2.6 tétel alapján $Q(p_1',b_1')$ nemüres, igy van x egész pontja. Mivel $x\in Q$ és $\varphi(x)=x_1$, a bizonyitással készen vagyunk.∎

Az alábbi két állitás nyilvánvaló.

2.3.15 ÁLLITÁS. *Legyen $\varphi:S\to S'$ ugyanaz, mint előbb és legyen Q_1 g-polimatroid az S'-n, melynek definiáló erős párja (p_1,b_1). Ekkor Q_1-nek a $\varphi^{-1}(Q_1)$ inverz homomorf képe* g-polimatroid, amelyet a következő erős pár definiál. $p(A)=p_1(A')$ ha $A=\varphi^{-1}(A')$ valamely $A'\subseteq S'$ és $=-\infty$ egyébként, $b(A)=b_1(A')$ ha $A=\varphi^{-1}(A')$ valamely $A'\subseteq S'$ és$=\infty$ egyébként.∎

Megjegyzés. Ebből az állitásból könnyen levezethetjük Lovász [1977] azon tételét, mely szerint minden egész polimatroid egy matroid poliéder homomorf képe. Valóban, legyen P egy polimatroid S'-n, melyet a b polimatroid függvény definiál. Legyen $S=\{v_i: v\in S',\ i=1,2,\dots,b(v)\}$ és legyen $\varphi(v_i)=v$. Ekkor $\varphi^{-1}(P)$ g-polimatroid, melynek a 0-1 egységkockával való Q metszete matroid poliéder, és $P=\varphi(Q)$.

2.3.16 ÁLLÍTÁS. *Legyen S_1 és S_2 két diszjunkt halmaz és legyen (p_i,b_i) erős pár S_i-n $(i=1,2)$. $Q_1=Q(p_1,b_1)$ és $Q_2=Q(p_2,b_2)$ g-polimatroidok $Q_1\oplus Q_2=\{x=(x_1,x_2) : x_1\in Q_1 , x_2\in Q_2\}$ direkt összege g-polimatroid.* A definiáló erős párja $p(A)=p_1(A\cap S_1)+p_2(A\cap S_2)$ és $b(A)=b_1(A\cap S_1)+b_2(A\cap S_2)$.∎

Legyen $B_1\subseteq B_2\subseteq \dots \subseteq B_k\subseteq S$. Tekintsük a $B(b)$ 0-bázis poliédernek az $x(B_i)=b(B_i)$ $(i=1,2\dots)$ által meghatározott Q_1 oldalát. A 2.3.13 tételben szereplő b_1 függvény definiciójából könnyen kiolvasható az alábbi

2.3.16a KÖVETEZMÉNY Q_1 *direkt összege az $S_i:=B_{i+1}-B_i$ diszjunkt halmazokon értelmezett $B(b_i)$ bázis poliédereknek, ahol $X\subseteq S_i$-re $b_i(X):=b(X\cup B_i)-b(B_i)$.*∎

2.3.17 TÉTEL *Legyen $Q_i=Q(p_i,b_i)$ $(i=1,2)$ két g-polimatroid S-en a (p_i,b_i) erős párral definiálva. A Q_1 és Q_2 $Q_1+Q_2:=\{x: x=x_1+x_2$ valamely $x_1\in Q_1$, $x_2\in Q_2$ vektorokra$\}$ összege* g-polimatroid, melynek definiáló erős párja (p_1+p_2, b_1+b_2). Ezenkívül ha Q_1 és Q_2 egész, akkor $q\in Q_1+Q_2$ egész vektorra léteznek $q_1\in Q_1$, $q_2\in Q_2$ egész vektorok úgy, hogy $q=q_1+q_2$.∎

BIZONYÍTÁS. Legyen S_1 és S_2 az S két diszjunkt példánya és legyen γ az a leképezés $S_1\cup S_2$-ről S-re, amelyre $\gamma(v_1)=\gamma(v_2)=v$ minden $v\in S$-re. Ekkor $Q_1+Q_2=\gamma(Q_1\oplus Q_2)$ és a tétel következik a 2.3.14 tételből.∎

Megjegyezzük, hogy a 2.3.14 és 2.3.16 tételek a megfelelő polimatroidokra vonatkozó tételek [Giles 1975] általánositásai. A matroidok összegére vonatkozó J.Edmondstól [1965] és Nash-Williamstől [1967] vonatkozó tétel ebben a környezetben nyilvánvaló: az összegmatroid poliédere az összeadandó matroid poliéderek összege elmetszve a 0-1 egységkockával. Az összegre vonatkozó rangformula a

2.3.6 után tett megjegyzésből adódik, ha azt $b=\sum r_i$-re alkalmazzuk.

A következő tétel bizonyitása egyszerű, ezért kihagyjuk.

<u>2.3.18 TÉTEL</u> *Egy $Q(p,b)$ g-polimatroid akkor és csak akkor kúp, ha $p(A)$, $b(A)\in\{-\infty,0,+\infty\}$ minden $A\subseteq S$-re. Egy $Q(p,b)$ g-polimatroid $Q+R^+$* <u>*dominánsa*</u> g-polimatroid, melynek erős párja (p,b_1), ahol $b_1\equiv\infty$.∎

E szakaszban eddig azzal foglalkoztunk, hogy miként lehet új g-polimatroidokat előállitani. Befejezésül megadjuk az egész g-polimatroidok egyfajta előállitását.

<u>2.3.19 TÉTEL</u> *Minden g-polimatroid egy korlátos g-polimatroid és egy kúp g-polimatroidnak az összege. Minden korlátos egész g-polimatroid előáll egy matroid bázis poliéderből homomorf kép képzéssel, eltolással és vetitéssel.*

BIZONYITÁS. Miután az összegképzés és a vetités művelete felcserélhető, az első részt elég bázis poliáderekre bizonyitani.

<u>LEMMA</u>. *Minden b teljesen szubmoduláris függvényhez, melyre $b(S)<\infty$, létezik egy teljesen szubmoduláris, véges b_1 függvény úgy, hogy $b(X)=b_1(X)$ fennáll hacsak $b(X)$ véges, éspedig $b_1(X)=\min(b(Y)+2M|X-Y| : Y\subseteq X)$, ahol $M=\max(|b(X)| : X\subseteq S,\ b(X)$ véges).*∎

Definiáljuk most b_2-t: $b_2(X)=0$, ha $b(X)<\infty$, és $b_2(X)=\infty$, ha $b(X)=0$. b_2 teljesen szubmoduláris, $B(b_2)$ kúp, $B(b_1)$ korlátos és $B(b)= B(b_1)+B(b_2)$.

A tétel második felének bizonyitásához belátjuk a következőt.

<u>LEMMA</u>. *Minden $B(b)$ korlátos bázis poliéder egy polimatroid függvény bázis poliéderének eltoltja.*

BIZONYITÁS. Legyen b véges és teljesen szubmoduláris. Legyen $M:=\max(|b(A)|: A\subseteq S)$ és jelölje v azt a vektort, melynek minden komponense M. Látható, hogy a $b_1(X):=b(X)+M|X|$ függvény polimatroid függvény és $B(b)=B(b_1)$-v.∎

A lemmákból valamint a 2.3.15 tétel után bebizonyitott Lovász tételből a tétel következik.∎∎∎

3. SZUBMODULÁRIS FOLYAMOK

3.1 ELŐZETES

A szubmoduláris folyamok fogalmát J.Edmonds és R.Giles [1977] vezette be. Legyen $G=(V,E)$ irányitott gráf és $b'': 2^V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ keresztezőn szubmoduláris függvény. Legyen továbbá f és g ($f \leq g$) két kapacitás függvény az élhalmazon (alsó ill. felső korlát), $f: E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ és $g \to \mathbb{R}\{-\infty\}$.

A $Q:=Q(f,g;b'')$ poliédert, amelynek elemei kielégitik az

$$(3.1.1a) \qquad f \leq x \leq g$$

$$(3.1.1b) \qquad \lambda_x(A) \leq b''(A) \quad \text{minden } A \subseteq V\text{-re}$$

egyenlőtlenségeket *szubmoduláris folyam poliédernek* nevezzük. Ha $-f=g=\infty$, akkor Q-ra a $Q(G;b'')$ jelölést használjuk. Azt mondjuk, hogy Q *szép alakban* van adva, ha $Q=Q(G;b)$, ahol b teljesen szubmoduláris és $b(V)=0$. Q egy elemét *szubmoduláris folyamnak* nevezzük, mig az (3.1.1) lineáris egyenlőtlenség rendszert *szubmoduláris folyam rendszernek* . E fejezet anyaga a [Frank 1982, 1984a, 1984b, 1984c], [Frank-Tardos 1986] dolgozatokból való.

Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy $b''(V)=0$, mert $b''(V)<0$ esetén Q nyilván üres, amely eset nem túl érdekes, $b''(V)>0$ esetben pedig $b''(V)$-t 0-ra csökkentve nem romlik el b'' szubmodularitása keresztező halmazokon és Q sem változik. Szubmoduláris folyamokra vonatkozó alapvető eredmény:

3.1.1 TÉTEL (Edmonds and Giles [1977]) *A (3.1.1) szubmoduláris folyam rendszer teljesen duálisan egészértékű (TDI). Ha f,g,b'' egészértékűek, akkor $Q(f,g;b'')$ az egész pontjainak konvex burka.*∎

A tételt a 3.2 szakaszban be fogjuk bizonyitani. Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban számos egyéb szub- vagy szupermoduláris függvényeket és gráfokat magukban foglaló modellt bevezettek. Ezek kapcsolatáról az alkalmazások között szólunk .

A g-polimatroidok fogalmában a szub- és szupermodularitás szimmetrikus szerepet játszik. Ugyanez áll szubmoduláris folyamokra is, mégha az elnevezésben és a definicióban a szubmodularitás szerepel. Valóban, jelölje A a G gráf $(0,\pm 1)$ incidencia mátrixát, azaz $a_{ij}=+1$ (-1) ha az i él belép (kilép) a j csúcsba és =0 egyébként.

3.1.2 ÁLLITÁS. *Tetszőleges $Q=Q(f,g;b")$ szubmoduláris folyam poliéder felirható $Q=\{x\in R^E,\ f\leq x\leq g,\ Ax=B\}$ alakban, ahol $B=B(b")$ 0-bázis poliéder. Tetszőleges Q_1 g-polimatroid esetén $Q:=\{x\in R^E,\ f\leq x\leq g,\ Ax\in Q_1\}$ szubmoduláris folyam poliéder.*

BIZONYITÁS. Az első állitás nem más mint a definició átfogalmazása. A második rész következik a 2.3.11 állitásból és abból, hogy $y=Ax$ esetén $y(V)=0$. ∎

Speciálisan, ha $p":2^V\to R\cup\{-\infty\}$ keresztezőn szupermoduláris függvény, akkor $Q:=\{x\in R^E:\ x\leq f\leq g,\ x(A)\geq p"(A)$ minden $A\subseteq V$-re$\}$ szubmoduláris folyam poliéder. Ezen megjegyzések alapján talán helyesebb lenne "szemimoduláris" folyamokról beszélni, azonban a szakirodalomban a szubmoduláris folyam kifejezés gyökeret vert, és ezért maradunk ennél.

Amint láttuk már g-polimatroid oldala is g-polimatroid, igy 3.1.2-ből következik:

3.1.3 TÉTEL [Cunningham-Frank 1985] *Szubmoduláris folyam poliéder oldala is szubmoduláris folyam poliéder.*∎

A 3.1.2 állitás és a 2.1.1 tétel másik fontos következménye:

3.1.4 TÉTEL *Ha a $Q=Q(f,g;b")$ szubmoduláris folyam poliéder nemüres, akkor létezik egy b teljesen szubmoduláris fuggvény, nevezetesen b" másod reszeltje, amelyre $Q=Q(f,g;b)$.*∎

A következő tétel azt mondja, hogy minden nemüres szubmoduláris folyam poliéder megadható szép alakban.

3.1.5 TÉTEL *Minden $Q=Q(f,g;b'')$ szubmoduláris folyam poliéderhez létezik egy $G_1=(S,E_1)$ gráf, melynek élei 1-1-értelmű megfeleltetésben vannak G éleivel, továbbá létezik egy $b''_1:2^S\to R\cup\{\infty\}$ keresztezőn szubmoduláris függvény úgy, hogy $Q=Q(G_1;b''_1)$. Következésképp, minden nemüres szubmoduláris folyam poliéder megadható szép alakban.*

BIZONYITÁS. Helyettesitsük G minden v csúcsát annyi csúccsal, ahány éllel érintkezik v és jelölje $\varphi(v)$ a v új példányainak halmazát. V egy X részhalmaza esetén a $\varphi(X):=\cup(\varphi(v): v\in X)$ jelölést használjuk. Legyen $S:=\varphi(V)$ és jelölje e_u és e_v az $e=uv\in E$ él két végpontjának megfeleltetett csúcsokat S-ben. Definiáljuk a $b''_1:2^S\to R\cup\{\infty\}$ függvényt a következőképpen. $X\subseteq S$-re legyen

$$b''_1(X)=\begin{cases} b''(Y), & \text{ha } X=\varphi(Y)\ (Y\subseteq V)\\ g(e), & \text{ha } X=\{e_v\}\ (e=uv\in E)\\ -f(e), & \text{ha } X=\{e_u\}\ (e=uv\in E)\\ +\infty, & \text{egyébként}\end{cases}$$

Legyen $G_1=(S,E_1)$ az a gráf, amelyre $E_1:=\{e_ue_v:\ e=uv\in E\}$. Könnyen látható, hogy az ily módon megkonstruált b''_1 és G_1 kielégiti a tétel kivánságait. ∎

3.1.6 MEGJEGYZÉS. *Ha a kiindulási b'' függvény teljesen szubmoduláris, akkor a megkonstruált b''_1 metszőn szubmoduláris.*

A 3.1.5 tétel jelentősége abban van, hogy amig alkalmazásokban tipikusan az eredeti általános alakra van szükségünk, addig a szubmoduláris folyamokra vonatkozó tételek bizonyitásakor elég a szép alakkal dolgoznunk.

3.2 MEGENGEDETTSÉG, OPTIMALITÁS

A hálózati folyamok elméletében *cirkulációnak* neveznek egy $x:E\to R$ vektort, ha kielégíti a *megmaradási szabályt*, azaz $\rho_x(v)=\delta_x(v)$ fennáll a $G=(V,E)$ gráf minden csúcsára. Ha b" azonosan nulla, akkor egy x szubmoduláris folyam szükségképpen cirkuláció. Ebben az értelemben a szubmoduláris folyamok a cirkulációk általánositásai. A jelen szakaszban kidolgozzuk a cirkulációkra érvényes megengedettségi és optimalitási tételek általánositásait, és ezzel előkészitjük az utat polinomiális algoritmus megkonstruálásához.

Legyen $Q=Q(G;b)$ szép alakban adott folyam poliéder és legyen $d:E\to R$ költség függvény. Jelölje $\mathcal{F}(b)$ V azon részhalmazainak családját, melyen b véges. Legyen B egy olyan 0-1 mátrix, melynek oszlopai G éleinek, sorai pedig $\mathcal{F}(b)$ elemeinek felelnek meg, és legyen az X-nek megfelelő sor a $\underline{\lambda}_X$ vektor. A következő egymással duális lineáris programokat fogjuk vizsgálni.

$$(3.2.1) \qquad \max\ (dx\ :\ Bx \le b)$$

$$(3.2.2) \qquad \min\ (by\ :\ yB = d,\ y\ge 0)$$

(Itt a $Bx\le b$ egyenlőtlenség rendszer nem más mint (3.1.1b).)

3.2.1 TÉTEL *A (3.2.1) primál lineáris program akkor és csak akkor megengedett (azaz, Q nemüres), ha $b(X)\ge 0$ fennáll minden olyan $X\subseteq V$-re, amelyre $\underline{\lambda}_X=\underline{0}$. Ha b egész értékű és Q nemüres, akkor Q tartalmaz egész pontot.*

BIZONYITÁS. A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőség bizonyitásához élszám szerinti indukciót használunk. Legyen $e=uv\in E$ egy él. Legyen $m:=\min(b(X)\colon \underline{\rho}_X=\{e\})$ és $M:=\max(-b(Y)\colon \underline{\delta}_Y=\{e\})$. Azt állitjuk, hogy $m\ge M$. Valóban, ha $\underline{\rho}_X=\{e\}=\underline{\delta}_Y$ fennáll valamely X,Y halmazokra, akkor $\underline{\lambda}_{X\cap Y}=\underline{\lambda}_{X\cup Y}=\underline{0}$, és igy a feltevés alapján $b(X\cap Y)=b(X\cup Y)=0$. A szubmodularitásból $b(X)+b(Y)\ge b(X\cap Y)+b(X\cup Y)\ge 0$, azaz $b(X)\ge -b(Y)$ és igy $m\ge M$. Válasszuk α-t úgy, hogy $m\ge\alpha\ge M$, és legyen ezenkivül α egész, ha m és M is egész. Töröljük el G-ből az e élt és legyen az új gráf G_1. Definiáljuk a b_1 függvényt a következőképp.

$$b_1(X)=\begin{cases} b(X)-\alpha, & \text{ha } e \text{ belép } X\text{-be,} \\ b(X)+\alpha, & \text{ha } e \text{ kilép } X\text{-ből} \\ b(X), & \text{egyébként} \end{cases}$$

b_1 teljesen szubmoduláris és egészértékű is, ha b az. Az α választása miatt $Q_1=Q(G_1;b_1)$-re fennáll az indukciós feltevés, így Q_1 tartalmaz egy $x_1\in R^{E-e}$ vektort, amely egész, ha b_1 az. Most $(x_1,\alpha)\in R^E$ Q-ban van ∎∎∎

3.2.2' TÉTEL *A (3.2.2) duális* ***programnak akkor*** *és* ***csak akkor*** *létezik megoldása, ha a következő $H=(V,F)$* ***gráfban nincs*** *pozitiv* ***összköltségű*** *irányitott* ***kör*** *a d'* ***költségre vonatkozólag:***

$e=uv\in F$, ha $uv\in E$. Legyen $d'(e):=d(e)$ ***(előre él),***

$e=vu\in F$, ha $uv\in E$. Legyen $d'(e):=-d(e)$ (***hátra él***),

$e=uv\in F$, ha $\partial(b)$-ben nincs $\overline{vu}$-halmaz. Legyen $d'(e):=0$ (*ugró él*).

Ha d egészértékű és (3.2.2) ***megengedett, akkor*** *létezik* ***egész*** *megoldása is.*

BIZONYITÁS. Legyen C a H gráfnak pozitiv d'-költségű irányitott köre. Legyen $x_o\in R^E$ az a $(0,\pm 1)$-vektor, amely akkor 1 illetve -1, ha az e-nek megfelelő él F-ben a C előre illetve hátra éle. Most $Bx_o\le 0$ és $dx_o>0$, és igy (3.2.2)-nek nem lehet megoldása.

Megforditva, tegyük fel, hogy nincs H-ban pozitiv kör. Ekkor létezik egy $\pi:V\to R$ vektor (egészértékű, ha d is az) úgy, hogy $\pi(v)-\pi(u)\ge d'(uv)$ fennáll F minden uv elemére. (Ez egy könnyű állitás a hálózati folyamok elméletéből: például minden pontra az oda beérkező utak közül a legnagyobb d'-költségű költsége jó lesz π gyanánt.) Mivel π konstanssal eltolható, feltehetjük, hogy $\pi\ge 0$.

Legyenek a π különböző értékei $0\le\pi_1<\pi_2<\ldots<\pi_k$ és legyen $X_i:=\{s\in V: \pi(s)\ge\pi_i\}$. d' definiciója miatt X_i-ből nem lép ki ugró él. Továbbá minden $uv \in E$ élre $\pi(v)-\pi(u)= d(uv)$. Következésképp az X_i halmazok $\mathcal{F}(b)$-hez tartoznak és π súlyozott lánca (3.2.2) megoldását képezi.■■■

A 3.1.5 tétel segitségével kapjuk:

3.2.2 TÉTEL [Cunningham-Frank] *A (3.2.2) duális programnak akkor és csak akkor létezik megoldása, ha a következő $H=(V,F)$ gráfban nincs pozitiv összköltségű irányitott kör a d' költségre vonatkozólag:*

$e=uv \in F$, ha $g(uv)=\infty$. Legyen $d'(e):=d(e)$ (előre él),

$e=vu \in F$, ha $f(uv)=-\infty$. Legyen $d'(e):=-d(e)$ (*hátra él*),

$e=uv \in F$, ha $\mathcal{F}(b)$-ben nincs $\bar{vu}$-halmaz. Legyen $d'(e):=0$ (*ugró él*).■

Nevezzünk egy $\pi:V\to R_+$ vektort *duálisan megengedettnek*, ha az y súlyozott lánca megoldása (3.2.2)-nek, másszóval ha

(3.2.3A) $\quad \pi(v)-\pi(u) = d(uv)$ minden $uv \in E$ élre és

(3.2.3B) $\quad \delta(\pi) < \infty$.

Megjegyezzük, hogy ha Q a $Q=(f,g;b)$ alakban adott, ahol b teljesen szubmoduláris, akkor a 3.1.5 tétel alapján (3.2.3A) a következő alakot ölti:

$$\text{(3.2.3A')} \quad \begin{aligned} &\pi(v) - \pi(u) \le d(uv), \text{ ha } f(uv)=-\infty \\ &\pi(v) - \pi(u) \ge d(uv), \text{ ha } g(uv)=\infty. \end{aligned}$$

A π vektort *optimálisnak* nevezzük, ha y optimális megoldása (3.2.2)-nek. Miután $\delta(\pi)=yb$, ez azzal ekvivalens, hogy π minimalizálja $\delta(\pi)$-t a (3.2.3) feltételek mellett.

Figyeljük meg, hogy a 3.2.1 tételből következik, hogy $Q(f,g;b")$ szubmoduláris folyam poliéder minden oldala tartalmaz egész pontot, ha $f,g,b"$ egészértékű (a 3.1.1 tétel második fele), hiszen az 3.1.3 tétel szerint szubmoduláris folyam poliéder oldala is szubmoduláris folyam poliéder, az 3.1.5 tétel szerint pedig minden szubmoduláris folyam poliéder megadható szép alakban.

A teljesség kedvéért megmutatjuk, hogy a jelen megközelitésből közvetlenül levezethető a 3.1.1 tétel első fele is. Legyen tehát $Q(f,g;b'')$ szubmoduláris folyam poliéder, legyen d költségfüggvény egészértékű és tegyük fel, hogy a szóbanforgó duális lineáris programnak van véges optimuma. Ekkor Q nemüres, igy a 3.1.5 tétel szerint megadható szép alakban. A 2.1.3 és az 1.8 állitások szerint elég a TDI-séget ilyen alakra igazolni.

A 3.2.2 tétel szerint létezik egészértékű duál-megengedett vektor. Legyen π_o optimális ilyen és legyen y_o a π_o súlyozott lánca. Megmutatjuk, hogy π_o nemcsak az egészek közül optimális. Ennek érdekeben azt kell belátni, hogy van egy $x_o \in Q$, amelyre $x_o(A)=b(A)$ fennáll amikorcsak $y_o(A)>0$. Más szavakkal, azt igazoljuk, hogy a $Q_1:=\{x\in Q:\ x(A)=b(A),\ \text{ha}\ y_o(A)>0,\ A\subseteq V\}$ oldal nemüres.

A 2.3.13 tétel szerint $Q_1=Q(G;b_1)$ ahol $b_1(X):=\delta(\pi+\chi_X)-\delta(\pi)$. A 3.2.1 tétel szerint Q_1 akkor üres, ha létezik egy Z halmaz, amelyre $b_1(Z)<0$ és $\chi_Z=0$. De ekkor $\pi_1:=\pi_o+\chi_Z$ duál-megengedett és $\delta(\pi_1)<\delta(\pi_o)$, ellentétben π_o optimális választásával. Vagyis Q_1 nemüres.■■■

Érdemes ezen a nyelven megfogalmazni a 3.1.1 tételt.

<u>3.1.1' TÉTEL</u> *Legyen $Q=Q(G;b)$ szép alakban adott nemüres szubmoduláris folyam poliéder. Ekkor $\max(dy:\ x\in Q) = \min(\delta(\pi):\ \pi$ duál-megengedett$)$, feltéve, hogy a maximum létezik. Ezenkivül, ha b egészértékű, létezik x egészértékű optimum. Ha d egészértékű, létezik π egészértékű duál optimum.*■

A 3.2.1 és a 3.1.5 tételekből az 3.1.6 megjegyzést felhasználva kapjuk:

<u>3.2.3 TÉTEL</u> *Ha b teljesen szubmoduláris, a $Q=Q(f,g;b)$ szubmoduláris folyam poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$(3.2.4) \qquad \varrho_f(A) - \delta_g(A) \le b(A) \ \text{minden}\ A\subseteq V\text{-re.}■■■$$

Megjegyzendő, hogy $b\equiv 0$ speciális esetben a 3.2.3 tétel Hoffman [1960] cirkulációs tételét adja. Az 1.2 Részelési tételből és a másod-részelésre vonatkozó 2.1.2 tételből kapjuk:

<u>3.2.4 TÉTEL</u> A) *Legyen b' metszőn szubmoduláris függvény a $Q(f,g:b')$ szubmoduláris folyam poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha*

$$(3.2.5a) \qquad \varrho_f(\cup A_i) - \delta_g(\cup A_i) \leq \sum b'(\cup A_i)$$

teljesül V diszjunkt $A_1,\ldots,A_k$ részhalmazainak tetszőleges családjára.

B) Ha b'' metszőn szubmoduláris, amelyre $b''(V)=0$, a $Q(f,g;b'')$ akkor és csak akkor nemüres, ha

$$(3.2.5b) \qquad \varrho_f(\cup A_i) - \delta_g(\cup A_i) \leq \sum b'(\cup A_{ij})$$

teljesül V diszjunkt $A_1,\ldots,A_k$ részhalmazainak tetszőleges családjára, ahol mindegyik A_i páronként ko-diszjunkt $A_{i1},A_{i2},\ldots, A_{il}$ halmazok metszeteként áll elő.∎

Rátérünk most az optimalitási feltételekre. Legyen $Q=Q(G;b)$ szép alakban adott szubmoduláris folyam poliéder, z egy eleme és d költség függvény.

<u>3.2.5 TÉTEL</u> *z akkor és csak akkor optimális megoldása (3.2.1)-nek, ha létezik egy $\pi:V\to R$ (potenciálnak hívott) vektor, amelyre teljesülnek a következő optimalitási kritériumok:*

$$(3.2.6) \qquad \text{minden } uv\in E \text{ élre } \pi(v)-\pi(u)= d(uv).$$

$$(3.2.7) \qquad \lambda_z(S_i)=b(S_i),$$

minden $S_i := \{v\in V:\ \pi(v)\geq\pi_i\}$ szinthalmazra, ahol $\pi_o<\pi_1< \ldots<\pi_k$ a π különböző értékei.

BIZONYITÁS A lineáris programozás elemeiből világos, hogy a z akkor és csak akkor optimális megoldása (3.2.1)-nek, ha (3.2.2)-nek létezik megoldása d és b_1-re nézve, ahol

$$b_1(A) := \begin{cases} b(A) & \text{ha } \lambda_z(A)=b(A) \\ \infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A 3.2.2 tételt, illetve a bizonyitását $Q(G;b_1)$-re alkalmazva a tétel következik.∎

Megjegyezzük, hogy a 3.1.5 tétel segitségével ebből könnyen leolvashatjuk az optimalitás feltételét akkor is, amikor Q általános alakban van adva. (Lásd |Frank 1984|). Most csak arra az esetre fogalmazzuk meg, amikor $Q=Q(f,g;b)$, ahol b teljesen szubmoduláris és $b(V)=0$.

3.2.6 KÖVETKEZMÉNY *z akkor és csak akkor maximalizálja dx-et, $x\in Q$, ha létezik olyan $\pi: V \to R$ (potenciálnak hivott) vektor, amelyre teljesülnek a következő optimalitási kritériumok:*

(3.2.6a) *Minden $e=uv\in E$ élre $\bar{d}(e)<0 \Rightarrow z(e)=f(e)$ $(>-\infty)$,*

(3.2.6b) *Minden $e=uv\in E$ élre $\bar{d}(e)>0 \Rightarrow z(e)=g(e)$ $(<\infty)$,*

(3.2.7.a) *$u,v\in V$ pontokra $\pi(u)>\pi(v) \Rightarrow \varepsilon_z(u,v)=0$,*

ahol $\bar{d}(e) := d(uv)+\pi(u)-\pi(v)$ és $\varepsilon_z(u,v) := \min(b(X)-\lambda_z(X)$: X $\bar{u}v$-halmaz).∎

Figyeljük meg, hogy (3.2.7a) semmi más, mint a (3.2.7) átfogalmazása, továbbá, hogy a (3.2.6a-b) feltételek éppen a hálózati folyamokból jól ismert optimalitási kritériumok.

A 4.4 szakaszban leirunk majd egy eljárást, amely polinom időben megtalál egy optimális z vektort. Ott fogjuk felhasználni a fenti optimalitási kritériumokat.

3.3. SZUBMODULÁRIS FOLYAMOK ÉS G-POLIMATROIDOK

A 3.1.2 tételben már láttunk kapcsolatot szubmoduláris folyam poliéderek és g-polimatroidok között. Ebben a szakaszban ezt a viszonyt tovább elemezzük. Először is megmutatjuk, hogy a 3.2.1 tétel könnyen implikálja a diszkrét szaparációs tételt (1.4 tétel).

BIZONYITÁS (1.4 tételé). Legyen p és b a tétel szerint adva. Feltehető, hogy $p(S)=b(S)$. (Ellenkező esetben változtassuk $p(S)$ értékét $b(S)$-re. Mivel ez növelést jelent p szupermoduláris marad.) Legyen S'és S" az S két példánya. (Egy $X\subseteq S$ részhalmaz esetén a megfelelő S'és S"-beli részhalmazokat X'és X"-vel jelöljük). Definiáljuk a $G=(V,E)$ gráfot, ahol $V:=S'\cup S''$ és $E:=\{s''s' : s\in S\}$. $X'\subseteq S'$ és $Y''\subseteq S''$ esetén legyen $b_o(X'\cup Y''):= b(X)-p(Y)$. Nyilván b_o teljesen szubmoduláris és a 3.2.1 tételből az 1.4 tétel következik.■■■

Az 1.4 és a 2.3.9 tétel segitségével kapjuk a következő g-polimatroidok metszetére vonatkozó eredményt:

<u>3.3.1 TÉTEL</u> *Legyen (p_1,b_1) és (p_2,b_2) két erős pár. Az általuk definiált g-polimatroidok $Q= Q(p_1,b_1) \cap Q(p_2,b_2)$ metszete akkor és csak akkor nemüres, ha $p_i\leq b_{3-i}$ $(i=1,2)$.*■■■

Ebből rögtön adódik az alábbi következmény, amely a 2.3.5 általánositása.

<u>3.3.1a KÖVETKEZMÉNY</u> *A Q_1 és Q_2 g-polimatroidnak akkor és csak akkor van közös eleme, ha létezik $x_i,y_i\in Q_i$ $(i=1,2)$ úgy, hogy $x_1\leq y_1$ és $x_2\geq y_2$.*■

Valójában egy 3.3.1-nél többetmondó állitás érvényes, amely a polimatroidok Edmonds féle metszet-tételének általánositása.

<u>3.3.2 TÉTEL</u> *Legyen (p_1',b_1') és (p_2',b_2') két gyenge pár, ahol a*

szereplő függvények egészértékűek. A

$$(3.3.1) \qquad \{p_i'(A) \le x(A) \le b_i'(A) \text{ minden } A \subseteq S,\ i=1,2\}$$

lineáris rendszer szubmoduláris folyam rendszer. (3.3.1) TDI, és ezért a $Q(p_1', b_1') \cap Q(p_1', b_1')$ *metszet egész poliéder.*

BIZONYÍTÁS. Képezzük ugyanazt a G gráfot mint az előbb. Definiáljuk a $b'': 2^V \to R \cup \{\infty\}$ függvényt:

$$b''(X) := \begin{cases} b_1'(Y), & \text{ha } X=Y' \subseteq S' \\ -p_1'(Y), & \text{ha } X=V-Y' \quad (Y' \subseteq S') \\ b_2'(Y), & \text{ha } X=V-Y'' \quad (Y'' \subseteq S'') \\ -p_2'(Y) & \text{ha } X=Y'' \subseteq S''. \end{cases}$$

Most látható, hogy az (3.1.1b) szubmoduláris folyam rendszer ugyanaz, mint (3.3.1).■■■

Megjegyzendő, hogy az előző tétel általánositja McDiarmid [1978] egy tételét is, mely szerint egy polimatroid metszete egy sávval vagy egy téglával olyan, hogy minden oldala tartalmaz egész pontot, feltéve, hogy a polimatroid, a sáv és a tégla is egész. Hasonlóan látható a metszet-tétel következő változata.

3.3.3 TÉTEL *Legyen* b_1'' *és* b_2'' *két egészértékű keresztezően szubmoduláris függvény, melyekre* $b_1''(S) = b_2''(S) = k$*. Ekkor a*

$$(3.2) \qquad \{x(S)=k,\ x(A) \le \min(b_1''(X), b_2''(X)) \text{ minden } X \subseteq S\text{-re}\}$$

rendszer szubmoduláris folyam rendszer. Igy (3.2) TDI, és ezért a (3.2) által definiált poliéder egész.■■■

A fejezet fő eredménye a következő:

3.3.4 TÉTEL *Egy poliéder akkor és csak akkor két g-polimatroid metszetének vetülete, ha szubmoduláris folyam poliéder.*

BIZONYITÁS. Először legyen Q szubmoduláris folyam poliéder és tegyük fel, hogy $Q=Q(G;b)$ szép alakban van adva. Ugyanazt a jelölést használjuk, mint az 1.5 tétel bizonyitásában. Legyen továbbá $T:=\{e_v: e=uv\in E\}$. Definiáljuk a $b_1: 2^S \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ függvényt: $b_1(X):=b(Y)$, ha $X=\varphi(Y)$ $(Y\subseteq V)$ és $=\infty$ egyébként. Ekkor b_1 teljesen szubmoduláris. Definiáljuk S-en a következő két g-polimatroidot. Legyen $Q_1:=\{z\in \mathbb{R}^S: z(e_u)+z(e_v)=0\}$ és $Q_2:=\{z\in \mathbb{R}^S: z(X)\leq b_1(X)$ minden $X\subseteq S$-re, $z(S)=0\}$ (mindegyik 0-bázis poliéder). A konstrukcióból könnyen kiolvasható, hogy Q a $Q_1\cap Q_2$ vetülete $\mathbb{R}^T$-be.

Azt már láttuk, hogy két g-polimatroid metszete szubmoduláris folyam poliéder. A tétel következik, ha belátjuk, hogy Q szubmoduláris folyam poliéder vetülete is az. Legyen $Q=Q(G;b)$ ismét szép alakban adva. Legyen $e\in E$. Elég azt belátni, hogy e mentén vetitve szubmoduláris folyam poliédert kapunk. Legyen Q_1 a vetület, $F:=E-e$ és $H:=(V,F)$. Definiáljuk $b_1: 2^F \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ -et emigy: $b_1(X):=+\infty$, ha e ki- vagy belép X-be és $=b(X)$ egyébként. Most b_1 teljesen szubmoduláris.

Azt állitjuk, hogy $Q_1=Q(H;b_1)$. Nyilván $Q_1\subseteq Q(H;b_1)$. Az ellenkező irányú tartalmazás bizonyitásához legyen $x_1\in Q(H;b_1)$. Ki kell mutatnunk, hogy létezik olyan $x\in Q$, amelyre $x(h)=x_1(h)$ minden $h\in F$-re. Ez azzal ekvivalens hogy a $Q(f,g;b)$ szubmoduláris folyam poliéder nemüres, ahol $-f(e):=g(e):=+\infty$ és $f(h)=g(h)=x_o(h)$, ha $h\in F$. A 3.2.3 tételből és b_1 definiciójából adódóan $Q(f,g;b)$ valóban nemüres. ∎

4. ALGORITMUSOK

4.1 A MOHÓ ALGORITMUS ALKALMAZÁSA RESZELÉSRE

Az egyik legrégebben tanulmányozott kombinatorikai eljárás, a mohó algoritmus eredeti alakjában irányitatlan gráf minimális költségű feszitő fájának megkeresésére szolgál. Az eljárás abban az értelemben mohó, hogy minden lépésben a lehető legkisebb költségű élt választja, csak azzal törődve, hogy ne hozzon létre kört. Többen, egymástól függetlenül felfedezték, hogy a mohó eljárás matroidokra is kiterjeszthető [R.Rado, J.Edmonds, D.Gale]. J.Edmonds megfigyelte, hogy a mohó algoritmus polimatroidokra is általánositható. S.Fujishige és N.Tomizawa [1983] kiterjesztette az eljárást 0-bázis poliéderekre. Miután minden g-polimatroid 0-bázis poliéder vetülete, a mohó algoritmus alkalmazható tetszőleges g-polimatroidra. Az egyszerűség kedvéért ebben a szakaszban végig fel fogjuk tételezni, hogy a szereplő halmaz függvények mind végesek, ami annyit jelent majd, hogy a szereplő poliéderek korlátosak. Az általános eset némi technikai nehézség leküzdése után hasonlóan kezelhető. Ennek részletei a [Frank-Tardos 1986] cikkben szerepelnek.

Egyszerűbb jelölés kedvéért feltesszük, hogy $S=\{1,2,\ldots,n\}$. Legyen $w: S\to R_+$ célfüggvény olyan, hogy $w(i)\geq w(i+1)$ $(i=1,\ldots,n-1)$.
Bizonyitás nélkül kimondjuk a mohó algoritmusra vonatkozó eredményt.

4.1.1 TÉTEL [Fujishige-Tomizawa 1983] *Legyen Q korlátos g-polimatroid és w: A $\max(wx: x\in Q)$ optimalizálási probléma egy z megoldása a következő:*

$$(4.1.1)\quad z(i):=\max(y(i):\ y\in Q,\ y(j)=z(j) \text{ minden } j\leq i-1\text{-re}.$$

Ha $Q=B(b)$ vagy $Q=S(b)$, ahol b teljesen szubmoduláris, akkor $z(i)=b(\{1,\ldots,i\})-b(\{1,\ldots,i-1\})$. ∎

RESZELÉSI ALGORITMUS

Jelen célunk nem a mohó algoritmus elemzése, hanem néhány érdekes, új felhasználásának bemutatása. Legyen b' metsző szubmoduláris függvény és legyen b a reszeltje, azaz minden $A\subseteq S$ halmazra

(4.1.2) $\quad b(A)=\min(\sum_i b'(A_i)\colon \{A_i\}$ az A particiója.)

Először leirunk egy eljárást, amely kiszámitja b(A) értékét, valamint azt az $\{A_i\}$ particiót, ahol a minimum eléretik. Ehhez szükségünk van a következő *MINIMALIZÁLÁSI ORÁKULUM*ra:

Adott $A\subseteq S$ és $z\colon A\to R$ esetén keressük meg azt az $X\subseteq A$ halmazt, melyre $b'(X)-z(X)$ minimális.

Legyen $p\equiv-\infty$. Ekkor (p,b') gyenge pár, amelynek reszeltje (p,b) erős pár, továbbá $Q(p,b')=Q(p,b)=S(b)$. A 2.2.3 tétel szerint $b(A)=\max(x(A)\colon\ x\in Q(p,b))$. Alkalmazzuk az 4.1.1 tételt a $w:=\chi_A$ költségre. Ekkor a (4.1.1)-ben szereplő z(i) értékekre (*) $z(i)=\min(b'(\{i,\dots,i\})\ -\ z(\{1,\dots,i-1\})$ adódik. Ez pedig a b'-re vonatkozó minimalizálási orákulum segitségével kiszámitható.

Ha már a z vektort (és ezzel b(A)-t) kiszámitottuk, meghatározhatjuk A-nak azt az $\{A_i\}$ particióját, melyre $b(A)=\sum b'(A_i)$. Tekintsük azokat a B_i halmazokat $(i=1,\dots,|A|)$, melyeken (*) jobboldalán a minimum éreretett. Legyenek a $\{B_i\}$ hipergráf komponensei $A_1,\dots,A_k$. A definició szerint mindegyik B_i __*pontos*__, azaz, $z(B_i)=b'(B_i)$. Mivel metsző pontos halmazok uniója is pontos, valamennyi A_j halmaz is pontos. Ily módon $b(A)=z(A)=\ \sum(z(A_j))=\ \sum(b'(A_j))$, vagyis $\{A_1\}$ a kivánt particiót adja.

Az eljárás O(n) lépést és a minimalizálási orákulum O(n)-szeri hivását igényli.

4.2 MÁSOD-RÉSZELÉSI ALGORITMUS

Legyen $Q=B(b'')$ bázis poliéder, ahol b'' keresztezőn szubmoduláris. Fujishige tétele (2.2.7) szerint a $B(b'')$ poliéder akkor és csak akkor nemüres, ha

$$(4.2.1') \qquad a)\ \sum b''(Z_i) \geq b''(S) \text{ és } \qquad b)\ \sum b''(S-Z_i) \geq (t-1)b''(S)$$

fennáll az S minden $\{Z_1,\ldots Z_t\}$ particiójára. A

A 2.1.1 tétel szerint, ha Q nemüres, akkor létezik egy b egyértelműen meghatározott teljesen szubmoduláris függvény, nevezetesen b'' másod részeltje, amelyre $B(b)=Q$. Azt is tudjuk, hogy $b(A)= \max(x(A): x\in Q)$.

Először a [Frank-Tardos 1986] dogozatból idézve megadunk egy eljárást, amely vagy megtalálja Q-nak egy elemét (egészet, ha Q egész) vagy pedig megkonstruál egy (4.2.1)-et megsértő $\{Z_i\}$ particiót. Utána pedig megmutatjuk, hogy az eljárás csekély módositásával hogyan lehet adott w célfüggvény esetén $\max(wx:x\in Q)$-t meghatározni. Speciálisan ha w egy A halmaz karakterisztikus vektora, akkor ez a maximum épp $b(A)$ értéket adja. Megjegyezzük, hogy az algoritmushoz szükségünk van egy b''-re vonatkozó minimalizálási orákulumra.

Fel fogjuk tételezni, hogy $b''(S)=0$. Ez nem csökkenti az általánosságot, mert ha $b''(S)$ nem nulla, akkor legyen v az S egy eleme és definiáljuk a b''_1 függvényt ekképp: $b''_1(X):=b''(X)-b''(S)$ ha $v\in X$ és $b''_1(X):=b''(X)$ ha $v\notin X$. Nyilván b''_1 keresztezőn szubmoduláris és $B(b''_1)$ egy olyan 0-bázis poliéder, amely Q-nak z-vel való $Q-z$ eltoltja, ahol $z(u)=0$ ha $u\in S-v$ és $z(v)=b''(S)$.

0-bázis poliéderre a (4.2.1') feltétel igy alakul

$$(4.2.1) \qquad a)\ \sum b''(Z_i) \geq 0 \text{ és } b)\ \sum b''(S-Z_i) \geq 0.$$

fennáll az S minden $\{Z_1,\dots Z_t\}$ particiójára.

Valójában az eljárás egy új, konstruktiv bizonyitás arra, hogy (4.2.1) elegendő Q nemürességéhez. Ezt a bizonyitást adjuk meg, majd jelezzük, hogy miként alakitható algoritmussá.

A 2.2.7 TÉTEL KONSTRUKTIV BIZONYITÁSA. Tegyük fel hogy (4.2.1) fennáll. Ekkor S minden v elemére $b''(v)+b''(S-v)\geq 0$, mert különben a $Z_1:=\{v\}$, $Z_2:=\{S-v\}$ partició megsértené (2.1)-et. Indukciót használunk az olyan v elemek számára, melyekre $b''(v)+b''(S-v)>0$. Amennyiben nincs ilyen elem, azaz $b''(v)+b''(S-v)=0$ minden $v\in S$-re, akkor azt állitjuk, hogy a $z(v):=b''(v)$ $(v\in S)$ vektor eleme Q-nak. Valóban, ha (4.2.1a)-t az egyelemű halmazokból álló particióra alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy $z(S)\geq 0$. Annak érdekében, hogy a $z(A)\leq b''(A)$ egyenlőtlenséget lássuk (minden $A\subseteq S$)-re, alkalmazzuk (4.2.1)-et arra a particióra, amely az A elemeiből mint egyelemű halmazokból, valamint (ha $A\neq S$) az $S-A$ halmazból áll.

Tegyük most fel, hogy valamely $v\in S$-re $b''(v)+b''(S-v)>0$. Az elképzelés az, hogy úgy csökkentjük $b''(v)$ és $b''(S-v)$ értékét, hogy összegük nulla legyen és az indukciós hipotézis fennmaradjon, (azaz (4.2.1) érvényes legyen a csökkentett b''-re).

Legyen tehát $f(v):=\min(\Sigma(b''(S_i): i=1,\dots,t): \{S_1,\dots,S_t\}$ az $S-v$ particiója) és $g(v):=\min(\Sigma(b''(S-S_i): i=1,\dots,t): \{S_1,\dots,S_t\}$ az $S-v$ particiója).

1.Eset. $f(v)+g(v)\geq 0$. Válasszuk α-t úgy, hogy $-f(v)\leq\alpha\leq g(v)$ és α egész, ha f és g egészértékű. Definiáljuk $b''_1(v):=\alpha$, $b''_1(S-v):=-\alpha$, máskülönben b''_1 megegyezik b''-vel. Nyilván b''_1 metszőn szubmoduláris és (4.2.1) fennáll b''_1-re vonatkozólag. Valóban, ha $\mathcal{F}$ particióra (4.2.1) megsérülne, akkor az α definiciója folytán sem $\{v\}$ sem $S-v$ nem szerepelhet a particióban. De ez azt jelenti hogy már $\mathcal{F}$ már b''-re nézve is megsérti (4.2.1)-t.

2.Eset. $f(v)+g(v)<0$. Ez ellent fog (4.2.1)-nek mondani. Az $S':=S-v$ halmaz X részhalmazain definiáljuk a $b'(X):=b''(X)$, és $p'(X):=-b''(S-X)$ függvényeket. Ekkor (p',b') gyenge pár. (4.2.1) ekvivalens (2.2.3)-mal. Legyen $\mathcal{F}=\{F_1,\dots,F_k\}$ illetve $\mathcal{G}=\{G_1,\dots,G_l\}$ az a partició, amelyre $f(v)=\Sigma(b''(F_i): F_i\in\mathcal{F})$ és $g(v)=\Sigma(b''(S-G_i): G_i\in\mathcal{G})$. Ha $f(v)+g(v)<0$, akkor $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ kielégitik (2.2.4)-et. A 2.2.6 tétel bizonyitásában alkalmazott eljárást alkalmazva az $S-v$ olyan

$Z_1,\dots,Z_t$ diszjunkt részhalmazait kapjuk, melyek megsértik (2.2.3)-t. Ekkor viszont a $\{Z_1,\dots,Z_t, S-\cup Z_i\}$ partició megsérti (4.2.1)-et.∎

Annak érdekében, hogy ezt a bizonyitást algoritmussá alakitsuk, először is figyeljük meg, hogy a b"-re vonatkozó minimalizálási orákulumból könnyen késziethetünk egy olyan b''_1-re vonatkozót, amely b"-ből úgy keletkezik, hogy a b" értékeit néhány egyelemű halmazon és a komplementerén csökkentjük. Másodszor, a bizonyitásban szereplő f(v) és g(v) minimumok kiszámithatók, az 4.1 szakaszban ismertetett reszelési algoritmus segitségével. Valóban, a $b'_1(X):=b''(X)$ (ha $X\subseteq S-v$) és $b'_2(X):=b''(S-X)$ (ha $X\subseteq S-X$) függvények metszőn szubmodulárisak az S-v részhalmazain és egy rájuk vonatkozó minimalizáló orákulum könnyen előállitható a b"-éből.

MÁSOD-RESZELÉSI ALGORITMUS

Input: $S=\{v_1,\dots v_n\}$ alaphalmaz és $b'':2^S\to R$ metszőn szubmoduláris függvény, melyre $b''(S)=0$. (b" abban az értelemben van "adva", hogy egy b"-re vonatkozó minimalizálási orákulum rendelkezésre áll).

Output: Vagy egy (4.2.1)-et megsértő partició, vagy egy $z\in Q$ vektor (egész, ha Q az).

1.RÉSZ

i=1,2,...,n-re tegyük az alábbiakat.

1. Legyen $s(i):=b''(v)+b''(S-v)$.

   1a. Ha $s(i)<0$, STOP. Q üres és $\mathcal{P}:=\{v,S-v\}$ megsérti (4.2.1)-t.

   1b. Ha $s(i)=0$, legyen $z(i):=b''(V_i)$.

   1c. Ha $s(i)>0$, legyen $T:=\{v_1,\dots v_{i-1}\}$ és definiáljuk az $S-v_i$ X részhalmazain a b'_1 és b'_2 metszőn szubmoduláris függvényeket:

$b_1'(X):=z(v)$ ha $X=\{v\}$, $v\in T$ és $b_1'(X):=b''(X)$ egyébként
$b_2'(X):=-z(v)$, ha $X=\{v\}$, $v\in T$ és $b_2'(X):=b''(S-X)$ egyébként.

A reszelési algoritmussal számitsuk ki az

$f(v_i)=\min(\Sigma(b_1'(S_i)\colon i=1,2,\dots t)\colon \{S_1,\dots,S_t\}$ az $S-v_i$ particiója) és

$g(v_i)=\min(\Sigma(b_2'(S_i)\colon i=1,2,\dots t)\colon \{S_1,\dots,S_t\}$ az $S-v_i$ particiója)

értékeket valamint azt az $\mathcal{F}=\{F_1,\dots,F_k\}$ illetve $\mathcal{G}=\{G_1,\dots,G_l\}$ particiót, ahol az f-et és g-t definiáló minimum eléretik.

2. Ha $f(v_i)+g(v_i)<0$, menjünk a 2. részre. Egyébként legyen $z(v_i)$ olyan α szám, hogy $-f(v_i)\le\alpha\le g(v_i)$ (α legyen egész, ha b" egészértékű).

Ha $i=n$, STOP: a kapott z vektor Q-ban van.

Ha $i<n$, növeljük meg i-t 1-gyel és menjünk az 1. lépésre.

2.RÉSZ

Alkalmazva $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$-re a 2.2.6 tétel bizonyitásában leirt eljárást, keressünk S-v-nek olyan $Z_1,\dots,Z_t$ diszjunkt részhalmazait, melyek megsértik (2.2.3)-t. STOP: a $\{Z_1,\dots,Z_t,S-\cup Z_i\}$ partició megsérti (4.2.1)-et.∎

Az algoritmus szekvenciálisan megy végig az S elemein. Egy elem vizsgálatakor konstans számú lépésre és a reszelési algoritmus kétszeri hivására van szükségünk. Vagyis az eljárás $O(n^2)$ lépést és a minimalizálási orákulum ugyanennyi hivását igényli.

A MÁSOD-RESZELT MEGHATÁROZÁSA

A fenti algoritmus csekély módositással használható, ha adott egy w célfüggvény és a $\max(wz: z\in Q)$ értéket keressük. Tegyük fel, hogy $w(v_1)\geq w(v_2)\geq \ldots \geq w(v_n)$. A másod-reszelési algoritmus 2. lépésében válasszuk a $z(v_i)$ értéket a legnagyobbnak, azaz $g(v_i)$-nek. A 4.1.1 tétel alapján a kapott z vektor optimális.

Tegyük most újra fel, hogy $b''(S)=0$, $B(b'')$ nemüres, és meg akarjuk valamely $X\subseteq S$ halmazra határozni a $b(X)$ másod-reszelt értékét, együtt azokkal az $X_{i,j}$ halmazokkal, amelyek a (2.1.2) képletben szerepelnek. Mivel $B(b)=B(b'')$, a 2.2.3 tétel szerint létezik olyan $z\in B(b'')$, amelyre $z(X)=b(X)$. Egy ilyen z-t úgy kaphatunk meg, hogy az előbbi maximalizálós eljárásban a w súly függvény értékét X elemein 1-nek választjuk, másutt 0-nak.

Emlékeztetünk a 2.1 szakasz elején a b definiciójához bevezetett b' és p' függvényekre. A 4.1 szakasz végén leirtak alkalmazásával megkonstruálhatjuk az X egy olyan $\{X_1,\ldots, X_n\}$ partícióját, amelyre $\sum b'(X_i)=b(X)$. Ezután pedig ugyanezzel a módszerrel mindegyik X_i komplementerének megadhatunk egy $\bar{X}_{i1}, \bar{X}_{i2},\ldots$ partícióját (ahol $\bar{Y}$ az Y komplementerét jelöli) úgy, hogy $b'(X_i)= \sum_j b''(\bar{X}_{ij})$.∎

A másod-reszelési algoritmust fel fogjuk használni a szubmoduláris folyamok konstruálásánál. További alkalmazásai szerepelnek majd az 5. fejezetben.

4.3 SZUBMODULÁRIS FOLYAM KERESÉSE

A 3.2 szakaszban megadtuk annak a szükséges és elegendő feltételét, hogy adott Q szubmoduláris folyam poliéder mikor nemüres. Jelen célunk ezen kérdés algoritmikus vizsgálata. Először leirunk egy eljárást [Frank 1984b] arra az esetre, amikor $Q=Q(f,g;b)$, ahol b teljesen szubmoduláris és $b(V)=0$, majd ezt kiterjesztjük az általános esetre, amikor b keresztezőn szubmoduláris.

A 3.2.4 tétel szerint Q akkor és csak akkor nemüres, ha (3.2.4) fennáll. Az eljárás az Edmonds-Karp féle maximális folyam algoritmus általánositásának tekinthető.

Legyen $x:R\to E$ tetszőleges olyan vektor, amelyre $f\leq x\leq g$.

Egészitsük ki a gráfot s és t új pontokkal és G minden v pontjára vezessünk egy-egy új élt t-ből v-be és v-ből s-be. Az új e éleken az $f(e)$ alsó kapacitás legyen 0, a $g(e)$ felső kapacitás pedig ∞. Az új gráf legyen $G_1=(V_1,E_1)$ és legyen $\lambda_x(B)=\varrho^1_x(B)-\delta^1_x(B)$, ahol ϱ^1_x ill. δ^1_x a G_1-re vonatkozik.

A b függvényt terjesszük ki $V\cup\{s,t\}$ részhalmazaira úgy, hogy minden s vagy t pontot tartalmazó X halmazra legyen $b(X)=\infty$. A kiterjesztett b teljesen szubmoduláris. Tekintsük az E_1-en a kiterjesztett f,g és b által definiált Q_1 szubmoduláris folyam poliédert. A választott x vektor kiegészithető Q_1 egy elemévé ha az új éleken az x értékeit alkalmasan definiáljuk. Például $x(vs)=M$, $x(tv)=0$ $(v\in V)$ biztosan megteszi, ahol $M=\max(\varrho_x(B)-\delta_x(B)-b(B): B\subseteq V,\ b(B)$ véges).
Már most megjegyezzük, hogy az eljárásnak keresztezőn szubmoduláris függvényekre történő kiterjesztésénél egy ravaszabb módon definiált kezdeti x-re lesz szükségünk.

Az algoritmus alapeszméje az, hogy ezen x megoldásból kiindulva, újabb és újabb megoldásokat keres egészen addig, amig vagy talál egy olyan megoldást, amelynek minden új élen 0 az értéke, (mely esetben az eredeti feladatunknak találtunk egy megoldását), vagy pedig talál egy olyan A halmazt, mely megsérti a (3.2.4) feltételt.

Az általános lépéshez tegyük fel tehát, hogy adott $x:E_1\to R$, amelyre $x\in Q_1$. Készitsünk el egy $G_x=(V_1,E_x)$ segédgráfot a következőképp.

E_x-nek három tipusú eleme van.

(1) $e_1=uv$ (*előre*) él, ha $x(uv)<g(uv)$ $(uv\in E)$. Legyen e_1 kapacitása $c(e_1):=g(uv)-x(uv)$.

(2) $e_2=vu$ (*hátra*) él, ha $x(uv)>f(uv)$ $(uv\in E)$. Legyen e_2 kapacitása $c(e_2):=x(uv)-f(uv)$.

(3) $e_3=uv$ (*ugró*) él $(u,v\neq s)$ ha nincsen pontos $u\bar{v}$-halmaz (azaz uv nem lép ki pontos halmazból). Legyen e_3 kapacitása $c(e_3):=\min(b(B)-\lambda_x(B)$, B $u\bar{v}$-halmaz).

Itt egy B halmazt akkor nevezünk ***pontosnak*** (x-re nézve), ha $\lambda_x(B)=b(B)$.

1.LEMMA *Pontos halmazok metszete és uniója pontos.*

BIZONYITÁS. Legyen A és B pontos. Ekkor $b(A)+b(B)=\lambda_x(A)+\lambda_x(B)=\lambda_x(A\cap B)+\lambda_x(A\cup B)\leq b(A\cap B)+b(A\cup B)\leq b(A)+b(B)$. Következésképp végig egyenlőség áll és a lemma következik.∎

Ha a v csúcs benne van pontos halmazban, legyen $B_x(v)$ a v-t tartalmazó pontos halmazok metszete. Ha félreértést nem okoz, $B_x(v)$-t $B(v)$-vel fogjuk jelölni. Az 1. lemma szerint $B(v)$ pontos.

Két eset lehetséges.

1.ESET Nem létezik G_x-ben s-ből t-be út.

Legyen S az s-ből elérhető V-beli pontok halmaza. Ha $S=\emptyset$, akkor $x(sv)=0$ minden $v\in V$-re. Az algoritmus véget ér: x megszorítása E-re olyan vektor, amely Q-ban van.

Tegyük fel, hogy S nemüres. Ekkor $\sum(x(sv):v\in S)<0$. Mivel S-ből nem lép ki ugró él, minden S-beli pont benne van pontos halmazban, ezért

$S=\cup(B(v):v\in S)$ és igy az 1. **Lemma szerint** S pontos. Ezenkivül minden S-ből kilépő $uv\in E$ élre $x(uv)=g(uv)$ és S-be belépő $uv\in E$ élre $x(uv)=f(uv)$.

Ily módon $b(S)=\rho^1_f(S)-\delta^1_g(S)=\rho_f(S)-\delta_g(S)+\Sigma(x(sv):v\in S)<\rho_f(S)-\delta_g(S)$, azaz S megsérti a (3.2.4) feltételt és igy a Q poliéder üres.

2.ESET G_x-ben létezik út s-ből t-be.

Legyen P minimális élszámú út. Jelölje Δ a P élein a kapacitások minimumát és nevezzük Δ-t a P *kapacitásának*. Definiáljuk az $x':E_1\to R$ vektort a következőképp.

$$x'(uv)=\begin{cases} x(uv)+\Delta, & \text{ha } uv\in E_1 \text{ és } uv \text{ P-n van} \\ x(uv)-\Delta, & \text{ha } uv\in E1 \text{ és } vu \text{ P-n van} \\ x(uv) & \text{egyébként} \end{cases}$$

E változtatást *növelésnek* fogjuk nevezni. Az egyik lényeges megfigyelés a következő.

2.LEMMA *x' benne van Q_1-ben.*

BIZONYITÁS. A konstrukció miatt $f\le x'\le g$. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(4.3.1)\qquad \lambda_{x'}(B)=\lambda_x(B)+\Delta(\delta^j(B)-\rho^j(B)),$$

ahol $\delta^j(B)$ ill. $\rho^j(B)$ a P útnak B-ből kilépő ill. B-be belépő ugró éleinek számát jelöli.

Jelölje $\varepsilon(B)$ valamely B ponthalmaz $b(B)-\lambda_x(B)$ többletét. ε szubmoduláris és $x\in Q_1$ azt jelenti, hogy ε nemnegativ. Azt fogjuk megmutatni, hogy $\delta^j(B)\Delta\le\varepsilon(B)$ minden $B\subseteq V$. Ebből már (*) alapján $\lambda_{x'}(B)\le b(B)$ következik.

$\delta^j(B)$ szerinti indukciót alkalmazunk. A $\delta^j(B)=0$ eset triviális, igy legyen $\delta^j(B)>0$. Legyen uv a P útnak az s-től számitott első ugró éle amely B-ből kilép. Amennyiben $v=t$, akkor $\delta^j(B)=1$ és $c(ut)\ge\Delta$.

Másrészt $c(ut) \leq b(B) - \lambda_x(B) = \epsilon(B)$ **és igy** $\Delta\delta^j(B) \leq \epsilon(B)$.

<u>ALLITAS</u> *Ha* $v \neq t$, ***akkor*** $\delta^j(B \setminus B(u)) = \delta^j(B) - 1$.

BIZONYITAS. Miután semmilyen ugró él **nem** lép ki $B(u)$-ból és uv nem lép ki $B \setminus B(u)$-ból, kapjuk, hogy $\delta^j(B \setminus B(u)) \leq \delta^j(B) - 1$. Másrészt, ha qr a P-nek egy másik ugró éle, **amely kilép B-ből**, akkor belátjuk, hogy $r \notin B(u)$, azaz, hogy a qr él $B \setminus B(u)$-ból **is kilép**: valóban, az ellenkező esetben az ur ugró él G_x-ben, **amely** P egy korábbi pontjától P későbbi pontjába vezet, ellent**mondásban** P minimális választásával.∎

Ezt az állitást és az indukciós feltevést a $B \setminus B(u)$ halmazra alkalmazva kapjuk, $\epsilon(B) = \epsilon(B) + \epsilon(B(u) \geq \epsilon(B \setminus B(u)) + B(B \setminus B(u)) \geq \Delta + \Delta(\delta^j(B) - 1) = \Delta\delta^j(B)$, **ami a 2. lemma állitása.** ∎∎

Az algoritmus mármost ugyanazon **az elven működik, mint a** Ford-Fulkerson féle maximális folyam eljárás. Épitsük fel az új x'-re vonatkozó segédgráfot és ismételjük az eljárást addig, amig vagy az 1. eset fordul vagy a 2. esetben **S=∅ nem** lesz.

Azt kell bebizonyitanunk, hogy **az egymást** követő növelések száma $|V|$ egy hatványával korlátozható. **A Ford-Fulkerson** algoritmusban ez általában nem igaz, csak akkor, **ha minden** növelő út minimális élszámú (ez Edmonds és Karp illetve Dinic **eredménye**). A mi esetünkben már csupán annak érdekében, **hogy a módositott** x' vektor megoldás legyen feltettük, hogy a lehetséges **javitó utak** közül mindig egy legrövidebbet veszünk. A **polinomialitás** bizonyitásához e választásunkat tovább fogjuk specifikálni.

Tegyük fel, hogy a V_1 pontjai **meg** vannak indexelve az $1, 2, \ldots, |V_1|$ számokkal. Egyszerűség kedvéért **nem** teszünk különbséget egy pont neve és indexe között, igy például $u > v$ azt jelenti, hogy az u pont indexe nagyobb mint a v ponté.

Legyen x az algoritmus futása során előálló valamely vektor és G_x a hozzátartozó segédgráf. $\sigma_x(v)$ $(\tau_x(v))$ jelölje a segédgráfban az s-ből v-be vezető (v-ből t-be vezető) legrövidebb út élszámát. (Ha nincs ilyen út, akkor ∞). Jelölje x' **a** G_x-ben történő javitás után kapott vektort.

Egy uv élt *megengedettnek* nevezünk, ha $\sigma_x(u) + \tau_x(v) + 1 = \sigma_x(t)$. Nyilván egy s-ből t-be vezető út pontosan akkor legrövidebb, ha csupa megengedett élből áll. Minden v csúcsra definiáljuk a $\pi_x(v)$ számot, mint a legkisebb olyan u indexet, amelyre uv megengedett. Ha ilyen index nem létezik, akkor $\pi_x(v)=\infty$.

A lehetséges növelő utak közül azt fogjuk használni, melynek pontjai t, $\pi(t),\pi(\pi(t)),\dots,s$. Nyilván ezen indexek mindegyike véges. Megjegyzendő, hogy a cimkézési technika egyszerű módositásával ez az út könnyen megkapható.

Megjegyezzük, hogy a javitó utaknak ezt a fajta specifikálását Schönsleben [1980] javasolta a polimatroid metszet problémára. Sikerrel alkalmazta még Lawler és Martel [1982] az ún. polimatroid folyamokra, valamint Cunningham is annak eldöntésére, hogy megadott vektor benne van-e egy matroid poliéderben.

<u>3.LEMMA</u> *Tegyük fel, hogy $\sigma_x(v)> \sigma_x(u)$ és uv ugró él $G_{x'}$-ben de nem az G_x-ben. Ekkor a P javitó úton létezik v_1, u_1 két egymást követő csúcs, melyekre v_1v és uu_1 ugró élek G_x-ben, továbbá $\sigma_x(u)= \sigma_x(v_1)= \sigma_x(v)-1= \sigma_x(u_1)-1$.*

BIZONYITÁS. B(u) továbbra is $B_x(u)$-t röviditi. Ha egy w pont nincs pontos halmazban definiáljuk B(w)-t $V\cup\{t\}$-nek. Mivel uv a P út mentén történt növeléssel előálló új ugró él, $v\notin B(u)$.

Legyen X olyan maximális pontos $u\bar{v}$-halmaz, amelynek B(u) része és (i) minden $w\in P\cap(X-B(u))$ esetén $\sigma_x(w)\le\sigma_x(u)$. Mivel X nem pontos x'-re nézve, (4.3.1) alapján P-nek létezik X-be belépő v_1u_1 ugró éle. Az 1.lemma szerint $X':=X\cup B(v_1)$ pontos. A fenti (i) tulajdonság fennáll X'-re miután $\sigma_x(w)\le\sigma_x(v_1)= \sigma_x(u_1)-1\le \sigma_x(u)$ minden $w\in P\cap B(v_1)-X$ esetén. Ezért az X maximális választása miatt X' nem lehet $u\bar{v}$-halmaz, és igy $v\in B(v_1)$. Ebből $\sigma_x(u_1)=\sigma_x(v_1)+1\ge \sigma_x(v)\ge\sigma_x(u)+1$, amely (i) segitségével mutatja, hogy $u_1\in B(u)$. Más szavakkal v_1v és uu_1 ugró élek és $\sigma_x(u)+1\le\sigma_x(v)\le \sigma_x(v_1)+1= \sigma_x(u_1)\le\sigma_x(u)+1$, amiből az egyenlőség végig következik.∎

<u>4.LEMMA</u> *Az algoritmus során $\sigma_x(w)$ és $\tau_x(v)$ nem csökken.*

BIZONYITÁS Ha uv új él $G_{x'}$-ben, amelyre $\sigma_x(u)<\sigma_x(v)$, akkor uv ugró él és a 3. lemma szerint $\sigma_x(u)=\sigma_x(v)-1$. Ezért a $\sigma_x(w)$ nem csökkenhet. Hasonlóan látszik, hogy $\pi_x(v)$ nem csökken.∎

Nevezzük az algoritmus egy *fázisának* az egymást követő növelések azon sorozatát, amelyben a $\sigma(t)$ értéke változatlan. A fázisok száma nyilván legfeljebb n.

<u>5.LEMMA</u> ***Egy fázison belül $\pi_x(v)$ nem csökken.***

BIZONYITÁS Az egyedüli lehetőség a $\pi_x(v)$ csökkenésére az volna, ha növeléskor egy új uv ugró él keletkezik. Alkalmazzuk 3. lemmát, és tekintsük a P növelő útnak a lemma által biztositott u_1, v_1 pontjait. Ekkor v_1v, uu_1 és v_1u_1 megengedett élek G_x-ben. Igy $\pi_x(v)\leq v_1=\pi_x(u_1)\leq u$, vagyis az új ugró él nem csökkenti $\pi_x(v)$-t.∎

A javitó út egy élét nevezzük ***kritikusnak***, ha kapacitása Δ.

<u>6.LEMMA</u> ***P mentén való növeléskor P kritikus élei eltűnnek a segédgráfból.***

BIZONYITÁS Legyen uv a P-nek egy kritikus éle. A lemma triviális ha uv előre vagy hátra él, vagy ha u=s. Tegyük fel, hogy uv ugró él. Belátjuk, hogy van olyan X $u\bar{v}$-halmaz, amely x'-re nézve pontos. Mivel uv kritikus, $\Delta=\min(b(B)-\lambda_x(B)\colon B\ u\bar{v}\text{-halmaz})$. Legyen B minimális olyan $u\bar{v}$-halmaz, amelyre $\Delta=b(B)-\lambda_x(B)$.

<u>ÁLLITÁS</u>. $B\subseteq B(u)$.

BIZONYITÁS. $\Delta=\epsilon(B)=\epsilon(B)+\epsilon(B(u))\geq\epsilon(B\cap B(u))+\epsilon(B\cup(B(u))\geq\Delta+0$. B minimalitása miatt $B=B\cap B(u)$, azaz $B\subseteq B(u)$.

Az állitás mutatja, hogy az X:=B halmaz kielégiti a következő tulajdonságokat.

(a) X $u\bar{v}$-halmaz,
(b) $\varepsilon(X)=\Delta$
(c) $w\in X\cap P \Rightarrow \sigma_x(w)<\sigma_x(u)$.

Válasszuk most X-et maximális olyannak, amely kielégiti (a), (b) és (c)-t.

ALLITAS. *P-nek semelyik ugró éle nem lép X-be.*

BIZONYITAS. Indirekt legyen a qr él ilyen. Azt fogjuk megmutatni, hogy az $X':=X\cup B(q)$ kielégiti (a)-(c)-t, ellentmondásban X maximális választásával. (a): $\sigma_x(q)+1=\sigma_x(r)\leq\sigma_x(u)=\sigma_x(v)-1$, és azért $v\notin B(q)$. (b): $\Delta=\varepsilon(X)=\varepsilon(X)+\varepsilon(B(q))\geq\varepsilon(X\cap B(q))+\varepsilon(X')\geq 0+\Delta$, amiből $\varepsilon(X')=\Delta$ adódik. (c): Tetszőleges $w\in(P\cap B(q))-X$ pontra fennáll $\sigma_x(w)\leq\sigma_x(q)=\sigma_x(r)-1<\sigma_x(u)$.

Felhasználva (4.3.1)-t és a 2. lemmát kapjuk, hogy $b(X)\geq\lambda_{x'}=\lambda_x(X)+\Delta(\varepsilon^j(X)-\varepsilon^j(X))=b(X)-\Delta+\Delta\varepsilon^j(X)\geq b(X)$, amiből $b(X)=\lambda_{x'}(X)$, és ezzel a lemma bizonyitást nyert.∎

Legyen z az algoritmus futása során keletkező valamely vektor és P_1 a G_z segédgráfban választott javitó út.

7.LEMMA *Ha uv a P_1 javitó úton kritikus él, akkor ugyanabban a fázisban már nem lesz újra kritikus ugró él.*

BIZONYITAS A 7. lemma szerint uv a javitással eltűnik a segédgráfból. Ekkor $\pi_z(v)=u$, és igy az 5. lemma szerint az egész fázis során $\pi_x(v)\geq u$.

Indirekt tegyük fel, hogy ugyanabban a fázisban később valamely aktuális x vektorra vonatkozó P javitó út mentén végrehajtunk egy növelést, amelynek során uv ismét megengedett ugró éllé változik. A 3.lemma alapján látjuk, hogy $u\leq\pi_x(v)\leq v_1=\pi_x(u_1)\leq u$, amiből $u=v_1$ adódik, vagyis az uv már megengedett ugróél volt G_x-ben, ami lehetetlen.∎

Mostanra beláttuk, hogy egy fázis folyamán egy él legfeljebb egyszer lehet kritikus. Mivel a segédgráfban legfeljebb 3 párhuzamos él lehet u-ból v-be, egy fázisban legfeljebb $3n^2$ növelés lehetséges. Igy a növelések teljes száma legfeljebb $3n^3$. Továbbá, ha az input adatok (f,g és b) egészértékűek, akkor az egész számolás egészekkel történik, és igy a végső x is egészértékű lesz.

Annak érdekében, hogy az algoritmust használni tudjuk, szükségünk van egy orákulumra, amely tetszőleges m moduláris függvény esetén

(A) *meghatározza a min(b(B)-m(B): B uv-halmaz) értékét.*

(Megjegyezzük, hogy $m=\lambda_x$ moduláris). Jelölje ennek az orákulumnak a komplexitását h. Egy növelő út és a segédgráf megkonstruálása n^2h lépést kiván. Ily módon az egész eljárás bonyolultsága $O(n^5h)$.

A most következő részben megmutatjuk, hogy az előző algoritmust miként lehet használni, ha a szubmoduláris folyam poliéder Q=Q(f,g;b") alakban van adva, ahol b" keresztezőn szubmoduláris és b"(V)=0.

Először a 4.2 szakaszban leirt másod-reszelési algoritmussal keressünk B(b")-nek egy y vektorát (egészet, ha b" egész). Erre az y-ra később lesz szükségünk.

Amennyiben a B(b") 0-bázis poliéderről az derül ki, hogy üres, úgy Q is az, és az eljárás ekkor véget ér.

Tegyük fel tehát, hogy B(b") nemüres és legyen b a b" másod--reszeltje. Tudjuk, hogy ekkor Q(f,g;b")=Q(f,g;b), és igy elvileg alkalmazhatjuk a fenti algoritmust. Ehhez persze az kell, hogy az (A) orákulum rendelkezésre álljon. Kiindulásul azt tételezzük fel, hogy létezik egy orákulum, amely

(A") *meghatározza a min(b"(B)-m(B): B $\bar{u}\bar{v}$-halmaz) értékét.*

Ennek segitségével akarjuk (A)-t megkonstruálni. Ezt nem tesszük meg általában, hanem csak olyan m vektorokra, melyekre m(V)=0. Ekkor viszont nem is kell már semmi továbbit csinálnunk, mert érvényes az alábbi lemma.

8.LEMMA *Legyen b'' keresztezőn szubmoduláris függvény, melyre $b''(V)=0$. Legyen b a b'' másod-reszeltje, $u,v\in V$ két pont és $m:V\to R$ olyan, hogy $m(V)=0$. Ekkor $\min(b''(B)-m(B):$ B $\bar{uv}$-halmaz$)=$ $\min(b(B)-m(B):$ B $\bar{uv}$-halmaz$)$.*

BIZONYITÁS Legyen $h:V\to R$ a következő: $h(u)=-M$, $h(v)=M$ és $h(x)=0$, ha $x\in V-\{u,v\}$, ahol M nagy pozitiv szám. Definiáljuk $b_1''(X)=$ $b''(X)-m(X)+$ $h(X)$ és $b_1(X)=$ $b(X)-$ $m(X)+$ $h(X)$. Könnyen látható, hogy b_1 a b_1'' másod-reszeltje, továbbá, hogy $b_1''(X)$ és $b_1(X)$ is $(X\subseteq V)$ a minimumát $\bar{uv}$-halmazon veszi fel. Elég tehát belátni, hogy a két minimum egyenlő. Ez viszont rögtön látszik a 2.1.4 következmény alkalmazásával.∎

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy miként lehet a fent részletezett algoritmust használni, ha az (A) orákulum csak olyan m vektorokra áll rendelkezésre, melyekre $m(V)=0$. Legyen $x:E\to R$ olyan, hogy $f<x<g$. Emlékezzünk rá, hogy a $B(b'')$ egy y elemét már megkerestük. Terjesszük ki x-et az E_1 éleire: ha a $q(v):=$ $y(v)-\lambda_x(v)$ érték nemnegativ, akkor legyen $x(vs):=q(v)$ és $x(tv)=0$, ha a $q(v)$ nempozitiv, akkor legyen $x(vs):=0$ és $x(tv):=q(v)$. Most már érvényes, hogy $m:=\lambda_x$ olyan moduláris függvény, amelyre $m(V)=0$. Megfigyelhetjük továbbá, hogy V az eljárás minden lépésében pontos, és így minden közbenső $m=\lambda_x$ vektorra érvényes, hogy $\lambda_x(V)=0$. Tehát az (A) orákulumra valóban csak akkor van szükség, amikor $m(V)=0$.

4.4 OPTIMÁLIS SZUBMODULÁRIS FOLYAM KERESÉSE

Legyen adva $Q=Q(f,g;b)$ szubmoduláris folyam poliéder és $d:E\to R$ költség függvény, ahol b keresztezőn szubmoduláris és $b(V)=0$. Az előző szakaszban leirtunk egy algoritmust Q egy elemének megtalálására. Jelen célunk egy olyan elem megkeresése, amely maximalizálja dx-et, $x\in Q$. Erre legalább két út kinálkozik. Megpróbálhatjuk kiterjeszteni a fenti algoritmust a költséges esetre annak analógiájára, ahogy a Ford-Fulkerson minimális költségű folyamot kereső algoritmus a Ford-Fulkerson féle maximális folyam algoritmust finomitja. Ennek részletei [Frank 1984a]-ben lettek kidolgozva. Az itt következő eljárás [Cunningham-Frank 1985] nem finomitja, hanem szubrutinként felhasználja a 4.3. szakasz algoritmusát.

Először is figyeljük meg, hogy a megengedettségi eljárás változtatás nélkül felhasználható olyan $z\in Q$ vektor megkereséséhez, amely rögzitett $j=ts$ élen maximalizálja $z(j)$-t. A 3.2.3 megengedettségi tételből kiolvasható [Frank 1984b]:

4.4.1 TÉTEL *$\max(z(j):\ z\in Q)=\min(b(B)-\rho_f(B)+\delta_g(B):\ B\ s\bar{t}\text{-halmaz})$. Specialisan, a maximum akkor és csak akkor véges, ha nincsen út s-ből t-be abban a segédgráfban, melynek uv, definició szerint, akkor éle, ha vagy $f(uv)=\infty$ vagy $g(vu)=-\infty$ vagy $b(B)=\infty$ minden $u\bar{v}$-halmazra.*∎

A tételbeli max és min meghatározásához egy olyan szubrutinra volt szükség, amely adott $x\in Q$, és $u,v\in V$ esetén

(A) kiszámitja az $\varepsilon_x(u,v):=\min(b(X)-\lambda_x(X):\ X\ u\bar{v}\text{-halmaz})$ étéket.

Emlékeztetünk a 3.2.6 következményben ismertetett optimalitási kritériumokra.

(a) Minden $e=uv\in E$ élre $\bar{d}(e)<0 \Rightarrow z(e)=f(e)$ $(>-\infty)$,

(b) Minden $e=uv\in E$ élre $\bar{d}(e)>0 \Rightarrow z(e)=g(e)$ $(<\infty)$,

(c) $u,v\in V$ pontokra $\pi(u)>\pi(v) \Rightarrow \varepsilon_z(u,v)=0$, ahol $\bar{d}(e) := d(uv) + \pi(u) - \pi(v)$.

A (c) feltétel, mint már emlitettük, azzal ekvivalens, hogy $\lambda_z(B_i)=b(B_i)$, minden $B_i := \{v \in V: \pi(v) \geq \pi_i\}$ szinthalmazra, ahol $\pi_o < \pi_1 < \ldots < \pi_k$ a π különböző értékei. Ez pedig épp azt jelenti, hogy x rajta van Q-nak az $x(B_i)=b(B_i)$ $(i=0,1,\ldots,k)$ egyenletek által meghatározott oldalán. A 2.3.13 tételből adódóan ez az oldal a $Q_\pi = Q(f,g;b_\pi)$ szubmoduláris folyam poliéder, ahol $b_\pi(X) := \hat{b}(\pi + \chi_{-X}) - \hat{b}(\pi)$.

Az eljárás elővizsgálattal kezdődik annak megállapitására, hogy a feladat primál és duál megengedett-e. Először a 4.3 szakasz (primál) megengedettségi algoritmusával meghatározunk Q-nak egy x elemét. Akkor megyünk tovább, ha Q nemüres. Utána a 3.2.2 tételt használva eldöntjük, hogy létezik-e duális megoldás. Ehhez azt kell megállapitani, hogy az ott leirt H segédgráfban van-e C pozitiv összköltségű kör. Ha van, akkor nincs duális megoldás és $\max(dx: x \in Q) = \infty$; az x kiindulási megoldás valamint C segitségével megadhatunk Q-beli elemek egy végtelen sorozatát, amelynek d-költsége a ∞-be tart. Ha tehát ilyen C kör létezik, az eljárás véget ér. Tegyük fel, nem ez a helyzet.

Az algoritmus általános lépésének leirásához, tegyük fel, hogy adott egy $x \in Q$ elem és egy π potenciál, melyek kielégitik (c)-t. Kezdetben $\pi \equiv 0$ jó lesz. Ha (a) és (b) is teljesül, készen vagyunk. Tegyük fel, hogy valamely $j = ts \in E$ él megsérti mondjuk (b)-t. Az az eset, amikor (a) sérül meg, analóg. Eljárásunk magja a ***Belső algoritmus***, amely egy új (x', π') párt talál úgy, hogy j már teljesiti (b)-t, és

(*) minden él, amely eddig teljesitette (a-b)-t, ezután is teljesiti, és végül, (c) érvényben marad.

Az eljárás a minimális költségű cirkuláció megkeresésére szolgáló primál-duál algoritmus kiterjesztésének tekinthető: váltogatva folyam és potenciál cserékből áll. Csak olyan éleken változtatja a folyamot, ahol $\bar{d}(e)=0$, valamint a j élen, és úgy, hogy az új megoldás is a Q_π oldalon legyen.

Tekintsük a következő optimizációs problémát. Jelölje Q_1 a Q_π-nek azt az oldalát, amelyre $x(e)=z(e)$ minden $e \neq j$ élre, ahol $\bar{d}(e) \neq 0$).

(Nyilván $z \in Q_1$.)

A 4.4.1 tétel alapján meg tudjuk határozni $M:=\max(x(j):\ x \in Q_1)$ értéket, feltéve, hogy a b_1-re vonatkozólag az (A) szubrutin rendelkezésünkre áll. A következő lemma ezt biztositja. Legyen $\hat{\varepsilon}_x(u,v):=\min(b_\pi(X)-\lambda_x(X):\ X\ u\bar{v}\text{-halmaz})$.

<u>4.4.2 LEMMA</u> *Bármely $x \in Q_\pi$ vektorra $\hat{\varepsilon}_x(u,v)=\varepsilon_x(u,v)$, ha $u,v \in B_i-B_{i-1}$ $(i=1,\dots,k)$, és $=0$ különben.*

BIZONYITÁS Legyen $u \in B_i-B_{i-1}$ $v \notin B_i-B_{i-1}$. Ekkor $0 \le \hat{\varepsilon}_x(u,v) \le b_\pi(B_i-B_{i-1})-\lambda_x(B_i-B_{i-1})=b(B_i)-b(B_{i-1})-\lambda_x(B_i)+\lambda_x(B_{i-1})=0$, azaz $\hat{\varepsilon}_x(u,v)=0$.

Legyen most $u,v \in B_{i+1}-B_i$. Mivel $\hat{\varepsilon}_x$ nemnegativ, a 2.3.16a következmény szerint létezik egy olyan $X \subseteq B_{i+1}-B_i$ $u\bar{v}$-halmaz, amelyre $\hat{\varepsilon}_x(u,v)=b(X \cup B_i)-b(B_i)-\lambda_x(X \cup B_i)-\lambda_x(B_i) \ge \varepsilon_x(u,v)$. Az egyenlőség következik, ha megmutatjuk, hogy $\varepsilon_x(u,v)$ definiciójában a minimum olyan T halmazon is felvétetik, amelyre $B_{i+1} \subseteq T \subseteq B_i$. Használjuk a $\gamma(X):=b(X)-\lambda_x(X)$ jelölést. Legyen $\varepsilon_x(u,v)=\gamma(X)$ valamilyen X $u\bar{v}$-halmazra. Ekkor $\varepsilon_x(u,v)=\gamma(X) \ge \gamma(X \cup B_{i+1})-\gamma(X \cap B_{i+1})-\gamma(B_{i+1}) \ge 0+\varepsilon_x(u,v)+0$, vagyis $\varepsilon_x(u,v)=\gamma(X \cap B_{i+1})$. Teljesen analóg módon látható az is, hogy $T=(X \cap B_{i+1}) \cup B_i$ olyan, hogy $\varepsilon_x(u,v)=\gamma(T)$, amivel a lemma bizonyitását befejeztük.∎

A lemma azt mutatja, hogy M kiszámitásához nincs explicit szükségünk az $\hat{\varepsilon}_x$ függvényt kiszámitó orákulumra, és a G_x segédgráf ε_x segitségével felirható. Nevezetesen:

uv előre él, ha $x(uv)<g(uv)$ és $\bar{d}(uv)=0$ $(uv \in E)$. Legyen $c(uv):=g(uv)-x(uv)$,

vu hátra él, ha $x(uv) \ge f(uv)$ és $\bar{d}(uv)=0$ $(uv \in E)$. Legyen $c(uv):=x(uv)-f(uv)$,

uv ugró él, ha $\varepsilon_x(u,v)>0$ és $\pi(u)=\pi(v)$. Legyen $c(uv):=\varepsilon_x(u,v)$.

Figyeljük meg, hogy ha $g(j)=\infty$, úgy M nem lehet ∞, mert akkor a 4.4.1 tételben szereplő út és a j él éppen olyan C kört alkotna, amely a 3.2.2 tételben szerepel. Vagyis a duális problémának nem volna megoldása. Az elővizsgálat során azonban ezt a lehetőséget már kizártuk. Legyen $x'\in Q_1$ az a 4.3 algoritmussal kiszámitott szubmoduláris folyam, amelyre $dx'=M$. Két eset lehetséges.

1.ESET $M=g(j)$. Ekkor tehát M véges, és az x' a változatlan π potenciállal teljesiti (*)-ot.

2. ESET $M<g(j)$. Jelölje T a $G_{x'}$-ben az s-ből elérhető pontok halmazát. Ekkor T-ből a segédgráfban nem lép ki él, azaz:

(a1) minden $e\in\delta(T)$ élre $x'(e)=g(e)$ vagy $\bar{d}(e)\neq 0$,

(b1) minden $e\in\varrho(T)$ élre $x'(e)=f(e)$ vagy $\bar{d}(e)\neq 0e$,

(c1) minden $u\in T$, $v\notin T$ pontpárra $\varepsilon_{x'}(u,v)=0$.

Legyen $\pi'(v):=\pi(v)$, ha $v\in T$ és $\pi'(v):=\pi(v)-\delta$, ha $v\in T$, ahol $\delta=\min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$ és

$\delta_1:=\min(\bar{d}(e)\colon e\in\varrho(T),\ x'(e)>f(e),\ \bar{d}(e)>0)$,
$\delta_2:=\min(-\bar{d}(e)\colon e\in\delta(T),\ x'(e)<g(e),\ \bar{d}(e)<0)$,
$\delta_3:=\min(\pi(v)-\pi(u)\colon u\in T,\ v\notin T,\ \pi(v)>\pi(u),\ \varepsilon_{x'}(u,v)>0)$,
$\delta_4:=\bar{d}(j)$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az optimalitási kritériumok közül (c) továbbra is fennáll, és nem keletkezik új él, amely megsérti (a) vagy (b)-t. Iteráljuk most a fenti eljárást. A fenti definiciókból következik, hogy $\delta>0$ és hogy vagy $\delta=\delta_4$, vagypedig a következő iteráció során az aktuális segédgráfban az elérhető pontok halmaza szigorúan bővebb mint T. Tehát legfeljebb $n-1$ iteráció után vagy az 1. eset következik be, vagy $\delta=\delta_4$, ami azt jelenti, hogy a j él már nem sérti meg a (b) feltételt.

A Belső algoritmus tehát felváltva folyam és potenciál cserékből áll. A folyam számolás $O(n^3)$ folym növelést igényel, a potenciál számolás $O(n)$ idejű. A váltások száma azonban már közönséges folyam esetében is lehet exponenciális. Egyszerű meggondolással (lásd [Cunningham-Frank] legalább az kimutatható, hogy a váltások száma véges, a bemenő adatoktól függetlenül, és ez egy újabb, konstruktiv bizonyitást jelent a 3.1.1 tételre. Itt megjegyezzük, hogy az algoritmus által szolgáltatott végső π potenciál súlyozott lánca lesz a 3.1.1 tételben lévő duális lineáris program optimális megoldása.

Most megmutatjuk, hogy ha a d költségfüggvény egész értékű, akkor az Edmonds és Karp által kifejlesztett skálázási technika segitségével a fenti eljárás polinomiálissá tehető (amelynek lépés száma f és g nagyságától nem is függ).

Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden $e=uv$ élre $f(e)>-\infty$. Ha nem ez a helyzet, akkor $g(e)\neq\infty$ esetén e-t helyettesitjük $e'=vu$-val, amelyre $f(e'):=-g(e)$, $g(e'):=\infty$ és $d(e'):=-d(e)$; $g(e)=\infty$ esetén pedig az e élt helyettesitjük az $e_1:=uv$ és $e_2:=vu$ élekkel, melyekre $f(e_1):=f(e_2):=0$, $g(e_1):=g(e_2):=\infty$, $d(e_1):=d(e)$ és $d(e_2):=-d(e)$.

Tegyük fel tehát, hogy d egészértékű és adott egy x szubmoduláris folyam valamint a π potenciál, melyek kielégitik (c)-t, de a $j\in E$ él megsérti mondjuk (b)-t. Ha most történetesen $\bar{d}(j)=1$, akkor a Belső algoritmus az első potenciál csere után véget ér, mivel a δ értéke ilyen cserénél 1 lesz.

Következésképp, ha adott x szubmoduláris folyam és π potenciál, melyek a d költség fügvényre vonatkozóan kielégitik mindhárom optimalitási kritériumot, továbba d' költsg függvény a d-től egyetlen komponensében tér el éspedig eggyel, akkor legfeljebb $O(n^3)$ folyam növelés után megkapunk egy x' folyamot és egy π' potenciált, melyek kielégitik (a-b-c)-t a d'-re vonatkozólag.

További megfigyelésünk, hogy ha (x,π) kielégiti (a-b-c)-t d-re nézve, akkor, $(x,2\pi)$ is kielégiti (a-b-c)-t $2d$-re nézve. Mármost ezen két művelet segitségével a d-t könnyen elérhetjük az azonosan 0 vektorból kiindulva. Tegyük fel, hogy d komponensei kettes számrendszerben vannak felirva és hogy a legnagyobb $|d(e)|$ K jegyű. Legyen $d^0=d$ és legyen $d^i(e):=\lfloor d^{i-1}(e)/2\rfloor$ $(i=1,\dots,K)$.

Igy $d^K(e)=-1$, ha $d(e)<=$ és $=0$, ha $d(e)>0$. Igaz továbbá, hogy minden i-re d^i a $2d^{i+1}$-től minden komponensében legfeljebb eggyel tér el.

SKÁLÁZÁSI ALGORITMUS

1.lépés. Ellenőrizzük a primál és duál megengedettséget.

2.lépés. Legyen x kezdeti megoldás, $\pi:\equiv 0$, $i:=K$, $d:\equiv 0$

3.lépés. Amig van $j\in E$ él, amelyre $d(j)\neq d^i(j)$, helyettesitsük $d(j)$-t $d^i(j)$-vel. Ha (x,π) megsérti (a) vagy (b)-t, alkalmazzuk a Belső algoritmust.

4.lépés. Ha $i=0$, STOP, különben csökkentsük eggyel i-t és helyettesitsük π-t és d-t a kétszeresükkel. Menjünk a 3. lépésre.

A skálázási algoritmus láthatóan $K*O(mn^3)$ növelést igényel, igy az eljárás össz lépésszáma $hK*O(mn^5)$, ahol h jelöli az (A) orákulum bonyolultságát, $n=|V|$, $m=|E|$.

A fenti eljárás helyességének igazolásához egyetlen veszélyt kell kiküszöbölnünk. Éspedig, mi történik, ha a kiindulási probléma ugyan duálisan megengedett (azaz max dx véges), de egy közbenső d^i költségre nézve már nem az. Kimutatjuk, hogy ez nem fordulhat elő. Mivel feltettük, hogy f mindenütt véges, a 3.2.2 tételben lévő H segédgráf nem tartalmazhat hátra élt. Igy H-ban egy C kör d'-költsége ugyanaz, mint a d-költsége. A feltevés szerint max $d^o x$ véges, azaz H-ban nincs pozitiv d^o-költségű kör. Miután $2d^i\leq d^{i-1}$ $(i=1,2,\ldots,K)$, H-ban nem lehet pozitiv d^i-kötségű kör sem, és igy max $d^i x$ véges.

A 4.3 fejezet végén bizonyitottak szerint a fent leirt eljárás szószerint alkalmazható akkor is, ha a Q poliéder az általános $Q=Q(f,g;b'')$ alakban van adva, ahol b'' keresztezőn szubmoduláris. Többlet munka csupán az optimális duális megoldás megkonstruálásában van. Tegyük fel, az algoritmus az (x,π) párral fejeződik be. Tekintsük a π potenciál súlyozott láncát. Legyen $z:=\lambda_x$. A súlyozott láncnak egy tetszőleges X tagjára $z(X)=b(X)$, igy a 4.2 szakasz végén leirt eljárással megkeressük azokat az X_{ij} halmazokat, melyekre $b(X)=\Sigma b''(X_{ij})$. Ezen halmazok együtthatóját ugyanannak definiálva, mint az X együtthatója volt a súlyozott, láncban megkapjuk a b''-re vonatkozó opzimális duális megoldást.

Az ezen szakaszra kitűzött célunkat elértük: leirtunk egy polinomiális eljárást maximális költségű szubmoduláris folyam illetve a hozzátartozó duális lineáris program optimumának megtalálására. Az eljárás, amely a klasszikus minimális költségű cirkuláció algoritmusának kiterjesztése, tisztán kombinatorikus lépésekből áll, és ezen kívül használja az (A) orákulumot. Az algoritmus ugyan polinomiális futásidejű, de a skálázási algoritmusok természeténél fogva nem erősen polinomiális.

A [Frank-Tardos 1987] dolgozatban kifejlesztettünk egy eljárást, amely alkalmas arra, hogy, többek között, a fenti polinomiális algoritmust is erősen polinomiálissá alakitsa.

5. ALKALMAZÁSOK

Ennek a fejezetnek az a célja, hogy áttekintsük a g-polimatroidok és a szubmoduláris folyamok néhány alkalmazási lehetőségét. Anyagát a [Frank 1984a, 1984b, 1980, 1981a] és a [Frank-Tardos 1986, 1988] dolgozatokból vettük.

5.1 VEGYES ALKALMAZÁSOK

A. PÁROSITHATÓ RÉSZHALMAZOK

Balas és Pulleyblank [1983] leirta a $G=(A,B;E)$ páros gráfokban azon ponthalmazok Q konvex burkát, melyek egy párositás végpontjaiból állnak. Legyen $Q_1:=\{x\in R^{A\cup B}: 0\leq x\leq 1,\ x(A)=x(B)$ és $x(X)\leq x(\Gamma(X))$ minden $X\subseteq A$-ra$\}$.

5.1.1 TÉTEL [Balas és Pulleyblank] $Q=Q_1$.

BIZONYITÁS. Miután nyilvánvalóan $Q\subseteq Q_1$, igy elegendő azt kimutatni, hogy a Q_1 csúcsai egészek. Valóban, Q_1 egy x egész csúcsa 0-1 értékű és a Hall tétel szerint az $X:=\{v\in A\cup B: x(v)=1\}$ halmaz teljesen párositható. Tükrözzük Q_1-et R^B-re , azaz legyen $Q_2:=\{(x_A,x_B): x_A\in R^A,\ x_B\in R^B$ és $(x_A,-x_B)\in Q_1\}$. Azt mutatjuk meg, hogy Q_2 egész g-polimatroid.

Tekintsük G-t irányitott gráfként, melynek élei A-ból B-be mennek. Legyen $\mathcal{F}:=\{X\subseteq A\cup B$, X-ből nem lép ki él$\}$ Ekkor $\mathcal{F}$ metszet-unió zárt és $Q_3:=\{x\in R^{A\cup B},\ x(A\cup B)=0,\ x(X)\leq 0$ minden $X\in\mathcal{F}$-re$\}$ egy egész g-polimatroid. Most Q_2 a Q_3 és az $\{x: 0\geq x\geq 1\}$ téglának a metszete, igy 2.3.4 alapján egész g-polimatroid∎.

B. ELRENDEZÉSI POLIÉDER

Legyen $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ n szám. Egy *m-elrendezési* ("m-arrangement") vektoron egy olyam m dimenziós vektort értünk ($m \leq n$) melynek komponensei az a_i-k különböző elemei.

5.1.2 TÉTEL *[Yemelichev-Kovalev-Kravtsov] Az m-elrendezési vektorok Q konvex burka* $Q=Q_1 := \{x \in R^m : p(A) \leq x(A) \leq b(A)$ *minden* $A \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$*-re,* $|A| \leq m\}$*, ahol* $p(A) := a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-|A|+1}$ *és* $b(A) = a_1 + a_2 + \ldots + a_{|A|}$.∎

BIZONYITÁS. Nyilván $Q \subseteq Q_1$. Az ellenkező irányú tartalmazáshoz azt látjuk be, hogy Q_1 csúcsai mind m-elrendezés vektorok. Ez viszont a g-polimatroidokra vonatkozó mohó algoritmusból látható, hiszen a fent definiált (p,b) erős párt alkot, igy Q_1 g-polimatroid.∎

Megjegyzendő, hogy ez a meggondolás az m=n speciális esetben Edmonds és Gilestól való.

C. ALTERNÁLÓ VEKTOROK

Legyen G=(V,E) irányitatlan gráf. Az $x:E \rightarrow Z$ $(0,\pm 1)$vektort *alternáló* vektornak hivjuk, ha minden v csúcsból vezet ki e él, melyre $x(e)=-1$, és $\{e: x(e) \geq 0\}$ olyan erdőt képez, melynek minden komponensében egyetlen pozitiv él van.

5.1.3 TÉTEL [Gröflin-Liebling] *Az alternáló vektorok Q konvex burkát az* $\{x \in R^E : x(A) \leq |V(A)| - |A|$ *minden* $A \subseteq E$*-re\} rendszer irja le, ahol V(A) jelöli az A élhalmaz végpontjainak halmazát.*∎

Nem bizonyitjuk itt ezt a tételt, csak annyit jegyzünk meg, hogy a szóbanforgó Q poliéder g-polimatroid. Ezért a fenti poliéderre Gröflin és Liebling által bizonyitott metszettétel a g-polimatroidokra vonatkozó metszettétel speciális esete.

D. SZOMSZÉDOS KÖZÖS BÁZISOK

Új eredményként megemlitünk egy alkalmazást, amelynek (nem egészen könnyű) részletes bizonyitása a [Frank-Tardos 1986] dolgozatban szerepel. Legyen M_1 és M_2 két k rangú matroid a közös S alaphalmazon, és tegyük fel létezik közös bázisuk. Jelölje a közös bázisok konvex burkát Q. Edmonds nyomán tudjuk, hogy $Q=\{x\in R^S: x(A)\leq \min(r_1(A),r_2(A))$ minden $A\subseteq S$-re és $x(A)=k\}$. Adott B_1 és B_2 közös bázisokat akkor nevezünk *szomszédosnak*, ha karakterisztikus vektoraik szomszédos csúcsai Q-nak. Kérdés, hogy B_1 és B_2 mikor szomszédos.

Legyen $D_i:=B_i-B_{3-i}$ $(i=1,2)$. Készitsünk $D_1\cup D_2$-n két páros gráfot a következőképpen. $x\in D_1$ és $y\in D_2$-re legyen xy él G_1-ben, ha $x\in C_1(B_1;y)$ és legyen yx él G_2-ben, ha $y\in C_2(B_2;x)$, ahol $C_i(B;z)$ jelenti az M_i matroid egy B bázisára nézve a B+z ben lévő egyértelmű kört. Ismeretes, hogy G_i tartalmaz teljes párositást.

5.1.4 TÉTEL *Két közös bázis B_1 és B_2 akkor és csak akkor szomszédos, ha mind G_1 mind G_2 egyetlen teljes párositást tartalmaz, melyek uniója egy kört alkot.*∎

E. POLIMATROIDOS HÁLÓZATI FOLYAMOK

Az alábbi modell Lawler és Martel illetve Hassintól való. Adott $H=(V,E)$ irányitott gráf s forrással és t nyelővel. Minden v csúcsra adott a bemenő élek A_v halmazán és a kimenő élek B_v halmazán egy $P(\alpha_v)$ ill. $P(\beta_v)$ polimatroid, ahol α_v és β_v polimatroid függvények. *Polimatroidos folyamon* olyan s-ből t-be menő folyamot értünk, melynek megszoritása A_v-re illetve B_v-re eleme P_v ill. Q_v-nek $(v\in V)$. Nyilvánvaló, hogy kapacitás feltételeknek eleget tevő közönséges folyam megfogalmazható polimatroidos hálózati folyamként. Analóg módon definiálható a *polimatroidos cirkuláció* fogalma. A két alapkérdés ugyanaz, mint a hálózati folyamok esetén: keressünk maximális értékű független folyamot illetve keressünk minimális költségű független cirkulációt. Ezek közül az első problémát Lawler és Martel megoldották. Mi azt az utat választjuk, hogy egy elemi konstrukció segitségével megmutatjuk, hogy a polimatroidos folyamok (sőt, egy általánositásuk is) szubmoduláris folyamok, és igy az emezekre a 4.3 és 4.4-ben kidolgozott algoritmusok alkalmazhatók.

5.1.5 TÉTEL *A polimatroidos folyamok szubmoduláris folyam poliédert alkotnak.*

BIZONYITÁS. Helyettesitsük H minden v csúcsát annyi új csúccsal, ahány és v-vel szomszédos. Jelölje $\varphi^-(v)$ $[\varphi^+(v)]$ az A_v $[B_v]$ elemeinek megfelelő új példányokat, és legyen $\varphi(v):=\varphi^-(v)\cup\varphi^+(v)$. Nem teszünk különbséget A_v egy részhalmaza és az ennek megfelelő $\varphi^-(v)$-beli részhalmaz között.

Ily módon nyertünk $2|A|$ elemet, melyek halmazát jelölje V. H élei V-nek egy 2 elemű részhalmazokra történő parrtícióját határozzák meg. Jelölje e_u és e_v a V-nek azon két elemét, melyek az $e=uv\in A$ élnek felelnek meg. U egy X részhalmazára legyen $\varphi(X):=\cup(\varphi(v)$: $v\in X\}$.

Definiáljuk V részhalmazain b" halmazfüggvényt úgy, hogy $b(F):=0$, ha $F=\varphi(X)$ valamely $X\subseteq U$-re, $b''(F):=\alpha_u(F)$, ha $F\subseteq\varphi^-(u)$, $b''(F):=\beta_v(V-F)$, ha $V-F\subseteq\varphi^+(v)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy b" keresztezőn szubmoduláris és a Q(G:b") szubmoduláris folyam poliéder elemei éppen a polimatroidos cirkulációk.∎

Ugyanez a konstrukció működik, ha a pontokba be- illetve kimenő élek halmazára g-polimatroidokat teszünk.

F. MAGRANDSZEREK

Legyen $H=(U,A)$ irányitott gráf és p' a csúcsain értelmezett metsző szupermoduláris függvény. Ezenkivül minden v csúcsra a bemenő élek A_v halmazán adott egy $P_v=P(b_v)$ polimatroid.

5.1.6 TÉTEL *Az* $Q:=\{x\in R^A$: $\varrho_x(X)\geq p'(X)$ *minden* $X\subseteq U$, $x|A_v\in P_v\}$ *poliéder szubmoduláris folyam poliéder és a definiáló rendszer TDI.*

A tétel második fele [Frank 1979]-ben volt bizonyitva arra a speciális esetre, amikor nincs külön kikötés a pontokba belébő A_v halmazokra.

BIZONYITÁS. Definiáljuk a $G=(V,E)$ irányitott gráfot ugyanúgy, mint az előbb. Definiáljuk a b" halmazfüggvényt úgy, hogy $b''(F):=b_u(F)$, ha $F \subseteq \bar{\delta}(u)$ valamely $u \in U$-ra, és $b''(V-F):=-p(Z)$ ha létezik $Z \subseteq U$ és $X \subseteq A(Z)$, melyekre $F = \bar{\delta}(Z) \cup \{e_v : e=uv \in X\}$. Ellenőrizhető, hogy b" keresztezőn szubmoduláris és a Q(G;b") szubmoduláris folyam poliéder éppen a tételben szereplő Q.∎

G. RESZELÉS

A 4.1 szakaszban ismertetett reszelési eljárásnak már láttunk alkalmazását a szubmoduláris folyamokra vonatkozó algoritmusoknál. Itt most egy továbbit említünk.

Legyen b teljesen szubmoduláris függvény és k pozitiv szám. Definiáljuk a b' függvényt úgy, hogy $b'(X) := b(X)-c$, ha X nemüres, és $b'(\emptyset):=0$. Ekkor b' metszőn szubmoduláris. Tegyük fel rendelkezésünkre áll egy (*) orákulum, amely adott m moduláris függvény esetén megadja a $b(X)-m(X)$ minimumának helyét.

Ekkor a reszelési eljárás segitségével van olyan kombinatorikus eljárásunk, amely meghatározza az S alaphalmaznak azt az $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ particióját, amelyre $\sum b'(X_i)$ minimális.

Például Lovász.L és Y.Yemini [1982] cikkükben bebizonyitanak egy minimax tételt, amelyben a $\min(\sum(2|V(E_i)|-3): i=1,\ldots,k)$ kifejezés szerepel, ahol $G=(V,E)$ irányitatlan gráf és a maximum az élek összes $\{E_1,\ldots,E_k\}$ particiójára megy. Könnyen kimutatható, hogy ebben az esetben a szükséges (*) orákulum a max-folyam min-vágás (MFMC) algoritmus segitségével valóban rendelkezésünkre áll (lásd [Frank-Tardos 1986]).)

Egy másik példa Imai [1985] cikkében szerepel. Adott egy $G=(A,B;E)$ páros gráf és egy c pozitiv egész. Imai arra ad eljárást, hogy miként lehet minimalizálni a $\sum(|\Gamma(X_i)|-c)$ összeget az A összes $\{X_i\}$ particiója fölött. Nyilván a $|\Gamma(X)|$ függvény teljesen szubmoduáris és a szükséges (*) orákulum ismét egy MFMC számitással állitható elő.

Harmadik példaként hadd emlitsük meg Tutte tételét, mely szerint egy $G=(V,E)$ gráfnak akkor és csak akkor létezik t élidegen feszitő fája, ha V tetszőleges $\{V_1,\ldots,V_k\}$ particiójára a részek között menő élek száma legalább $t*(k-1)$. Most azt mutatjuk meg, hogy ez a feltétel miként ellenőrizhető algoritmikusan a fenti meggondolás alapján. A feltétel azzal ekvivalens, hogy $\sum(d(V_i)-2t) \geq -2t$ fennáll V minden $\{V_i\}$ particiójára. Ezt viszont tudjuk ellenőrizni, mert a fenti meggondolás alapján a baloldalt tudjuk minimalizálni. A szükséges orákulum ismét csak az MFMC algoritmus segitségével adható meg.

Az 5.3 szakaszban még további alkalmazásokat fogunk látni.

5.2 TÁMASZTÓ HALMAZOK

A megelőző két modell után itt kifejlesztünk egy újabbat, melynek érdekes alkalmazásai vannak, és amely szintén a szubmoduláris folyamok elméletére vezethető vissza. A szakasz anyaga a [Frank-Tardos 1988] dolgozatból való. Legyen $G=(A,B;E)$ páros gráf, ahol E jelöli az élhalmazt. Az $F\subseteq E$, $X\subseteq A$ halmazokra a $\Gamma_F(X):=\{v\in B,\ uv\in F$ valamilyen $u\in X$-re$\}$ jelölést használjuk, $d_F(X)$ az X-szel szomszédos élek számát jelöli. Γ_E és d_E röviditve Γ és d. Először a szemléletesebb következményekkel kezdjük.

5.2.1 TÉTEL *Legyen $G=(A,B;E)$ páros gráf és $p': 2^A\to Z\cup\{-\infty\}$ metszőn szupermoduláris függvény. Legyen továbbá r egy B-n értelmezett matroid rangfüggvénye és $g:A\to Z_+\cup\{\infty\}$ tetszőleges függvény. Akkor és csak akkor létezik az éleknek olyan $F\subseteq E$ részhalmaza, melyre $d_F(v)\le g(v)$ minden $v\in A$-ra és $r(\Gamma_F(X))\ge p'(X)$ minden $X\subseteq A$-ra ha*

$$(5.2.1)\qquad p'(Y)\le r(\Gamma_E(X))+g(Y-X)$$

fennáll, amikor $X\subseteq Y\subseteq A$.

Ebből a tételből $g\equiv 1$ és $p'(X):=|X|$ helyettesitéssel rögtön adódik Rado hires tétele:

KÖVETKEZMÉNY [R.Rado] *Legyen $G=(A,B;E)$ páros gráf, M matroid B-n, r rangfüggvénnyel. Akkor és csak akkor létezik éleknek olyan $F\subseteq E$ részhalmaza, melyre $d_F(v)=1$ minden $v\in A$-ra és $r(\Gamma_F(Y))\ge|Y|$ minden $Y\subseteq A$, ha $r(\Gamma_E(Y))\ge|Y|$ minden $Y\subseteq A$.*∎

Ha $g(v):\equiv p'(v)$ és M a szabad matroid, Lovász egy korai eredményét kapjuk:

KÖVETKEZMÉNY [L.Lovász 1970] *Legyen $G=(A,B;E)$ páros gráf és $p': 2^A\to Z\cup\{-\infty\}$ metszőn szupermoduláris függvény, melyre $p'(v)\ge 0$, ha $v\in A$ és $p'(X)+p'(Y)\ge p'(X\cup Y)$ ha $X,Y\subseteq A$, $X\cap Y=\emptyset$. Akkor és csak akkor létezik* *éleknek egy olyan $F\subseteq E$ részhalmaza, melyre $d_F(v)=p'(v)$ minden $v\in A$-ra és $|\Gamma_F(X)|\geq p'(X)$ minden $X\subseteq A$-ra, ha $|\Gamma_E(X)|\geq p'(X)$ minden $X\subseteq A$-ra.*∎

Az 5.2.1 tételt általánosabban fogjuk bebizonyitani. Legyen p': $2^S \to R\cup\{-\infty\}$ metszőn szupermoduláris függvény és r egy S-en értelmezett M matroid rangfüggvénye úgy, hogy

$$(5.2.2) \qquad p'(\emptyset)=0,\ p\leq r,\ p'(s)\geq 0 \text{ minden } s\in S\text{-re.}$$

Nevezzünk egy $T\subseteq S$ részhalmazt *támasztó halmaznak,* ha

$$(5.2.3) \qquad r(T\cap X)\geq p'(X) \text{ minden } X\subseteq S\text{-re.}$$

A feltevés szerint S támasztó és támasztó halmaz felhalmaza is az. Mennyi egy támasztó halmaz minimális elemszáma, vagy általánosabban a minimális költsége, ha S-en adott egy nemnegativ c költség függvény.

5.2.2 TÉTEL *Támasztó halmaz minimális $c(T)$ költsége egyenlő*

$$(5.2.4) \qquad \max(\sum w(A)h(A):\ \sum(w(A)\chi(A):\ A\subseteq S)\leq c,\ w\geq 0),$$

ahol $w:2^S\to R_+$ és $h(A):=\max(p'(Y)-r(Y-A):\ Y\supseteq A)$. Ha c egészértékű, úgy w is választható annak.

E tétel rögtön implikálja Gröflin és Hoffman egy tételét [1981]. Legyen r_1 és r_2 két matroid rangfüggvénye ugyanazon az S alaphalmazon és tegyük fel, hogy $r_1(S)=r_2(S)=r_{12}(S)=k$ ahol $r_{12}(B)$ a B-ben lévő legnagyobb közös független részhalmaz elemszámát jelöli. $(B\subseteq S)$. Edmonds matroid metszet tétele szerint (*) $r_{12}(B)=\min_{Z\subseteq B}(r_1(Z)+r_2(B-Z))$.

KÖVETKEZMÉNY [H.Gröflin és A.Hoffman] *Közös bázis minimális költsége egyenlő*

$$\max(\sum w(A) r_{12}(S-A):\ \sum (w(A)\chi(A)\ : A\subseteq S)\leq c,\ w\geq 0)$$

ahol $w: 2^S \to R_+$. Ha c egészértékű, úgy w is választható annak.

BIZONYITÁS. Alkalmazzuk az 5.2.2 tételt az $r:=r_1$, $p'(X):=k-r_2(S-X)$ választással és figyeljük meg, hogy $h(X)=r_{12}(S-X)$.∎

Az 5.2.2 tételnek megvan az a hátránya, hogy magában foglal egy bizonyos h függvényt. Ha c 0-1 értékű, akkor a tétel erősebb alakban is megfogalmazható, amelyben h már nem szerepel, bár a formula bonyolultabbá válik. Tegyük fel, hogy $N\subseteq S$ és $c(v)=0$, ha $v\in N$ és $c(v)=1$, ha $v\notin N$.

5.2.3 TÉTEL *Legyen p' és r ugyanaz, mint előbb és legyen c 0-1 értékű. Támasztó halmaz minimális c(T) költsége egyenlő*

$$(5.2.5)\qquad \max_{\mathcal{F}} \sum_{Y\in\mathcal{F}} [p'(Y) - r((N\cap Y)\cup \cup(Z:\ Z\in\mathcal{F},\ Z\subset Y))],$$

ahol a maximumot S különböző részhalmazaiból álló $\mathcal{F}$ lamináris családokon vesszük.

Ha N üres, nyerjük az alábbit:

5.2.4 KÖVETKEZMÉNY *Támasztó halmaz minimális elemszáma egyenlő*

$$(5.2.6)\qquad \max_{\mathcal{F}} \sum_{Y\in\mathcal{F}} [p'(Y) - r(\cup Z:\ Z\in\mathcal{F},\ Z\subset Y)],$$

ahol a maximumot S különböző részhalmazaiból álló $\mathcal{F}$ lamináris családokon vesszük.

AZ 5.2.2 ÉS 5.2.3 TÉTELEK KÖZÖS BIZONYITÁSA. Legyen T támasztó halmaz. Ekkor S-nek tetszőleges két $X\subseteq Y$ részhalmazára fennáll, hogy $|T\cap X|+r(Y-X)\geq r(T\cap Y)\geq p'(Y)$. Így

$$(2.5.7) \qquad |T\cap X|\geq p'(Y)-r(Y-X)$$

és ezért $|T\cap X|\geq h(X)$. Innen $c(T)\geq\Sigma_{t\in T}\Sigma(w(A):t\in A)=\Sigma_{A\subseteq S}|T\cap A|w(A)\geq \Sigma_{A\subseteq S}h(A)w(A)$ és max$\leq$min következik az 5.2.2 tételben.

A max $\leq$ min irány hasonlóan látszik az 5.2.3 tételben is. Valóban legyen T támasztó halmaz és legyen $T'=T-N$. S bármely $X\subseteq Y$ két részhalmazára fennáll $|T'\cap X|+ r((N\cap Y)\cup(Y-X))\geq r(T\cap Y)\geq p'(Y)$ és $|T'\cap X|\geq p'(Y)- r((N\cap Y)\cup(Y-X))$, ahonnan max$\leq$min az 5.2.3 tételben következik.

Az egyenlőség bizonyitására tekintsük az olyan $x\in R^S$ vektorokból álló Q poliédert, melyekre

$$(2.5.8) \qquad x(X)\geq p'(Y)-r(Y-X) \text{ minden } X\subseteq Y\ (\subseteq S).$$

<u>1.ÁLLITÁS</u> ***Q 0-1 vektorai pontosan a támasztó halmazok incidencia vektorai.***

BIZONYITÁS. (2.5.5) alapján nyilván $\chi_T\in Q$ minden T támasztó halmazra. Megforditva, legyen $x=\chi_T$ Q-nak egy eleme valamilyen $T\subseteq S$-re és legyen $X\subseteq S$. Alkalmazzuk (2.5.6)-t $X-T$ helyére X-t és X helyére Y-t helyettesitve. Azt kapjuk, hogy $x(X-T)\geq p'(X)-r(X\cap T)$. Mivel $x(X-T)=0$ és (5.2.3) fennáll, az állitás következik.∎

<u>2. ÁLLITÁS 2.</u> ***A (2.5.8) lineáris rendszer szubmoduláris folyam rendszer.***

BIZONYITÁS. Legyen S' és S'' két diszjunkt példánya S-nek és legyen $V= S'\cup S''$. $X\subseteq S$-re X' és X'' jelöli a megfelelő részhalmazait S' és S''-nek. Legyen $E:= \{s''s': s\in S\}$. E és S elemei között 1-1 értelmű megfeleltetés van, és azonositjuk R^S és R^E-t. Az $X,Y\subseteq S$ részhalmazokra legyen $p_1'(Y'\cup X''):= p'(Y)-r(X)$ ha $X\subseteq Y$, és $=-\infty$ egyébként. Most p_1' metszőn szupermoduláris függvény és

$$(2.5.9') \qquad \varrho_x(Z)-\delta_x(Z)\geq p_1'(Z) \text{ minden } Z\subseteq V$$

szubmoduláris folyam rendszer. Mivel $\delta(Z)=0$ amikor $p_1'(Z)$ véges, (2.5.9') irható

$$(2.5.9) \qquad \rho_x(Z)\geq p_1'(Z) \text{ minden } Z\subseteq V\text{-re}$$

alakban, ami viszont (2.5.8)-cal ekvivalens.∎

Jelölje $\mathcal{F}$ a $\{Z\subseteq V:\ p_1'(Z) \text{ véges}\}$ halmaz családot. Legyen $c:E\to Z_+$ nem-negativ egész-értékű költség-függvény. Tekintsük az alábbi duális lineáris programokat:

$$(2.5.10) \qquad \min(cx:\ x\geq 0,\ \rho_x(Z)\geq p_1'(Z) \text{ for } Z\in\mathcal{F})$$

$$(2.5.11) \qquad \max\Big(\sum_{Z\in\mathcal{F}} p_1'(Z)z(Z):\ z\geq 0,\ \sum(z(Z):\ e\in\rho(Z)) \leq c(e) \text{ minden } e\in E\text{-re}\Big),$$

ahol $z:\mathcal{F}\to R_+$.

A 3.1.1 tétel alapján létezik (2.5.10)-nek x_o egész-értékű megoldása és (2.5.11)-nek z_o egész-értékű megoldása olyan, hogy $cx_o=p_1'z_o$ és az $\mathcal{F}_1=\{Z\in\mathcal{F}:z_o(Z)>0\}$ család lamináris. Ha több mint egy ilyen x_o megoldás van, válasszuk azt, melynek a komponens összege minimális.

<u>3.ALLITAS.</u> *x_o 0-1 vektor.*

BIZONYITAS. Indirekt, legyen mondjuk $x_o(i)>1$. Mivel $c\geq 0$ és x_o optimális, $x_o(i)$-t 1-gyel csökkentve nyerünk egy olyan vektort, maely megoldása (2.5.10)-nek. Ebből következik, hogy létezik egy $Z=Y'\cup X''$ halmaz, amelyre $X\subseteq Y$, $i\in Y-X$ és $\rho_{x_o}(Z)=p_1'(Z)$. Legyen $X_1=X+i$ és $Z_1=Y'\cup X_1''$. Ekkor $p_1'(Z_1)=p'(Y)-r(X_1)\geq p'(Y)-r(X)-1=p_1'(Z)-1=\rho_{x_o}(Z)-1$ és igy $\rho_{x_o}(Z_1)=\rho_{x_o}(Z)-x_o(i)\leq \rho_{x_o}(Z)-2=p_1'(Z)-2<p_1'(Z_1)$,

ellentmondva annak, hogy x_o kielégiti (2.5.10)-et. (Itt kihasználtuk, hogy r matroid rang függvény és igy $r(X+i)\le r(X)+1$.)■

Legyen T az a halmaz, amelyre $\chi_T=x_o$. Minden $Z=Y'\cup X''\in\mathcal{F}_1$-re definiáljuk $w(A)=\sum(z_o(Z):\ Z=Y'\cup X'',\ A=Y-X)$. Ekkor $\sum(w(A)\chi(A):\ A\subseteq S)\le c$ és $\sum(w(A)h(A):\ A\subseteq S)\ge \sum_{Z\in\mathcal{F}_1} p_1'(Z)z_o(Z)=c(T)$, amelyből a 2.5.2 tétel következik.

A 2.5.3 tétel bizonyitásához feltehetjük, hogy minden s"s' él $(s\notin N)$ belép valamely $Z\in\mathcal{F}_1$ halmazba. Máskülönben legyen $Z=\{s'\}$ és növeljük z_o-t a Z-n 0-ról 1-re. Mivel $p'(s)>0$ az új z_o is optimális megoldása (2.5.11)-nek.

Legyen $Z_o=Y_o'\cup X_o''$ az $\mathcal{F}_1$ tetszőleges tagja és $Z_i=Y_i'\cup X_i''$ $(i=1,2,\dots,k)$ jelölje az $\mathcal{F}_1$ maximális halmazait, melyekre $Z_i\subset Z_o$. Minden $s\in S-N$-re az s"s' él pontosan egy $\mathcal{F}_1$-beli halmazba lép be. Ily módon $X_o=\bigcup_{i=1}^{k} Y_i\cup(Y_o\cap N)$ és $f_{x_o}(Z_o)=p_1'(Z_o)=p'(Y_o)-r(X_o)$.

Következésképp T és az $\mathcal{F}=\{Y:\ Y'\cup X''\in\mathcal{F}_1$ bizonyos $X\subseteq S$-re$\}$ kielégiti a $c(T)=|T-N|=\sum_{Y\in\mathcal{F}}[p'(Y)-r((N\cap Y)\cup\bigcup(Z:\ Z\in\mathcal{F},\ Z\subset Y))]$ egyenlőséget.
■■■

Most megmutatjuk, hogy eredményeinket hogyan lehet páros gráfokra kiterjeszteni.

Legyen $G=(A,B;E)$ izolált pont nélküli egyszerű páros gráf és $N\subset E$ az éleknek egy megadott részhalmaza. Legyen $p':2^A\to Z\cup\{-\infty\}$ metsző szupermoduláris függvény és M matroid B-n, r rangfüggvénnyel. Legyen $c:E\to R_+$ nem-negativ költség-függvény. Nevezzünk egy $R\subseteq E$ részhalmazt *támasztónak*, ha $r(\Gamma_R(X))\ge p'(X)$ minden $X\subseteq A$-ra. Azt mondjuk, hogy R *N-nel együtt támasztó*, ha $R\cup N$ támasztó. Tegyük fel, hogy E maga támasztó.

<u>5.2.5 TÉTEL</u> *A $G=(A,B;E)$ páros gráfban $R\subseteq E$ támasztó halmaz minimális $c(R)$ kötsége egyenlő $\max(\sum[w(Z)(p'(Z\cap A)-r(Z\cap B)):\ Z\subseteq A\cup B]:\ \sum[w(Z):\ u\in Z\cap A,\ v\in B-Z]\le c(uv)$ minden $uv\in E$-re, $w\ge 0)$. Továbbá, ha c egész-értékű, akkor w is választható annak.*

BIZONYITÁS. Először definiáljunk egy M_1 matroidot E-n úgy, hogy $F\subseteq E$-re legyen $r_1(F)=r(X)$ ahol $X\subseteq B$ az F-fel szomszédos élek halmaza. Másodszor, definiáljuk $p_1':2^E\to Z\cup\{-\infty\}$ úgy, hogy $p_1'(F):=p'(X)$, ha F valamely $X\subseteq A$ halmaz elemeivel szomszédos élekből áll, $:=\max(0,p'(s))$, ha $F=\{s\}$ $(s\in E)$, és $:=-\infty$ egyébként. Alkalmazva az 5.2.2 tételt p_1', r_1 és E-re, a tétel következik.■■■

Az 5.2.3 tételből teljesen analóg módon kapjuk:

<u>5.2.6 TÉTEL</u> *$G=(A,B;E)$ páros gráfban az N-nel támasztó R halmaz minimális elemszáma egyenlő $\max_{\mathcal{F}} \sum_{Y\in\mathcal{F}} [p'(Y)-r(\Gamma_N(Y)\cup\Gamma(\cup Z:\ Z\in\mathcal{F}, Z\subset Y))]$ ahol a maximumot az A különböző részhalmazaiból álló lamináris $\mathcal{F}$ halmaz családokon vesszük.*■

Vizsgáljuk most meg az olyan támasztó halmazok létezését, melyek bizonyos fokszám feltételeknek tesznek eleget A pontjaiban. Legyen adva $g:A\to Z\cup\{\infty\}$ függvény.

<u>5.2.7 TÉTEL</u> *Legyen G, N, r, és p ugyanolyan, mint az előbb. E-nek akkor és csak akkor létezik N-nel együtt támasztó R részhalmaza, amelyre $d_R(v)\le g(v)$ minden $v\in A$-ra, ha*

$$(2.5.12) \qquad p'(Y)\le g(Y-X)+r(\Gamma_N(Y)\cup\Gamma(X))$$

fennáll amikor $X\subseteq Y\subseteq A$.

BIZONYITÁS. A szükségességhez legyen R N-nel együtt támasztó. Ekkor $p'(Y)\le r(\Gamma_{R\cup N}(Y))\le r(\Gamma_N(Y)\cup\Gamma(X)\cup\Gamma_R(Y-X))\le r(\Gamma_N(Y)\cup\Gamma(X))+|\Gamma_R(Y-X)|\le r(\Gamma_N(Y)\cup\Gamma(X))+g(Y-X)$ és (2.5.12) következik.

Az elegendőség bizonyitásához feltehetjük, hogy g mindenütt véges. Ha van megoldás g-re vonatkozóan, akkor ez jó lesz minden olyan g'-re is, amely komponensenként nagyobb vagy egyenlő, mint g. Igy feltehetjük, hogy g minimális abban az értelemben, hogy (5.2.12) igaz, de ha g-t csökkentjük, akkor már nem.

1. ÁLLITÁS $g(v) \le r(\Gamma(v)) - r(\Gamma_N(v))$ minden $v \in A$-ra.

BIZONYITÁS. Legyen indirekt $g(v) > r(\Gamma(v)) - r(\Gamma_N(v))$ valamely $v \in A$-ra. Csökkentsük $g(v)$-t $g'(v)$-re, ahol $g(v)$ to $g'(v)) := r(\Gamma(v)) - r(\Gamma_N(v))$. Most létezik Y és X ($X \subseteq Y \subseteq A$, $v \in Y - X$), amelyre $p'(Y) > g'(Y-X) + r(\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(X))$. A szubmodularotást használva kapjuk $r(\Gamma(v)) + r(\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(X)) \ge r(\Gamma(v) \cap [\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(X)]) + r(\Gamma(v) \cup [\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(X)]) \ge r(\Gamma_N(v)) + r(\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(X+v))$. Ily módon $p'(Y) > g'(Y-X) + r(\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(X)) = g(Y-(X+v)) + r(\Gamma(v)) - r(\Gamma_N(v)) + r(\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(X)) \ge g(Y-(X+v)) + r(\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(X+v))$. Eszerint Y és $X' = X+v$ megsérti (5.2.12)-t, ellentmondás. ∎

Ha egy metszőn szupermoduláris függvényt egyelemű halmazokon növelünk, akkor ismét metszőn szupermoduláris függvényt kapunk. Igy feltehetjük, hogy p' maximális abban az értelemben, hogy (5.2.12) már nem igaz, ha p'-t egyelemű halmazon megnöveljük.

2. ÁLLITÁS $p'(v) = g(v) + r(\Gamma_N(v))$ minden $v \in A$-ra.

BIZONYITÁS. (5.2.12)-t $Y=\{v\}$ és $X=\emptyset$-re alkalmazva kapjuk, hogy $p'(v) \le g(v) + r(\Gamma_N(v))$ minden $v \in A$-ra. Indirekt tegyük fel, hogy valamely v-re az egyenlőtlenség éles. Növeljük $p'(v)$-t $p_1'(v)$-re, ahol $p_1' := g(v) + r(\Gamma_N(v))$.

Most (5.2.12) csak akkor sérülhet meg (a p_1'-re nézve), ha vagy $Y=\{v\}$ és $X=\emptyset$ vagypedig $Y=\{v\}$ és $X=\{v\}$. Az első eset azt jelentené, hogy $p_1'(v) > g(v) + r(\Gamma_N(v))$ ellentétben $p_1'(v)$ definiciójával. A második eset azt jelentené, hogy $p_1'(v) > r(\Gamma_N(v) \cup \Gamma(v)) = r(\Gamma(v)$, vagyis $g(v) + r(\Gamma_N(v)) > r(\Gamma(v)$, ellentétben az 1. állitással. ∎

Az $X=Y$ esetben (5.2.12) azt adja, hogy $p'(Y) \le r(\Gamma(Y))$ minden $Y \subseteq A$-ra, igy az 5.2.6 tétel alkalmazható. Legyen R ($\subseteq E-N$) N-nel együtt támasztó. Ekkor $r(\Gamma_{N \cup R}(v)) \ge p'(v) = g(v) + r(\Gamma_N(v))$ és ezért $d_R(v) \ge g(v)$ és $|R| \ge g(A)$. Vagyis az 5.2.6 tételben a minimum legalább

$g(A)$, és pontosan akkor $g(A)$, ha $d_R(v) \le g(v)$ minden $v \in A$-ra.

Tegyük most fel, hogy a kérdéses minimum nagyobb, mint $g(A)$. Ekkor az 5.2.6 tétel alapján létezik egy $\mathcal{F}$ lamináris család, amelyre $g(A) < \Sigma_{Y \in \mathcal{F}}(p'(Y) - r(\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(\cup(Z\colon Z \in \mathcal{F},\ Z \subset Y))))$. Innen $0 < p'(Y) - r(\Gamma_N(Y) \cup \Gamma(X)) - g(Y-X)$ fennáll $\mathcal{F}$-nek legalább az egyik tagjára, ahol X az $X := \cup(Z\colon Z \in \mathcal{F},\ Z \subset Y)$, halmazt jelöli. Ez viszont ellentmond (5.2.12)-nek.∎∎∎

Figyeljük meg, hogy az 5.2.1 tétel nem más, mint az 5.2.7 tétel az $N=\emptyset$ speciális esetben.

Legyen $D=(V,E)$ irányitott gráf. Közismert az a technika (pl. [Ford-Fulkerson 1962] 24.o.), ahogy v pontjait kettévágva egy páros gráfot készithetünk. Erre fogjuk alkalmazni a megelőző tételeket. Mivel a levezetések technikaiak, a részleteket elhagyjuk. (Lásd [Frank-Tardos 1988]).

Az $X \subseteq V$ és $F \subseteq E$ halmazokra legyen $O_F(X) := \{u \in V-X\colon$ létezik $uv \in F,\ v \in X\}$ és $I_F(X) := \{v \in X\colon$ létezik $uv \in F,\ u \in V-X\}$. O_E és I_E-t röviden O ill. I-vel jelöljük. Legyen $p'\colon 2^V \to Z_- \cup \{-\infty\}$ metsző szupermoduláris függvény, melyre $|O(X)| \ge p'(X)$ minden $X \subseteq V$. Legyen adva $g\colon V \to Z \cup \{\infty\}$ és $c\colon E \to R_+$ függvények.

Élek egy $F \subseteq E$ részhalmazát *külső támasztónak* mondunk, ha $|O_F(X)| \ge p'(X)$ minden $X \subseteq V$-re. A feltevés szerint E külső támasztó.

5.2.8 TÉTEL *Külső támasztó minimális költsége egyenlő $max(\Sigma[w(Y,X)(p'(Y)-|X|)\colon Y \subseteq V,\ Y \cap X=\emptyset,\ X \subseteq O(Y)]\colon \Sigma[w(Y,X)\colon Y \cup X \in \mathcal{F},\ Y \cap X=\emptyset,\ X \subseteq O(Y),\ u \in O(Y)-X,\ v \in Y] \le c(uv)$ minden $uv \in E$-re). Továbbá, ha c egész-értékű, akkor w is választható annak.*∎

5.2.9 TÉTEL *Külső támasztó minimális elemszáma egyenlő $max_{\mathcal{F}}(\Sigma_{Y \in F}[p'(Y) - |O(\cup(Z\colon Z \in \mathcal{F},\ Z \subset Y)) - Y|])$, ahol $\mathcal{F}$ lamináris.*∎∎∎

5.2.10 TÉTEL *Legyen adott $g\colon V \to Z_+ \cup \{\infty\}$ függvény. Akkor és csak akkor létezik F külső támasztó, melyre $\delta_F(v) \le g(v)$ minden $v \in V$-re, ha $p'(Y) \le g(Z) + |O(Y-Z)-Y|$ fennáll minden $Y \subseteq V$ és $Z \subseteq I(Y)$-ra.*∎∎∎

Egyszerű konstrukció segítségével levezethető:

5.2.11 TÉTEL *Legyen adott* $g: V \to Z_+ \cup \{\infty\}$ *és* $\hat{g}: E \to Z_+ \cup \{\infty\}$ *két függvény és* $p': 2^V \to Z \cup \{-\infty\}$ *metszőn szupermoduláris függvény, úgy hogy* $\rho_{\hat{g}}(X) \geq p'(X)$ *minden* $X \subseteq V$*-re. Akkor és csak akkor létezik létezik* $x: E \to Z_+$ *nem-negatív egész vektor, melyre* $x \leq \hat{g}$, $\rho_x(v) \leq g(v)$ *minden* $v \in V$*-re, és* $\rho_x(X) \geq p'(X)$ *minden* $X \subseteq V$*-re, ha*

$$p'(X) \leq g(Z) + \sum [\hat{g}(uv) : uv \in E,\ u \in V-X,\ v \in I(X)-Z] \tag{5.2.13}$$

minden $X \subseteq V$ *és* $Z \subseteq I(X)$*-re. Ha* $\hat{g} \equiv \infty$, *akkor (5.2.13)-mal ekvivalens:*

$$p'(X) \leq g(I(X)) \text{ minden } X \subseteq V. \tag{5.2.14}$$ ∎

5.3 GRÁFELMÉLETI ALKALMAZÁSOK

A. A KAPCSOLÁSI ELV

L.R.Ford és D.R.Fulkerson [1962] fogalmazta meg a kapcsolási elvet (linking principle), amit először az 8 példájukon szemléltetünk. Egy $G=(V,E)$ irányitott gráf olyan $H=(V,A)$ részgráfját keressük, amelyre $f_1(v)\le \rho_A(v)\le g_1(v)$ és $f_2(v)\le \delta_A(v)\le g_2(v)$ teljesül minden $v\in V$ csúcsra, ahol f_i, g_i $(i=1,2)$ adott függvények, $f_i\le g_i$. Ford és Fulkerson bebizonyitották, hogy létezik ilyen részgráf, ha egyrészt létezik olyan, amelyre $f_1(v)\le \rho_A(v)$ és $\delta_A(v)\le g_2(v)$, másrészt létezik olyan, melyre $\rho_A(v)\le g_1(v)$ és $f_2(v)\le \delta_A(v)$.

A kapcsolási elvre másik példa Mendelsohn és Dulmage tétele, mely szerint, ha egy $G=(A,B;E)$ páros gráfban egy $X\subseteq A$ részhalmaz lefedhető párositással és egy $Y\subseteq B$ részhalmaz lefedhető párositással, akkor X és Y egyszerre is lefedhetők párositással.

Harmadik példaként megemlithetjük azt a [Frank-Gyárfás 1976] dolgozatban bebizonyitott tételt, mely szerint, ha egy irányitatlan gráfnak létezik olyan irányitása, amelynek befoka eleget tesz egy felső korlát kikötésnek, és létezik olyan irányitása, melynek befoka eleget tesz egy alsó korlát kikötésnek, akkor létezik olyan irányitás is, amely egyszerre mindkettőnek eleget tesz (feltéve persze, hogy a felső korlát legalább akkora, mint az alsó).

Valójában, amint az némi ügyeskedéssel belátható, a kapcsolási elvnek ezen három esete egymással ekvivalens. A [Frank-Gyárfás 1976] dolgozatban azt a hasonló jellegű, de nehezebb tételt is beláttuk, hogy az előbbi irányitási problémában érvényes a kapcsolási elv, ha a keresett irányitott gráfról a fokszám feltételeken túl megköveteljük, hogy erősen összefüggő legyen. A [Frank 1980] dolgozatban ezt sikerült még tovább általánositani k-szor erősen élösszefüggő gráfokra (azaz $\rho_A(X)\ge k$ minden $0\subset X\subset V$ halmazra).

A dolgok hátterében a 2.3.5 következmény áll, amely a kapcsolási elv gyökerének tekinthető. (Ezt tovább általánositja a 3.3.1a következmény, azonban ez utóbbinak nem tudok alkalmazását.) A fenti példák közül az irányitásokra vonatkozókat alább részletesen tárgyaljuk. Most egy további példát mutatunk.

Legyen M matroid az S halmazon és $\{S_1,\dots,S_k\}$ az S-nek particiója.

Tegyük fel adottak az $f_i \le g_i$ $(i=1,\dots,k)$ számok.

5.3.1 TÉTEL *Ha M-nek létezik olyan B_1 bázisa, melyre $|B_1 \cap S_i| \le g_i$ $(1 \le i \le k)$ és létezik olyan B_2 bázisa, melyre $|B_2 \cap S_i| \ge f_i$ $(1 \le i \le k)$, akkor létezik olyan B bázisa is, amely egyszerre teljesíti a két egyenlőtlenséget.*

BIZONYITÁS Legyen $B(r)$ az M matroid bázis poliédere és $S':=\{1,\dots,k\}$ k elemű halmaz. Tekintsük azt a $\gamma:S\to S'$ leképezést, melyre $\gamma(s):=i$ ha $s\in S_i$. A 2.3.14 tétel szerint a $\gamma(B(r))$ homomorf kép g-polimatroid. Tételünk következik, ha erre alkalmazzuk a 2.3.5 következményt.∎∎∎

Speciális esetként vizsgáljuk meg, hogy egy $G=(V,E)$ összefüggő irányitatlan gráfnak mikor létezik olyan feszitő fája, amely adott $S\subseteq V$ stabil ponthalmazon alsó ill. felső fokszám feltételeknek eleget tesz. (Megjegyzendő, hogy természetes volna az egész V halmazra fokszám feltételt előirni, de ekkor már NP-teljes problémát kapnánk, miután a Hamilton út feladata speciális eset lenne.) Legyen adott $f:S\to Z$ és $g:S\to Z$, melyekre $f\le g$.

Itt és a későbbiekben is szükségünk van a $c:2^V\to Z$ függvényre. $c(X)$ jelenti az X elhagyásával keletkező komponensek számát. (Speciálisan $c(\emptyset)=1$). Közismert, hogy a c függvény tetszőleges $X,Y\subseteq V$-re kielégiti az

$$(5.3.1) \qquad c(X) + c(Y) \le c(X\cap Y) + c(X\cup Y) + d(X,Y)$$

egyenlőtlenséget. Csökkentsük c-t az üres halmazon 0-ra és jelölje c' a keletkező függvényt. Nyilván (5.3.1) teljesül c'-re is, amennyiben X és Y metsző.

5.3.2 TÉTEL *G-nek akkor és csak akkor létezik olyan F feszitő fája, amelyre $d_F(v)\ge f(v)$ minden $v\in S$-re, ha minden nemüres $X\subseteq S$-re*

$$(a) \qquad |\Gamma(X)| \ge f(X) - |X| + 1.$$

G-nek akkor és csak akkor létezik olyan F feszitő fája, amelyre

$d_F(v) \le g(v)$ minden $v \in S$-re, ha minden nemüres $X \subseteq S$-re

$$(b) \qquad c(X) \le g(X) - |X| + 1$$

G-nek akkor és csak akkor létezik olyan F feszitő fája, amelyre $f(v) \le d_F(v) \le g(v)$ minden $v \in S$-re, ha (a) és (b) egyszerre teljesül.

BIZONYITÁS Az 1. részt Lovász bizonyitotta, mint az 5.2 szakasz elején emlitett tételének következménye. A 2. rész Edmonds matroid metszet tételének közvetlen folyománya. A 3. rész pedig az előző tétel speciális esete.■

B. PAKOLÁS ÉS FEDÉS FENYŐKKEL

Legyen G=(V,E) irányitott gráf és r egy megadott pontja. Edmonds adott szükséges és elegendő feltételt arra, hogy mikor létezik G-ben k r gyökerű élidegen fenyő. (E szakaszban fenyőn mindig feszitő fenyőt értünk). Vidyasankar jellemezte azokat a gráfokat, melyek élhalmaza lefedhető k r gyökerű fenyővel.

Egy természetes közös általánositáshoz legyen adva az E élhalmazon az $f:E \to Z_+$ és $g:E \to Z_+ \cup \{\infty\}$ függvény, melyekre $f \le g$.

5.3.2 TÉTEL *G-ben akkor és csak akkor létezik k darab r gyökerű fenyő úgy, hogy minden e él legalább f(e)-ben és legfeljebb g(e)-ben van közülük, ha $\varrho_f(X)$ minden $X \subseteq V$-r és*

$$k - \varrho_f(X) \le \Sigma[k - \varrho_f(v) : v \in A] + \Sigma[g(e) - f(e) : e = uv \in E,\ v \in I(X) - A,\ u \in V - X]$$

fennáll, amikor $X \subseteq V$-r és $A \subseteq I(X)$.■

A tétel az 5.2.11 tételből az Edmonds tétel felhasználásával könnyen következik, de az Edmonds tételből egy ravaszabb elemi konstrukció segitségével közvetlenül is levezethető. (Lásd [Frank-Tardos 1988]).

Egy másik lehetséges általánositása az Edmonds tételnek, ha úgy akarunk k fenyőt bepakolni, hogy a gyökér nincs rögzitve. Legyen most $f,g:V\to Z$ két függvény V-n, melyekre $0\leq f(v)\leq g(v)\leq k$ minden $v\in V$. Az alábbi tétel újabb példa a kapcsolási elvre.

5.3.3 TÉTEL [Frank 1981a] *G-ben akkor és csak akkor létezik k élidegen fenyő úgy, hogy*

(i) [Frank 1981a] minden v pont legfeljebb g(v)-nek a gyökere, ha

$$(a1) \qquad \sum_{i=1}^{t} \rho(X_i) \geq k(t-1)$$

fennáll nemüres, páronként diszjunkt $X_1,X_2,\dots,X_t$ *halmazokra és*

$$(a2) \qquad \rho(X)+ g(X) \geq k \text{ minden } X \subseteq V\text{-re,}$$

(ii) [Cai Mao-cheng 1983] minden v pont legalább f(v)-nek a gyökere, ha

$$(b) \qquad \sum_{i=1}^{t} \rho(X_i) - k(t-1) \geq f(\cup_{i=0}^{t} X_i)$$

fennáll páronként diszjunkt $X_0,X_1,\dots,X_t$ $(t=0,1,\dots)$ *halmazokra, ahol csak* X_0 *lehet üres,*

(iii) minden v pont legalább f(v)-nek és legfeljebb g(v)-nek a gyökere, ha (a) és (b) egyszerre teljesül.∎∎∎

BIZONYITÁS Nevezzünk egy $m:V\to Z_+$ vektort *gyökér vektornak*, ha létezik k élidegen fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs pontosan $m(v)$-nek a gyökere. Edmonds tételéből közvetlenül leolvasható, hogy egy m vektor akkor és csak akkor gyökér vektor, ha $m(V)=k$ és $m(X)\geq p'(X)$ minden nemüres $X\subseteq V$ halmazra, ahol $p'(X):=k-\rho(X)$. Nyilván p' metszőn szupermoduláris. Tekintsük a $Q:=\{x\in R^V: x(X)\geq p'(X)$ minden nemüres $X\subseteq V$-re, $x(V)=k\}$. Ekkor Q metszőn szupermoduláris függvény által definiált bázis poliéder, amelynek az egész pontjai éppen a gyökér vektorok.

Legyen $B_1:=\{x\in R^V: x\geq f\}$ és $B_2:=\{x\in R^V: x\leq g\}$. Ekkor 2.3.4 alapján mind $B_1\cap Q$, mind $B_2\cap Q$ g-polimatroid. A 2.2.6 tételt mindkettőre alkalmazva megkapjuk (i) és (ii)-t. (iii) a 2.3.5 következmény speciális esete.■■■

Érdekes következmény az alábbi.

5.3.4 KÖVETKEZMÉNY *V azon X k elemű részhalmazai, melyekhez létezik G-ben k élidegen fenyő, melyek gyökereinek halmaza éppen X, egy matroid bázisait alkotják (feltéve, hogy van ilyen X halmaz).*■■■

Hogyan lehet algoritmikusan megtalálni az 5.3.3 tételben szereplő fenyőket? Lovász L. adott egyszerű algoritmust k élidegen r gyökerű fenyő megtalálásához. Ennek alapján van olyan algoritmusunk, amely adott m gyökér-vektorhoz megtalálja a k élidegen fenyőt. A feladat tehát csupán az, hogy keressünk egy m gyökér- vektort, melyre $f\leq m\leq g$, azaz hogy keressünk a fenti $Q':=B_1\cap B_2\cap Q$ g-polimatroidnak egy egész elemét. Könnyen ellenőrizhető, hogy $Q=\{x: x(A)\geq p''(X)$ minden $0\subset A\subset V$-re, $x(V)=k\}$, ahol

$$p''(X):=\begin{cases} k-\varrho(X), & \text{ha } 2\leq|X|\leq|V|-2 \\ \max(k-\varrho(v),\ f(v)), & \text{ha } X=\{v\} \\ \max(k-g(X),\ k-\varrho(X)), & \text{ha } X=V-v \end{cases}$$

Most p" keresztezőn szupermoduláris. Alkalmazzuk 4.2 szakaszban leirt másod-reszelési algoritmust a keresett m gyökér vektor megkeresésére. A szükséges orákulum, amint kimutatható, az MFMC algoritmus felhasználásával ismét rendelkezésünkre áll.

C. IRÁNYITÁSOK

Adott egy irányitatlan $G=(V,E)$ gráf és egy $m:V\to Z$ egész-értékű függvény. Azt mondjuk, hogy m G egy irányitásának *befok vektora*, ha $\varrho(v)=m(v)$ minden $v\in V$-re. A Hall tétel alkalmazásával könnyen igazolható az alábbi

5.3.5 LEMMA *m akkor és csak akkor befok vektor, ha*

$$(5.3.2)\qquad \begin{aligned} m(X) &\geq |E(X)| \text{ minden } X\subseteq V\text{-re és} \\ m(V) &= |E|. \end{aligned}$$ ■

Itt ϱ jelöli az irányitásnak a be-fok függvényét és E(X) az X által feszitett élek hakmaza. Miután $|E(X)|$ teljesen szupermoduláris, az (5.3.2)-t kielégitő vektorok egy bázis poliéder egész pontjai.

Először levezetjük Nash-Williams [1969] klasszikus tételét. Egy k-szor erősen élösszefüggő gráfot röviden nevezzünk *k-erősnek.*

5.3.6 TÉTEL [Nash-Williams] *Irányitatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik kerős irányitása, ha minden vágás tartalmaz legalább 2k élt.*

BIZONYITÁS. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőséghez legyen $p''(X):= k+|E(X)|$, ha $\emptyset\subset X\subset V$ és $p''(\emptyset):=0$, $p''(V):=|E|$. Ekkor p'' metszőn szupermoduláris. Tekintsük a $Q:=\{m\in R^V;\ m(X)\geq p''(X)$ minden $X\subseteq V$-re, $m(V)=|E|\}$ bázis poliédert. Állitjuk, hogy Q-ban benne van az a z vektor, melyre $z(v):= d(v)/2$. Valóban, a tétel feltételét kihasználva $|E(X)|$ kapjuk, hogy $z(X)= 1/2d(X) + |E(X)| \geq k+ |E(X)|$, valamint $z(V)=|E|$.

Q tehát nemüres, és miután egész-értékű szupermoduláris függvény által definiált bázis poliéder egész, Q tartalmaz egy m egész pontot. m kielégiti (5.3.2)-t, igy a lemma szerint egy irányitás befok vektora. Ezen irányitás k-erős, mivel $\rho(X)= \Sigma(\rho(v):\ v\in X)-|E(X)|= m(X)-|E(X)|\geq k$ minden $\emptyset\subset X\subset V$-re.■■■

A fenti levezetésből a 2.3.5 következmény segitségével rögtön látjuk, hogy a k-erős irányitások befok vektoraira érvényes a kapcsolási elv. Legyen adott $f,g:V\to Z$ két vektor, melyekre $f\leq g$.

5.3.7 KöVETKEZMÉNY *Ha G-nek létezik olyan k-erős irányitása, melyre $\rho(v)\geq f(v)$ minden $v\in V$-re és létezik olyan k-erős irányitása, melyre $\rho(v)\leq g(v)$ minden $v\in V$-re, akkor létezik olyan k-erős irányitása is, melyre $f(v)\leq\rho(v)\leq g(v)$ minden $v\in V$-re.*

Az is adódik következményként, hogy a másod-reszelési algoritmus segitségével megkonstruálhatunk a fenti Q-nak olyan m egész elemét, amelyre $f\leq m\leq g$. (A szükséges orákulum ismét csak az MFMC algoritmusból kapható.) Mivel a lemmabeli irányitást egyszerűen megkaphatjuk, ily módon egy kombinatorikus jó algoritmust kaptunk fokszám korlátozást is kielégitő k-erős irányitás keresésére.

A [Frank 1980] dolgozatban egy általánosabb irányitási tételt bizonyitottunk be, nem éppen egyszerűen. Megmutatjuk, hogy az a tétel is könnyen levezethető. Legyen $h:2^V\to Z_+\cup\{\infty\}$ nemnegativ egész-értékű függvény ($h(\emptyset)=h(V)=0$), amely *metszőn G-szupermoduláris*, azaz $h(X)+h(Y) < h(X\cap Y)+ h(X\cup Y)+ d(X,Y)$ minden $X,Y\subseteq V$ keresztező halmazra.

<u>5.3.8 TÉTEL</u> *G-nek akkor és csak akkor létezik olyan irányitása, amelyre*

$$(5.3.3) \qquad \varrho(X) \geq h(X) \quad \textit{minden } X\subseteq V\textit{-re, ha}$$

$$(5.3.4) \qquad \begin{array}{l} a.\ e_{\mathcal{P}} \geq \sum(h(V_i)) \\ b.\ e_{\mathcal{P}} \geq \sum(h(\bar{V}_i)) \end{array}$$

fennáll V minden $\mathcal{P}= \{V_1,V_2,\dots,V_n\}$ *particiójára, ahol* $e_{\mathcal{P}}$ *jelöli a különböző részek közötti élek számát. Ha h szimmetrikus (azaz* $h(X)=h(V-X)$*), akkor (5.3.4)-et elég kétrészes particiókra megkövetelni.*

BIZONYITÁS. A második rész könnyen látszik az elsőből. A szükségesség egyszerű, igy csak az elegendőséggel foglalkozunk. Legyen $p''(X):= h(X)+ |E(X)|$. Ekkor p'' keresztezőn G-szupermoduláris. (5.3.4)-ből az $\mathcal{P}$ particióra fennáll $\sum p''(V_i)= \sum h(V_i) + |E| - e_{\mathcal{P}} \geq |E|= p''(V)$ valamint $\sum p''(\bar{V}_i)= \sum h(\bar{V}_i) + (n-1)|E| - e_{\mathcal{P}} \geq (n-1)|E|= (n-1)p''(V)$.

Fujishige 2.2.7 tételét $b'':=-p''$-re alkalmazva kapjuk, hogy létezik m vektor, melyre $m(X)\geq p''(X)$ minden $X\subseteq V$-re valamint $m(V)=|E|$. Miután $h\geq 0$, (5.3.2) fennáll, igy a lemma szerint m egy irányitás befok vektora. Ez az irányitás könnyen láthatóan kielégiti az (5.3.3) feltételt.■■■

Az előző levezetésben igen lényeges volt az, hogy h nemnegativ. Könnyen jutunk azonban olyan irányitási feladathoz, amelyben h keresztezőn G-szupermoduláris, de negativ értéket is felvehet. Például adott $H=(V,E\cup F)$ vegyes gráf, ahol E az irányitatlan élek halmaza, F pedig az irányitottaké. Mikor lehet az E elemeit úgy irányitani, hogy a keletkező gráf k-erős legyen? Ez azt jelenti, hogy a $G=(V,E)$ gráfnak olyan irányitását keressük, amelyben $\varrho(A)\geq h(A)$ minden $\emptyset\subset A\subset V$-re, ahol $h(X):= k-\varrho_F(X)$, ha $\emptyset\subset X\subset V$ és

$h(\emptyset):=h(V):=0$. Erre a h függvényre a 3.5.8 tétel nem alkalmazható.

Nem kell azonban kétségbe esni, mert a szubmoduláris folyamok most is segítségünkre sietnek. Vegyünk fel az E elemeinek egy tetszőleges irányitását. Ezen megirányitott élek halmazát jelölje D. Az E egy irányitását egy $x:D\to\{0,1\}$ vektorral fogjuk megadni. $x(e)=0$ jelentse azt, hogy e irányitása megegyezik a D-beli irányitással, $x(e)=1$ pedig azt, hogy azzal ellentétes. Mármost az x vektor pontosan akkor fogja az E éleinek keresett irányitását szolgáltatni, ha $\rho_F(A)+\rho_D(A)-\rho_x(A)+\delta_x(A)\geq k$. Vagyis, ha $\rho_x(A)-\delta_x(A)\leq b''(A)$ fennáll minden $A\subseteq V$-re, ahol $b''(A):=\rho_F(A)+\rho_D(A)-k$. Most b'' keresztezőn szupermoduláris, és a keresett x vektorok a $Q(f,g;b'')$ szubmoduláris folyam poliéder egész pontjai, ahol $f:\equiv 0$, $g:\equiv 1$. Ilyen x vektort a 4.3 szakasz algoritmusával találhatunk meg.

Irányitásokról szóló elmélkedéseinket egy könnyebb tétellel zárjuk, melyet a következő pontban fogunk használni. Legyen $G=(A,B;E)$ 2-élösszefüggő páros gráf.

5.3.9 TÉTEL *G erősen összefüggő irányitásai között az A-ba lépő élek minimális $c''(A)$ száma egyenlő* $\max(\sum c'(X_i)$: $\{X_i\}$ *az A partíciója*$\}$.

BIZONYITÁS. Emlékeztetünk c' definiciójára és a 5.3.1 képletre. max≤min: erősen összefüggő irányitásban $\rho(X)\geq c'(X)$, igy $\rho(A)=\sum\rho(X_i)\geq\sum c'(X_i)$. Az egyenlőség bizonyitásához tekinsük G-nek azt az erősen összefüggő irányitását, amelyre $\rho(A)$ minimális. Nevezzünk egy X halmazt *pontosnak*, ha itt egyenlőség áll. c' metszőn G-szupermoduláris, amit felhasználva belátható, hogy metszőn pontos halmazok metszete és uniója is pontos. Következésképp adott v pontot tartalmazó pontos halmazok $P(v)$ metszete pontos, továbbá összefüggő hipergráfot alkotó pontos halmazok egyesitése is pontos.

Ha létezne olyan $v\in A$ pont, melyre létezik $x\in P(v)-A$ elem, akkor tetszőleges x-ből v-be menő P út irányitását megforditva G-nek erősen összefüggő irányitását kapjuk, amelyben eggyel kevesebb él lép A-ba; ez nem lehet. Igy minden $v\in A$ pontra $P(v)\subseteq A$. Jelölje $X_1,X_2,\ldots,X_k$ a $\{P(v)$: $v\in A\}$ hipergráf komponenseit. Ezek pontosak igy $\rho(A)=\sum\rho(X_i)=\sum c'(X_i)$, amit bizonyitani kellett.∎

D. IRÁNYITOTT VÁGÁSOK

A szubmoduláris folyamok kidolgozásánál az egyik alapmotivum Lucchesi és Younger tétele volt, mely szerint egy $G=(V,E)$ irányitott gráfban az élidegen irányitott vágások maximális száma egyenlő az irányitott vágásokat lefogó élek minimális számával.

Egy $A \subseteq V$ részhalmazt nevezzünk *magnak*, ha nem lép ki A-ból él. Jelölje $c''(A)$ az összes lefogások között az A-ba lépő élek minimális számát. Ez nem más mint a G erősen összefüggő átirányitásai között az A-ba lépő élek minimális száma. Erre az 5.3.8 tétel ad min-max formulát, ha az A és V-A által feszitett komponenseket egyetlen ponttá húzzuk össze.

A [Frank-Sebő-Tardos 1984] dolgozatban bebizonyitottuk, hogy c'' a magokon megszoritva nem más, mint a c függvény másod-reszeltje, és ebből következik, hogy a Lucchesi-Younger tétel az alábbi struktúráltabb alakban mondható ki.

<u>5.3.10 TÉTEL</u> *Az irányitott vágások lefogásának minimális elemszáma egyenlő* $\max(\sum c''(X_i):\ X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_k$, X_i*-k magok, melyek páronként élidegen vágásokat határoznak meg.*∎

Végezetül választ adunk egy nem kevésbé temészetes kérdésre. Mikor létezik irányitott vágásoknak olyan lefogása, amelyben nincs két egy pontba lépőél. Fenyvesnek nevezünk egy olyan irányitott erdőt, amelyben nincs két egy pontba lépő él. Figyeljük meg, hogy minimális lefogás mindig irányitott erdő.

<u>5.3.11 TÉTEL</u> **G irányitott gráf irányitott vágásai akkor és csak akkor foghatók le fenyvessel, ha tetszőleges X halmazra az X elhagyásával keletkező azon komponensek száma, melyekbe nem vezet él, legfeljebb X elemszáma.**

BIZONYITÁS. Alkalmazzuk az 5.2.11 tételt $g\equiv 1$ és $g'\equiv\infty$ esetben a $p':=c'$ függvényre.∎∎∎

5.4 OPTIMÁLIS FELJAVITÁSOK

Tegyük fel, hogy a $G=(V,E)$ irányitott gráfban nem létezik K élidegen út az s pontból a t-be. Az a feladat, hogy új élek behúzásával biztositsuk a K élidegen út létezését. Ha minden lehetséges új élnek adott a költsége, mennyi a szükséges új élek minimális össz-költsége?

Ezt a feladatot már Ford és Fulkerson is emlitik könyvükben, és megmutatják, hogy egyszerűen visszavezethető minimális költségű folyam keresésére. E szakaszban további ilyen jellegű problémákat vizsgálunk.

A. SZUBMODULÁRIS FOLYAMOK

Analóg feladatot tűzhetünk ki szubmoduláris folyamokra. Tegyük fel a $Q=Q(f,g;b)$ szubmoduláris folyam poliéder üres, de $Q(G;b)$ nem az. Csökkentsük f-t és növeljük g-t optimálisan, hogy Q-nak már legyen eleme. Azaz minimalizáljuk $d_f x_f + d_g x_g$-t az olyan nemnegativ (x_f, x_g) vektorok felett, melyekre $0 \le x_f \le c_1$, $0 \le x_g \le c_2$ és $Q(f_o, g_o; b)$ nemüres, ahol $f_o = f - x_f$ és $g_o = g + x_g$. E feladat maga egy alkalmas szubmoduláris folyam poliéderen vett optimalizálási probléma. Valóban, G minden $e=uv$ élére adjuk a gráfhoz az $e_f=uv$, $e_g=vu$ párhuzamos éleket. A keletkező gráf $G_1=(V,E_1)$. Definiáljuk az f_1, g_1 kapacitásokat: $f_1(e):=f(e)$, $f_1(e_f):=0$, $f_1(e_g):=0$, $g_1(e):=g(e)$, $g_1(e_f):=c_1(e)$, $g_1(e_g):=c_2(e)$. Legyen az új költség függvény $d_1(e):=0$, $d_1(e_f):=d_f(e)$, $d_1(e_g):=c_2(e)$. Az optimális kapacitás növelési feladat ekvivalens azzal, hogy minimalizáljuk d_1x-et a $Q(f_1, g_1; b)$ szubmoduláris folyam poliéderen.

B. DISZJUNKT UTAK

Tegyük most fel, hogy az a célunk, hogy új élek bevételével biztositsunk K élidegen utat a $G(V,E)$ gráf rözitett s pontjából az összes többibe. Kicsit általánosabb a feladat, ha G éleihez úgy akarunk x változókat rendelni, hogy $\rho_x(A) \ge K$ minden $A \subseteq V$-s-re és cx minimális. Ez a feladat megfogalmazható magrendszer nyelvén (5.1 szakasz E.), de egyszerű fogással visszavezethető a súlyozott matroid metszet problémára (ahol az egyik matroid a körmatroid K-szor vett összege, a másik pedig az a particiós matroid, amelyben egy élhalmaz független, ha minden $v \in V$-s pontba legfeljebb K eleme fut).

Nehezebb a dolgunk, ha azt akarjuk biztositani, hogy s-ből minden más pontba vezessen K (belsőleg) pontidegen út. Ennél általánosabb, ha olyan minimális költségű részgráfot keresünk, amelyben s-ből minden más pontba vezet K pontidegen út. Erre a feladatra ad választ a külső támasztó halmazokra vonatkozó 5.2.8 tétel, ha $p'(A)=K$. Mivel a támasztó halmazok szubmoduláris folyamokkal kezelhetők voltak, ez a kérdésünk is algoritmikusan megoldható.

C. DISZJUNKT BÁZISOK

Befejezésül tekintsük a következő matroid feljavitási problémát. Tegyük fel, hogy az M matroidban nincs K diszjunkt bázis és párhuzamos elemek bevételével el akarjuk érni, hogy legyen. Mi az új elemek minimális össz-költsége? Grafikus matroidokra a feladatot Cunningham [1985] oldotta meg.

Edmonds ismert tétele szerint akkor és csak akkor létezik K diszjunkt bázis, ha $Kt(X) \geq |X|$ teljesül minden X részhalmazra, ahol t a matroid ko-rang függvénye (azaz $t(X)=r(S)-r(S-X)$). A megoldást egy z vektorral adjuk meg, ahol z(s) jelöli a s-sel párhuzamos hozzáadandó elemek számát ($s \in S$). Akkor nevezzük a z-t *megengedettnek*, ha a megnövelt matroidban van K diszjunkt bázis. Az említett Edmonds tétel szerint z akkor és csak akkor megengedett, ha $z(A) \geq kt(A)-|A|$ minden $A \subseteq S$-re. Igy a megengedett vektorok éppen a $Q:=\{x \in R^S: x \geq 0, x(A) \geq kt(A)-|A|\}$ g-polimatroid egész pontjai. Következésképp a mohó algoritmussal megkaphatjuk az optimális megengedett vektort.

Érdemes megfigyelni, hogy a feladat ily módon az egyszerű mohó algoritmussal megoldható, ugyanakkor a mohó algoritmushoz szükséges orákulumot az M rang függvényéből csak Edmondsnak a távolról sem egyszerű matroid particiós algoritmusával lehet megkapni.

II.RÉSZ

UTAK ÉS KöRöK PAKOLÁSA

A dolgozat ezen része 3 fejezetre bomlik. Először az élidegen út problémával foglalkozunk. Bemutatunk két olyan speciális esetet amikor egy egyszerű szükséges feltétel, a vágás feltétel, egyúttal elegendő is. Utána bevezetünk egy új szükséges feltételt, és bemutatunk két osztályt, amikor e feltétel elegendő. A 2. fejezet olyan útpakolásokat vizsgál a sikon, ahol az utaknak nem csak a két végpontját irjuk elő, hanem a homotópia osztályát is megadjuk. Fő célunk itt Robertson és Seymour egy tételének általánositását megadni. A befejező 3. fejezet nem út-, hanem körpakolásokkal foglalkozik. Itt bebizonyitunk egy tételt, amely közös általánositása Fleischner egy nehéz tételének és a Seymour féle egész körösszeg tételnek.

1. AZ ÉLIDEGEN ÚT PROBLÉMA

1.1.BEVEZETÉS

E szakasz alapproblémája a következő. Legyen $G=(V,E)$ irányitatlan gráf, ahol V a csúcsok, E pedig az élek halmaza.

ÉLIDEGEN UTAK PROBLÉMÁJA Keressünk a G gráfban k élidegen utat, melyek előre megadott pontpárokat kötnek össze.

A feladat természetesen irányitott gráfokra is kitűzhető. A probléma NP-teljes még aránylag erős további megkötések mellett is. Például akkor, ha G sikgráf, vagy ha a k összekötendő pontpár között csak kettő különböző van. Irányitott esetben még a $k=2$ eset is NP-teljes.

Vannak azonban fontos speciális esetek, amikor az élidegen utak problémája mind elvi, mind algoritmikus szempontból megválaszolható. Ezek közül a legismertebb az, amikor a k terminál pár mind ugyanaz.

Azaz ilyenkor 2 pont között kell k élidegen utat keresni. Erre a feladatra (mind az irányitott, mind az irányitatlan esetben) a Menger tétel ad választ. Egy másik fontos speciális eset, amikor k korlátos. Amint Robertson és Seymour legújabban kimutatták, ilyenkor létezik polinomiális algoritmus. Ennek úgy tűnik csak az elvi jelentősége nagy, mert az algoritmus futásidejében szereplő k-től függő konstans együttható olyan horribilisen nagy, hogy az algoritmus már a k=3-esetben is használhatatlan.

A [Frank 1988] dolgozatban aránylag részletes áttekintést adtunk az élidegen útprobléma illetve az ahhoz szorosan kapcsolódó témakörök mai állásáról. Jelen célunk ezért csak az, hogy a területhez tartozó saját eredményeket ismertessük.

Tegyük fel, hogy az összekötendő pontpárok $(s_1,t_1),\ldots,(s_k,t_k)$. Hasznos ezen párokat egy-egy éllel megjelölni. A megjelölt éleket *igényéleknek* nevezzük, az igényélek által alkotott $H=(V,F)$ gráfot pedig *igénygráfnak*.

A következő feltétel a megoldhatósághoz nyilván szükséges:

<u>VÁGÁS FELTÉTEL</u> $d_G(X) \geq d_H(X)$ *minden* $X \subseteq V$ ***halmazra.***

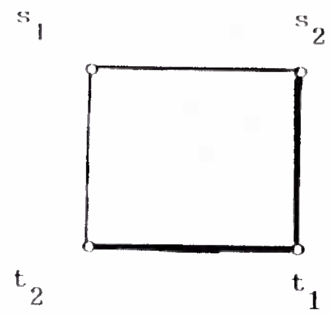
Már itt megjegyezzük, hogy a vágás feltétel fennáll, ha csak tartalmazásra nézve minimális vágásokra követeljük meg, azaz csak olyan X-ekre, ahol mind X mind a komplementere G-nek összefüggő részgráfját feszíti. A $d_H(X)$ értéket a $\nabla_G(X)$ vágás *terhelésének* nevezzük. A vágás $s(X)$ *többlete* a $d_G(X)-d_H(X)$ szám. Ha ez a szám 0, a vágást (vagy az X halmazt) ***kritikusnak*** vagy ***pontosnak*** nevezzük.

Az irányitott esetben az igénygráfot úgy készitjük el, hogy ha s_1-ből t_1-be kell (irányitott) utat vezetni, akkor t_1s_1 alkot egy igényélt. Ekkor a vágás feltétel igy alakul:

<u>IRÁNYITOTT VÁGÁS FELTÉTEL</u> $\rho_G(X) \geq \delta_H(X)$ ***minden*** $X \subseteq V$ ***halmazra.***

Menger tételének egy változata azt mondja ki, hogy a vágás feltétel illetve irányitott esetben az irányitott vágás feltétel elegendő is, ha $s_1=s_2=\ldots=s_k$.

Az ezután következő legegyszerűbb speciális esetben H két diszjunkt élből áll. Az ábrán látható példa mutatja, hogy ilyenkor a vágás feltétel általában nem elegendő:



1.1.ábra

1.2.AMIKOR A VÁGÁS FELTÉTEL ELEGENDŐ

Számos fontos speciális eset ismeretes, amikor a vágás feltétel elegendő. Itt mi kettőt mutatunk be. Az első áramkörök huzalozástervezésénél vetődött fel [Frank 1981]. Tegyük fel, hogy a négyzetrácson adott egy T $(m-1)*(n-1)$-es téglalap által határolt rész. Legyen $G=G_T$ a T által természetesen definiált gráf, amelynek tehát $m*n$ csúcsa van. Feltesszük továbbá, hogy a terminál pontok a T alsó és felső határoló egyenesén helyezkednek el és különbözők. Ekkor a vágás feltétel még nem elegendő az élidegen út probléma megoldásához, amint azt az 1.1. ábra gráfja mutatja. Egy meglepően csekély többlet feltevés azonban már biztositja a vágás feltétel elegendőségét. Valójában, amint kiderül, ilyenkor a vágás feltételt elég csak ún. oszlop-vágásokra megkövetelni. *Oszlop-vágáson* olyan vágást értünk, amelynek minden éle vizszintes.

1.2.1.TÉTEL *(a) [Frank 1981]] Ha T-nek legalább egyik sarokpontja nem terminál pont, és minden terminál pár egyik tagja T felső, a másik tagja T alsó határoló szakaszán van, vagy (b) [Abos-Frank-Tardos [1981] ha létezik legalább egy terminál pár, amely a felső (vagy az alsó) határoló vonalon van, akkor az élidegen problémának akkor és csak akkor létezik megoldása, ha semelyik oszlop sem választ el m-nél több terminál párt.*

BIZONYITÁS. Itt csak az (a) részt bizonyitjuk. A (b) rész könnyen visszavezethető (a)-ra. Tegyük fel, hogy T négy sarokpontjának a koordinátái $A=(1,m)$, $B=(n,m)$, $C=(m,1)$ és $D=(1,1)$. Valamely i terminál párra $U(i)$ és $L(i)$ jelölje az i felső illetve alsó tagjának x-koordinátáját. Ha nem okoz félreértést, akkor egy P pontot az X-koordinátájával fogunk jelölni.

Feltehetjük, hogy m éppen az oszlopok maximális Δ terhelésével egyenlő. m szerinti indukcióval dolgozunk. Az $m=1$ eset triviális, így feltesszük, hogy $m>1$. Tegyük fel továbbá, hogy a négy sarokpont közül A szabad.

Feltehetjük, hogy nem létezik olyan i terminál pár, amelyre $U(i)=L(i)$, vagyis, hogy nincs *triviális* út, mert különben kössük össze a két végpontot egy függőleges úttal és négyzetrács megfelelő függőlegesét töröljük el. Az új, kisebb feladatban az oszlop feltétel továbbra is fennáll és A is szabad.

Az algoritmus m fázisból áll. Minden egyes fázisban mind a vizszintes vonalak száma, mind a maximális oszlop terhelés eggyel fog csökkenni. Az első fázist fogjuk részletesen leirni és elemezni. Ennek outputja egy olyan U'(i) (i=1,...,k) sorozat lesz, amely azt mondja meg, hogy az i-edik út hova menjen a felső vonalon. U'(i)=U(i) azt fogja jelenteni, hogy az i-edik út függőlegesen lefelé indul.

Ahhoz, hogy az algoritmus illetve a bizonyitás helyes legyen, az U'(i) sorozatot olyképpen kell meghatározni, hogy az indukciós feltevés fennálljon az U'(i), L(i) terminál párokra (i=1,...,k) azon T' téglalapra vonatkozóan, amely T-ből a felső határoló vonal eltörlésével adódik. Más szavakkal az új maximális terhelésnek Δ-nek kell lennie, és T' egyik sarokpontjának szabadnak kell lennie.

Az eljárásnak az a tulajdonsága, hogy a felső sarokpontok váltakozva szabadok. Az i útról azt mondjuk, hogy *balút* (*jobbút*), ha U(i)> L(i) (U(i)<L(i)). Legyen X és Y két pont az AB szakaszon, melyekre X<Y. Tegyük fel, hogy X szabad. Az algoritmus alaplépése az XY-on való *elemi balra tolás*. Ez egyetlen balútra mondja meg hogy hova menjen az XY szakaszon. Nevezetesen, döntsük el, hogy van-e olyan i balút, amelyre X<U(i)≤Y, és ha igen, akkor válasszuk ki azt, mondjuk j-ét, amelyre L(j) a lehető legkisebb. Amennyiben nincs ilyen balút, azt mondjuk, hogy az elemi balra tolás üres. Legyen U'(j)=X, ha L(j)≤X és U'(j)=max(Z: X<Z≤L(j), (Z,m) szabad, ha L(j)>X.

Figyeljük meg, hogy U'(j) definiciója jogos, mert X szabad. Továbbá j triviálissá válik a következő fázisra amennyiben Z=L(j) és jobbúttá, ha Z<L(j). Ez utóbbi esetben a Z és L(j) közötti oszlopok terhelése eggyel megnő. Ezentúl, a j minimális választása folytán, a felső határoló vonalon a Z+1, Z+2,...,L(j) pontok mindegyike jobbút végpontja.

Az XY szakaszon történő *balra tolás* több útra mondja meg hogy hova menjen az XY szakaszon. Nevezetesen, alkalmazzunk először egy elemi balra tolást XY-on és tegyük fel, hogy j lett balra mozgatva. Ekkor az X'=U(j) pont szabaddá vált a felső határoló vonalon. Alkalmazzunk most ismét egy elemi balra tolást az X'Y szakaszon, majd ismételjük az eljárást egészen addig, amig az aktuális elemi balra tolás üres nem lesz. Az jobbra tolás definiciója analóg a balra toláséval.

Az első fázis két részből áll. Először alkalmazunk egy balra tolást az egész AB szakaszon. A második részben az AB minden olyan XY maximális rész-szakaszára, amely az első részben nem lett úttal lefedve definiáljuk Y'=max(Z: X≤Z<Y, (Z,m) szabad). Minden igy keletkező XY'-re alkalmazzunk egy jobbra tolást.

Ezzel az algoritmus első fázisának leirását be is fejeztük. Minden olyan j útra, amely az első fázis balra illetve jobbra tolásaiban nem szerepelt, legyen $U'(j):=U(j)$.

Ahhoz, hogy az algoritmus helyességét igazoljuk, először is figyeljük meg, hogy $U'(i)\neq U'(j)$ amikor $i\neq j$, és az AB szakaszon definiált részutak élidegenek. Igaz továbbá, hogy az esetleg keletkező triviális utak eltörlése után a jobb felső sarok szabad lesz. Bizonyitsuk most be, hogy a maximális terhelés eggyel csökkent.

Tetszőleges oszlop terhelése 0, +1 vagy -1-gyel változott. Tekintsük először azokat az oszlopokat, melyek terhelése eggyel megnőtt. Ez csak az első részben következhetett be, ha valamely XY-on történt elemi balra tolás során $L(j)>X$ és $L(j)>Z$ fordult elő. Mint már emlitettük, ilyenkor Z és L(j) között valamennyi oszlop terhelése eggyel növekedett.

<u>1. ÁLLITÁS</u>. *A Z és L(j) közötti oszlopok eredeti terhelése legfeljebb $\lambda-2$ lehetett.*

BIZONYITÁS. Miután az $(L(j),m)$ és az $(L(j),1)$ pontok rendre egy jobb- és egy balút végpontjai, kapjuk, hogy $c(L(j)-1,L(j))= c(L(j),L(j)+1)-2\leq \lambda-2$, ahol $c(S,S+1)$ jelöli az S és S+1 közötti oszlop terhelését. Tudjuk, hogy a a felső vonalon a $Z+1,\dots,L(j)$ pontok mindegyike balút végpontja, ezért $c(Z,Z+1)\leq c(Z+1,Z+2)\leq\dots\leq c(L(j)-1,L(j))\leq \lambda-2$, amit állitottunk. ∎

Egy olyan oszlop terhelése, amely elválaszt valamilyen balutat, eggyel csökken az első fázis első részében. Igy csak a második rész XY szakaszaival kell foglalkoznunk. Emlékezzünk az Y' definiciójára.

2.<u>ÁLLITÁS</u>. *Az Y és Y' közötti oszlopok (változatlan) terhelése kisebb, mint λ.*

BIZONYITÁS. Minden Y' és Y közötti Z-re a (Z,m) pont jobbút végpontja és ezért $c(Y',Y'+1)< c(Y'+1,Y'+2)<\dots< c(Y-1,Y)$. Az (Y,m) pont eredetileg szabad volt. Igy az Y-ra három lehetőségünk van.

(i) $Y=B$, vagyis Y a T téglalap jobb felső sarka. Ekkor $c(Y-1,Y)<1<m=\lambda$,

(ii) (Y,1) balút végpontja, amikor is $c(Y-1,Y)<c(Y,Y+1)\leq\lambda$,

(iii) (Y,1) nem balút végpontja és $Y<n$. Az 1. állitás szerint $c(Y,Y+1)\leq\lambda-2$. Mivel $c(Y-1,Y)\leq c(Y,Y+1)+1$, az állitás következik.∎

3.ÁLLITÁS. *X és Y' közötti tetszőleges oszlop új terhelése legfeljebb $\lambda-1$.*

BIZONYITÁS. Tegyük fel indirekt, hogy a (Z,Z+1) oszlop ($X\leq Z<Y'$) megsérti az állitást. Ekkor a (Z,Z+1) oszlop eredetileg λ jobbút végpontjait szeparálta. Ha ezek közül bármelyikre $U(i)>X$ áll, akkor az algoritmus első fázisának második részében egy út keresztezte a (Z,Z+1) oszlopot, igy az új terhelése kisebb, mint λ volna, szemben az indirekt feltevéssel.

A másik esetben $U(i)<X$ teljesül mind a λ darab jobbútra, amelyet (Z,Z+1) elválaszt. Most X nem lehet A és (X,m) balút végpontja, mig (X,1) nem az. Ezért $c(X-1,X)>c(Z,Z+1)=\lambda$, ellentmondás.∎

Az állitásokat bebizonyitva, a tétel bizonyitása is teljes.∎∎∎

Algoritmikus szempontból a fenti eljárás nyilván polinomiális idejű. Ha van olyan függőleges vonal, amelyen nincs terminál pont, akkor ezt kitörölhetjük a négyzetrácsból, mivel az oszlop feltételt ez nem befolyásolja. Igy feltehető, hogy $m\leq k$, $n\leq 2k$. Némi ügyeskedéssel egy fázis $O(k)$ lépésben végrehajtható, és igy a teljes algoritmus futásideje $O(k^2)$-tel becsülhető.

Természetesen vetődik fel a kérdés, mi mondható, ha a tételben az extra kikötések nem teljesülnek, vagy még általánosabban, ha a terminálok a T kerületén tetszőlegesen helyezkedhetnek, esetleg még a terminálok különbözőségét sem megkövetelve. A következő fejezet ad választ majd erre a kérdésre.

Most megvizsgálunk egy irányitott gráfokra vonatkozó esetet, amikor az irányitott vágás feltétel elegendőnek bizonyul. A bevezetőben említettük, hogy az élidegen út probléma az irányitatlan esetben még akkor is NP-teljes, ha mindössze két különböző terminál pár van, azaz a H igénygráf a $2K_2$-ből párhuzamos élek hozzáadásával keletkezik.

Ismert azonban Rothschild és Whinston tétele [1966], amely szerint ha G+H Euler gráf, akkor a vágás feltétel elegendő is. Az irányitott esetben rosszabb a helyzet, mint az irányitatlanban, mert itt már a k=2 eset is NP-teljes. Mégis, a Rotschild-Whinston tétel irányitott ellenpárja érvényben marad.

1.2.2 TÉTEL [Frank 1989] *Tegyük fel, hogy G+H irányitott Euler gráf, és H k_i darab t_i-től s_i-be vezető párhuzamos élből áll (i=1,2). Az élidegen út problémának akkor és csak akkor van megoldása, ha teljesül az irányitott vágás feltétel.*

BIZONYITÁS. Legyen G+H minimális ellenpélda. Jelöljük a terminálok halmazát T-vel. Menger tételéből adódóan $k_1>0$, $k_2>0$.

A bizonyitásban alapvető szerepe van a ρ befok függvény szubmodularitásának. Valójában a ρ-ra vonatkozóan a következő, a szubmodularitásnál pontosabb összefüggés az, amit használni fogunk.

(1.2.1) $$\rho_G(X) + \rho_G(Y) = \rho_G(X\cap Y)+ \rho_G(X\cup Y)+ d(X,Y).$$

Ez rögtön látható, mert minden lehetséges élnek a két oldalhoz ugyanaz a huzzájárulása.

Legyen uv és ut G-nek két éle. Ezen két él *leemelése* az a művelet, amelyben a két élt helyettesitjük az vt éllel. Az {vu,ut} élpárt *leemelhetőnek* mondjuk, ha leemelésük nem rontja el az irányitott vágás feltételt. Mivel G+H minimális ellenpélda, könnyen látható, hogy semmilyen élpár nem lehet leemelhető.

Egy X ponthalmazt *kritikusnak* mondunk, ha $\rho_G(X)=\delta_H(X)$.

1.ÁLLITÁS. *Ha X kritikus, akkor komplementere is az.*

BIZONYITÁS. Mivel G+H irányitott Euler gráf, fennáll, hogy $\rho_G(X)+\rho_H(X)=\delta_G(X)+\delta_H(X)$, amiből az állitás következik.∎

2.ÁLLITÁS. *Ha X,Y kritikusak, akkor $d_H(X,Y)\geq d_G(X,Y)$, és itt akkor és csak akkor van egyenlőség, ha mind $X\cap Y$ és $X\cup Y$ kritikus.*

BIZONYITÁS. (1)-ből és az irányitott vágás feltételből azonnal adódik, hogy $\rho_G(X\cap Y)-\rho_H(X\cap Y) + \rho_G(X\cup Y)-\rho_H(X\cup Y) + d_G(X,Y)-d_H(X,Y) = \rho_G(X) - \rho_H(X) + \rho_G(Y) - \rho_H(Y) = 0 + 0$, amiből az állítás következik.∎

3.ÁLLÍTÁS *Ha X, Y kritikusak, akkor $d_H(X,\bar{Y})\geq d_G(X,\bar{Y})$, és itt akkor és csak akkor van egyenlőség, ha mind X-Y és Y-X kritikus.*

BIZONYITÁS. Alkalmazzuk a 2. állítást X és $\bar{Y}$-ra. Az 1. állítás alapján ez megtehető.∎

4.ÁLLÍTÁS. *s_it_i G-nek nem éle (i=1,2).*

BIZONYITÁS. Ha mondjuk $e=s_1t_1$ él volna G-ben, akkor töröljük el az e élt és egy t_1s_1 igényélt. A keletkező G' és H'-re az irányitott vágás feltétel továbbra is fennáll, és G'+H' Euler-féle. Mivel G+H minimális ellenpélda volt, G'-ben a kivánt utak léteznek. De ezek az st éllel, mint s-ből t-be menő úttal együtt azt mutatják, hogy G+H nem ellenpélda, ellentmondás.∎

5.ÁLLÍTÁS. *T≠V.*

BIZONYITÁS. Legyen indirekt T=V. Mivel $k_1>0$ és az s_1t_1 él nincs G-ben, van két él G-ben, s_1x és xy, melyekre s_1, x, y különbözők. E két él nem emelhető le, azaz létezik egy olyan kritikus A halmaz, amelyre $x\in A$, $s_1,y\notin A$. Mivel $\delta_G(A)>0$ és A kritikus, ezért $\rho_H(A)>0$. Hasonlóképp $\delta_H(A)>0$. Ezért t_1s_1 kilép A-ból, mig t_2s_2 belép A-ba. A 4. állitás szerint t_1 nem lehet x. Így szükségképpen $y=t_2$ és $x=s_2$, ellentmondva a 4. állitásnak.∎

Mivel G összefüggő, létezik egy olyan $u\in V-T$ csúcs, hogy $us\in E$ valamely $s\in T$-re. A bizonyitás kulcsa a következő lemma. Ebből a tétel már következik.

LEMMA *Van olyan $vu\in E$ él, hogy a {vu,us} élpár leemelhető.*

BIZONYITÁS. Tegyük, fel, hogy $s=t_1$ (a többi lehetőség analóg módon kezelhető). Ha nem létezik kritikus sű halmaz, akkor tetszőleges vu él megteszi. Tegyük először fel, hogy egyetlen nem bővithető kritikus sű-halmaz van, és jelöljük ezt X-szel. Azt állitjuk, hogy van egy $vu \in E$ él, amelyre $v \notin X$. Ellenkező esetben ugyanis $\rho_G(X+u) < \rho_G(X) = \delta_H(X) = \delta_H(X+u)$ teljesülne, szemben az irányitott vágás feltétellel. Most viszont a {vu,us} élpár leemelhető.

Következőleg tegyük fel, hogy van kettő nem bővithető kritikus sű-halmaz. Legyenek X és Y. Mivel az uniójuk nem kritikus, a 2. és 3. állitások szerint $d_H(X,Y)>0$ és $d_H(X,\bar{Y})>0$. Mivel $t_1 \in X \cap Y$ a H kétféle éle közül csak $t_2 s_2$ tud $d_H(X,Y)$-hoz hozzájárulni. Ebből kifolyólag nem létezhet X_1, X_2, X_3 három nem bővithető kritikus sű-halmaz, mert ekkor az $s_2 t_2$ élnek kellene összekötni az $X_i - X_j$ és $X_j - X_i$ halmazokat az i, és j mindhárom lehetséges $1 \leq i < j \leq 3$ választására, ami pedig lehetetlen.

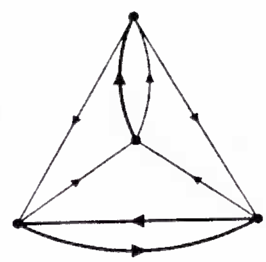
Tehát összesen két nem bővithető kritikus sű-halmazunk van, az X és Y. Azt állitjuk, hogy van olyan vu él E-be, amelyre $v \notin X \cup Y$. Valóban, ha ilyen él nincsen, akkor, lévén $\bar{X}$ kritikus, $\delta_G(X)=0$ és igy $\rho_G(Y+y) < \rho_G(Y) = \delta_H(Y) = \delta_H(Y+y)$, ellentmondásban az irányitott vágás feltétellel.

Most a {vu,us} élpár leemelhető, amivel a lemma és a tétel bizonyitása is teljes.■■■

Figyeljük meg, hogy az 1.2.2. tételből levezethető Rotschild és Whinston tétele (amely szerint, ha G+H irányitatlan Euler gráf, és H s_1 és t_1 valamint s_2 és t_2 közötti párhuzamos élekből áll akkor az élidegen útprobléma megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele a vágás feltétel.) Valóban, Ford és Fulkerson [1962] egy tétele szerint egy vegyes gráf (azaz irányitott és irányitatlan éleket egyaránt használó gráf) irányitatlan éleit akkor és csak akkor lehet úgy megirányitani, hogy a keletkező immár teljesen irányitott gráf Euler-féle legyen, ha minden csúcs páros sok (irányitott vagy irányitatlan) éllel szomszédos, továbbá minden vágás legalább annyi irányitatlan élt tartalmaz, mint a két irányban menő irányitott élek számának különbsége. (Ez a tétel könnyű következménye a maximális folyam minimális vágás tételnek).

Alkalmazzuk mármost ezt a tételt arra a vegyes gráfra, amely G+H-ból keletkezik úgy, hogy H éleit t_1-ből s_1-be illetve t_2-ből s_2-be irányitjuk. A vágás feltételből adódóan a Ford Fulkerson tétel feltételei teljesülnek, igy G élei megirányithatók úgy, hogy G+H irányitott Euler gráf legyen. Az irányitatlan vágás feltétel implikálja az irányitott vágás feltételt a kapott irányitott gráfra, és igy az 1.2.2. tételből Rothschild-Whinston tétel következik.

A Rothschild-Whinston tételnek ismeretes az M.Lomonosovtól és P.Seymourtól származó kiterjesztése, amely szerint ha G+H Euler gráf és H vagy K_4-ből (teljes négyes) vagy C_5-ből (öt hosszú kör) vagy két csillagból áll elő párhuzamos élek beiktatásával, akkor a vágás feltétel még mindig elegendő (továbbá nincs is más H mintgráf, amelyre az állitás érvényes volna). Kérdés, hogy a 2. tételnek nem létezik-e hasonló kiterjesztése. Túl nagy reményeink nem lehetnek, mert a következő példa szerint az irányitott vágás feltétel már akkor sem elegendő, ha csak két terminál pár van, de egy terminál pár között vezethet mindkét irányban igényél.



2.1. Ábra

Nincs azonban minden veszve. Nevezzünk egy irányitott gráfot *csillagnak* ha vagy minden éle egy pontba megy vagy minden éle egy pontból indul. A 1.2.2. tételből egyszerű elemi konstrukcióval levezethető a következő.

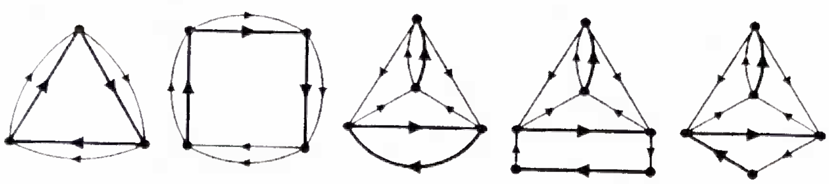
1.2.3 TÉTEL *Legyen G+H irányitott Euler gráf és H álljon két csillag egyesitéséből. Ekkor az irányitott vágás feltétel szükséges és elegendő az irányitott élidegen útprobléma megoldhatóságához.*■■■

Egyfajta értelemben a tételben szereplő H a lehető legáltalánosabb.

Nevezzünk egy irányitott H gráfot *megfelelőnek*, ha G+H-ban az irányitott vágás feltétel elegendő az irányitott élidegen útprobléma megoldásához minden olyan G gráfra, amelyre G+H irányitott Euler gráf.

1.2.4 TÉTEL *H akkor és csak akkor megfelelő, ha két csillag egyesitése.*

BIZONYITÁS. Az 1.2.3. tétel az "akkor" rész. A "csak akkor" irány bizonyitására tekintsük az alábbi ábrán lévő öt példát



2.2.ábra

Ezekben az irányitott vágás feltétel teljesül, de a keresett élidegen utak mégsem léteznek. Szükségképpen, ha egy H gráf alkalmas, akkor nem tartalmazhatja részgráfként a szereplő öt igénygráf egyikét sem. Könnyű gyakorlat belátni, hogy ekkor H szükségképpen két csillag egyesitése. ∎∎∎

Bár a 1.2.3. tétel a megfelelő gráfok leirását adják, mégsem lehetünk teljes mértékben elégedettek. Ugyanis a fenti példák mindegyikében egy nagyon természetes szükséges feltétel nem teljesül:

FEDÉSI FELTÉTEL *Igényélek tetszőleges F' részhalmazára a megfelelő G-beli utakat lefogó G-beli élek minimális száma legalább az F' elemszáma.*

Az irányitott vágás feltétel ennek nyilvánvalóan speciális esete. Érdekes módon irányitatlan esetben a vágás feltétel és a fedési feltétel ekvivalens egymással. Irányitott esetben azonban a fenti páldák mutatják, hogy a fedési feltétel lehet ténylegesen erősebb.

További kutatási feladat olyan eseteket találni, ahol a fedési feltétel elegendő.

1.3. A PARITÁSI FELTÉTEL I.

Az 1.2. fejezetben két olyan esetet vizsgáltunk meg, amikor a vágás feltétel elegendő volt. Mostani célunk egy új szükséges feltétel bevezetése, valamint speciális esetek bemutatása, amikor e feltétel elegendőnek bizonyul.

Legyen G és H irányitatlan. Egy X halmazt illetve a $\nabla_G(X)$ vágást (G+H-ra nézve) ***páratlannak*** nevezünk, ha $d_G(X)+d_H(X)$ páratlan. A központi megfigyelés a következő. Az élidegen útproblémának tetszőleges megoldásában $\nabla_G(X)$-nek páratlan sok, és igy legalább egy éle nincsen használva. Ez egyszerű paritási megfontolással rögtön látható.

A paritási érv szemléletesen szólva azt jelenti, hogy G néhány élét nem lehet használni. Ugyanakkor egy megoldás valamely s(X) többletű vágásból legfeljebb s(X) kivételével minden élt használ, speciálisan, kritikus vágásnak minden éle szükségképpen felhasználásra kerül. E kétirányú hatásból különféle erősségű szükséges feltételeket keverhetünk ki. Például,

METSZET FELTÉTEL *Két kritikus halmaz metszete nem lehet páratlan.*

A feltétel valóban szükséges, ugyanis ha X és Y kritikus, akkor minden X és Y-ba lépő G-beli él felhasználásra kerül. Ha $X\cap Y$ páratlan, akkor a paritási érv szerint legalább egy $X\cap Y$-ba lépő él nem kerül felhasználásra. Márpedig egy $X\cap Y$-ba lepő él vagy X-be vagy Y-ba belép.

Az 1.1 ábrán látható gráf arra volt példa, hogy a vágás feltétel teljesül, de a keresett élidegen utak nem léteznek. Erre mindenesetre most általános magyarázatot látunk, hiszen a példában nem teljesül a metszet feltétel.

P.Seymour [1981] bizonyitotta be a következőt. Legyen G+H sikbeli és álljon H két pontpár közötti párhuzamos élekből. Tegyük fel továbbá, hogy a vágás feltétel teljesül, de az élidegen útproblémának nincs megoldása. Ekkor G bizonyos élei úgy összehúzhatók, hogy a keletkező G' gráfnak négy csúcsa van és ebben sincs megoldása az élidegen útproblémának. Seymour tételét kicsit finomitva belátható, hogy ebben az esetben a vágás és a metszet feltétel együtt elegendő. A szakasz fő eredménye [Frank 1988] ezt a finomitást általánositja.

1.3.1 TÉTEL *Tegyük fel, hogy G+H sikbeli és az igényélek G-nek legfeljebb két tartományán helyezkednek el. Az élidegen útproblémának akkor és csak akkor van megoldása, ha a vágás és a metszet feltétel teljesül.*

BIZONYITÁS. A d_G függvény szubmodularitása helyett a következő pontosabb egyenlőséget fogjuk használni. $A,B \subseteq V$ halmazokra

$$(1.3.1) \qquad d_G(A) + d_G(B) = d_G(A \cap B) + d_G(A \cup B) + 2d_G(A,B)$$

Szükségünk lesz egy komplikáltabb összefüggésre is, amit Tardos Gábor figyelt meg. Legyen a V halmaz öt halmazra particionálva: A,M,N,X,Y. Ekkor

$$(1.3.2) \qquad d(X \cup M) + d(Y \cup M) + 2d(A,N) = d(X \cup N) + d(Y \cup N) + 2d(A,M).$$

Mindkét összefüggés bizonyitása annak kimutatásából áll, hogy tetszőleges él a szóbanforgó egyenlőség két oldalához ugyanannyival járul hozzá.

1.LEMMA *Tegyük fel, hogy fennáll a vágás feltétel. (a) Ha A és B kritikus és $d_H(A,B)=0$, akkor mind $A \cap B$, mind $A \cup B$ kritikus és $d_G(A,B)=0$. (b) Ha A és B kritikus és $d_H(A,V-B)=0$, akkor mind A-B, mind B-A kritikus és $d_G(A,V-B)=0$.*

BIZONYITÁS. Alkalmazva (1.3.1)-t G-re és H-ra nyerjük:

$$d_H(A)+d_H(B) = d_G(A)+d_G(B) = d_G(A \cap B)+d_G(A \cup B)+2d_G(A,B) \geq d_H(A \cap B)+d_H(A \cup B)+2d_G(A,B) = d_H(A)+d_H(B)+ 2(d_G(A,B)-d_H(A,B)),$$

amiből a lemma (a) része következik. A (b) részt úgy kapjuk, hogy (a)-t alkalmazzuk A és $\bar{B}$-re. ■■

Legyen $\nabla(K)$ G-nek egy nem csökkenthető vágása és C egy tartományt határoló köre. A síkbeliség miatt $\nabla(K)$ és $E(C)$-nek vagy 0 vagy 2 közös éle van. E tulajdonságot gyakran használjuk majd a bizonyitás során.

Emlékezzünk rá, hogy ha a vágás feltétel megsérül, akkor egy nem csökkenthető vágás is megsérti. Analóg állitás érvényes a metszet feltételre.

2.<u>LEMMA</u> *Tegyük fel hogy a vágás feltétel teljesül G és H-ra vonatkozólag, de a metszet feltétel nem. Ekkor léteznek olyan S és T halmazok, melyek megsértik a metszet feltételt és mind $\nabla(S)$ mind $\nabla(T)$ nem csökkenthető vágások.*

BIZONYITÁS Legyen S és T két olyan halmaz, amely megsérti a metszet feltételt, és amelyekre $k(S)+k(T)$ minimális, ahol $k(X)$ a $G-\nabla(X)$ komponenseinek számát jelöli. Megmutatjuk, hogy $\nabla(S)$ nem csökkenthető vágás. Valóban, ellenkező esetben S és $V-S$ egyike legalább, mondjuk S, felbontható két nemüres S'és S'' halmazra melyekre $d_G(S',S'')=0$. Mivel $\nabla(S)$ kritikus, $\nabla(S')$ and $\nabla(S'')$ is kritikus.

Továbbá $d_{G+H}(S'\cap T)$ és $d_{G+H}(S''\cap T)$ közül pontosan egy, mondjuk az első, páratlan. Ezért S' és T szintén megsérti a metszet feltételt. Azonban könnyen látható, hogy $k(S')<k(S)$, ellentétben S and T minimális választásával. ∎

Térjünk most rá a tétel bizonyitására. A feltételek szükségességét láttuk már. Az elegendőség bizonyitásához induljunk ki egy minimális $G+H$ ellenpéldából. Ekkor G 2-összefüggő, mivel különben a probléma könnyen felbontható kisebb problémákra.

Tegyük fel, hogy a terminál párok a C_1 és C_2 tartományokon vannak, és hogy C_1 a külső tartomány. Mivel G 2-összefüggő, minden tartományt kör határol. Nem fog zavart okozni, hogy nem teszünk különbséget egy tartomány és az azt határoló gráf-kör között.

Egy igényelt illetve két végpontját nevezzük *1-es* illetve *2-es tipusúnak* annak megfelelően, hogy a C_1 illetve a C_2 tartományon van.

Mivel G+H síkbeli, léteznek P' és P" belsőleg diszjunkt részutak a C_1 körön úgy, hogy a P' s',t' végpontjai és a P" s",t" végpontjai 1-es típusúak és P', P" egyike sem tartalmaz a belsejében 1-es típusú terminált. (Az előfordulhat, hogy {s',t'}={s",t"}.)

Töröljük G-ből a P' éleit és töröljünk H-ból egy s' és t' közötti igényélt (vagyis G+H-ból törlünk egy kört). A kapott gráfokat jelöljük G'ill. H'-vel. Definiáljuk G"-t és H"-t analóg módon.

3.LEMMA *A vágás feltétel (G',H') és (G",H") közül legalább az egyikre fennáll.*

BIZONYITÁS. Ha G'és H'-re nézve nem teljesül a vágás feltétel, akkor létezik egy kritikus $K \subseteq V$ halmaz, amelyre K és V-K is G-nek összefüggő részgráfját feszíti. Ekkor tehát $\nabla_G(K)$ is G-nek nem csökkenthető vágása. Ezért P' és $\nabla_G(K)$-nak legfeljebb két közös éle van. Mivel a vágás feltétel teljesül K-ra és H-ra nézve, $\nabla_G(K)$ nem választja el az s' és t' pontokat és $s(K) \leq 1$. Felcserélve K és V-K szerepét, ha szükséges, feltehetjük, hogy $s', t' \notin K$ és $K \cap V(P') \neq \emptyset$. P' választása szerint $\nabla(K)$ nem választ el 1-es típusú terminál párt. Kihasználva, hogy $d_G(K) > 2$ (mivel G 2-összefüggő) és hogy $s(K) \leq 1$, látható, hogy $\nabla(K)$ elválaszt egy 2-es típusú terminál párt.

Hasonlóan látható, hogy ha a vágás feltétel nem teljesül a G" és H"-ra nézve, akkor van egy olyan $L \subseteq V$ halmaz, amelyre $s(L) \leq 1$, $s'', t'' \notin L$, $L \cap V(P'') \neq \emptyset$ és L elválaszt egy 2-es típusú terminál párt.

Mivel mind K, mind L tartalmaz C_2-ről pontot, a síkbeliség miatt s' és t' nem lehet $G-(K \cup L)$-nek ugyanabban a komponensében. Nyilvánvaló, hogy létezik C_1-nek olyan Q része, amely összeköti s'-t az s" és t" valamelyikével, mondjuk s"-vel úgy, hogy Q és $K \cup L$ diszjunktak. Azaz s' és s" $G-(K \cup L)$-nek ugyanabban a komponensében vannak. Ily módon $V-(K \cup L)$ particionálható A és N halmazokra úgy, hogy $s', s'' \in N$, $t', t'' \in A$ és $d_G(A,N)=0$. Bevezetjük a következő jelölést: $M := K \cap L$, $X =: K-L$, $Y := L-K$.

ÁLLITÁS *$d_H(A,M)$ és $d_H(N,M)$ közül legalább az egyik nulla.*

BIZONYITÁS. Tegyük fel hogy $d_H(A,M) > 0$. Ekkor van egy olyan (s_1, t_1)

terminál pár, amelyre $t_1 \in M$ és $s_1 \in A$. Mivel $M \cap V(C_1)=\emptyset$, a (s_1,t_1) terminál pár 2-es tipusú. Hasonlóképp, ha $d_H(N,M)>0$, akkor az (s_2,t_2) terminál pár 2-es tipusú és $t_2 \in M$ és $s_2 \in N$.

$\nabla(K)$ és $E(C_2)$-nek nincs közös éle. Mivel t_1 és t_2 K-ban van, de s_1 és s_2 nincs, G+H sikbelisége folytán e négy csúcs ciklikus sorrendje C_2 mentén t_1, t_2, s_1, s_2.

Mivel $\nabla(L)$ és $E(C_2)$-nek nincsen közös éle, fennáll, hogy $t_1,t_2 \in L$ és $s_1,s_2 \notin L$. Ebből látható, hogy C_2-nek az s_1 és s_2 közötti t_1-et nem tartalmazó teljesen $G-(K \cup L)$-ben van. De ez lehetetlen, mert $s_1 \in A$, $s_2 \in N$ és $d_G(A,N)=0$. ∎

Az állítás nyomán feltehetjük, hogy mondjuk $d_H(A,M)$ nulla. Azt már tudjuk, hogy $d_G(A,N)=0$ és $d_H(A,N)>0$. (1.3.2)-t alkalmazva G és H-ra, nyerjük a következőt:

$$2=1+1 \geq s(X \cup M)+s(Y \cup M)= s(X \cup N)+s(Y \cup N)+ 2[d_G(A,M)-d_H(A,M)]- 2[d_G(A,N)-d_H(A,N)]= s(X \cup N)+s(Y \cup N)+ 2[d_G(A,M)+d_H(A,N)] \geq 0+0+ 2[0+1]= 2.$$

Ebből adódóan végig egyenlőségnek kell teljesülnie, és speciálisan $s(K)=s(L)=1$, $s(X \cup N)=s(Y \cup N)=0$, $d_G(A,M)=0$, $d_H(A,N)=1$. Az is következik, hogy egyetlen 1-es tipusú igényél van. Szimmetria okokból feltehető, hogy egyetlen 2-es tipusú igényél van. Ezért$d_G(K)=2=d_G(L)$ és $d_H(K)=1=d_H(L)$. (Ez azt is jelenti, hogy G-be a K-át elhagyó két él a C_1 és a C_2 köröknek közös éle)

Most $M=K \cap L$-nek üresnek kell lennie, mert ha M-ben létezne v csúcs, akkor létezik K-ban haladó G-beli út v-ből P'-höz. De ilyen út L-et csak olyan él mentén hagyhatná el, amely nincs C_1-ben, és ekkor $d_G(L) \geq 3$ volna. Látjuk tehát, hogy K=X és L=Y.

Miután M üres, $d_H(N,M)=0$. Ezért (1.3.2) alkalmazható az A és az N szerepének felcserélésével. Azt kapjuk, hogy $Y \cup A$ kritikus. Legyen $S=:V-(Y \cup A)$ $(=X \cup N)$ és $T:=V-(Y \cup N)$ $(=X \cup A)$. Most S és T megsérti a metszet feltételt, hiszen S és T kritikus, $K=S \cap T$ és $d_{G+H}(K)=3$, ami páratlan szám. ∎∎

A 3. lemma alapján feltehetjük, hogy a vágás feltétel érvényes G' és H'-re nézve.

4.LEMMA *A metszet feltétel érvényes G' és H'-re nézve.*

BIZONYITÁS. Tegyük fel , S és T megsérti a metszet feltételt a G' és H'-re nézve. A 2. lemma szerint feltehetjük, hogy S, $V-S$, T, $V-T$ mindegyike G'-nek összefüggő részgráfját feszíti. Ezért $\nabla_G(S)$ és $\nabla_G(T)$ nem csökkenthető vágások és mindegyiküknek legfeljebb két közös éle van $E(C_1)$-gyel.

ÁLLITÁS *$\nabla(S)$ és $\nabla(T)$ elválaszt 1-es és 2-es tipusú terminál párt is.*

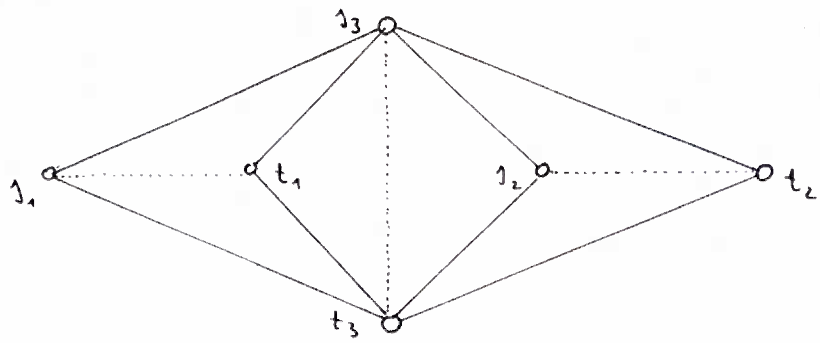
BIZONYITÁS. Ha S és T kritikus és $d_{G+H}(S\cap T)$ páratlan, akkor $d_{G+H}(S-T)$ is páratlan. Ezért sem $S\cap T$ sem $S-T$ nem lehet kritikus. Az 1. lemma szerint $d_H(S,T)>0$ és $d_H(S,V-T)>0$. Ezért vannak (s_1,t_1) és (s_2,t_2) terminál párok, melyekre $s_1\in S-T$, $t_1\in T-S$, $s_2\in S\cap T$, $t_2\in V-(S\cap T)$. Ezen két terminál pár nem lehet ugyanolyan tipusú. Valóban, legyen mondjuk mindkét terminálpár 1-es tipusú. Ha s_1 és s_2 nincsen a C_1 mentén a t_1 és t_2 által elválasztva, akkor $\nabla(T)$ és $E(C_1)$-nek 2-nél több közös éle van. Ha s_1 és s_2 el van választva t_1 és t_2 által, akkor $\nabla(S)$ és $E(C_1)$-nek kettőnél több közös éle van, ellentmondás ∎

Ha S és P'-nek nincs közös pontja, akkor $\nabla(S)$ kritikus G-re és H-ra nézve. Ha S és P' nem diszjunktak, akkor az állítás és P' választása folytán $\nabla(S)$ elválasztja az s' és t' pontokat, és ezért S ebben az esetben is kritikus G és H-ra nézve. Hasonlóképp T is kritikus G és H-ra nézve. Mivel $d_{G+H}(X)$-nak és $d_{G'+H'}(X)$-nak minden $X\subseteq V$ halmazra ugyanaz a paritása, azt kapjuk, hogy S és T a G és H-ra nézve is megsérti a metszet feltételt, ellentmondás.∎∎

Eddig beláttuk, hogy mind a vágás, mind a metszet feltétel fennáll $G'+H'$-re. Igy itt az élidegen út problémának már van megoldása. De ez a megoldás a P' úttal együtt az élidegen út problémának az eredeti

G+H-ra vonatkozó megoldását szolgáltatja, ellentmondva G+H ellenpélda voltának.∎∎∎

A tételnek egyszerű következménye, hogy az adott esetben ha a vágás feltétel minden (nemtriviális esetben) szigorúan teljesül, azaz, nincsen kritikus vágás, akkor az élidegen út problémának van megoldása. A következő E.Korachtól származó példa mutatja, hogy ez az állítás, és ezért az 1.3.1-es tétel sem igaz, ha az igényélek G-nek három ablakán helyezkedhetnek el.



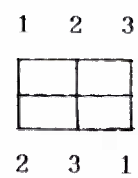
3.2.ábra

A leirt bizonyitásból könnyen készithető polinom futásidejű algoritmus, csupán arra kell módot találalni, hogy a vágás feltételt ellenőrizzük. (A részletek [Frank 1988]-ban találhatók].

1.4 A PARITÁSI FELTÉTEL II.

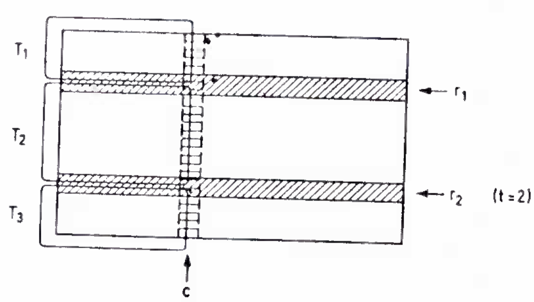
Az 1.3 szakaszban foglalkoztunk azzal az esettel, amikor a $G=G_T$ gráf egy négyzetrácsnak valamely T téglalap által határolt része, a terminálok különbözők és T-nek a felső illetve az alsó határolóvonalán helyzkednek el. Az 1.2.1 tétel azt mondta, hogy két kis külön kikötés valamelyikének fennállása esetén a vágás feltétel elegendő az élidegen útprobléma megoldásához. Most megvizsgáljuk, mi történik, ha ezen extra kikötések nem teljesülnek, továbbá a terminálok a kerületén (azaz a G síkgráf végtelen tartományán) tetszőlegesen helyezkednek el. A terminálok különbözőségét továbbra is megköveteljük. (Egy későbbi tételben már majd ezt is el lehet engedni.) A szakasz a [Frank 1981, 1985] dolgozatok anyagából való.

Az alábbi példa mutatja, hogy ilyen esetben a vágás és a metszet feltétel általában nem elegendő.



4.1 ábra

Megfogalmazunk egy erősebb szükséges feltételt. Legyen r_1, $r_2,\dots,$ r_t a telitett sorok halmaza ($t>0$), és válasszunk ki egy tetszőleges c oszlopot. Hagyjuk el az r_i éleit. Ekkor c baloldalán t+1 darab komponens keletkezik.: $T_1,\dots,T_{t+1}$



4.2 ábra

Jelölje q(c) a $T_1,\dots,T_{t+1}$ halmazok közül azok számát, melyek páratlanok G+H-ra vonatkozólag.

Valamely r sorra a q(r) számot analóg módon definiáljuk. Tekintsük mármost az egyik páratlan T_i halmazt. A paritási meggondolás szerint az élidegen út probléma bármely megoldása legalább egy élt nem használ $\nabla(T_i)$-ből. De ilyen él nem lehet telitett vágásban, igy szükségképpen a c oszlopban van. Következésképp a c élei közül legalább q(c) nem lesz használva. Ez azt jelenti, hogy a q(c) szám nem múlhatja felül a c vágás s(c) többletét. A következő tétel [Frank 1981]-ben szerepelt.

<u>1.4.1 TÉTEL</u> *Tegyük fel, hogy a négyzetrácsban adott egy T téglalap és annak határán k darab, különböző pontokat használó terminál pár. A T által határolt G_T gráfban az élidegen útproblémának akkor és csak akkor létezik megoldása, ha $q(c) \leq s(c)$ minden c oszlopra és $q(r) \leq s(r)$ minden r sorra fennáll.*

BIZONYITÁS. Szükségünk van a következő H.Okamurától és P.Seymourtól származó tételre.

<u>SEGÉDTÉTEL</u> [Okamura-Seymour] *Tegyük fel G sikgráf, G+H Euler gráf és a (nem feltétlenül különböző) terminálpontok G-nek egy egyetlen tartományán helyezkednek el. Ekkor az élidegen útproblémának a vágás feltétel szükséges és elegendő feltétele.*∎

A mi G_T gráfunk meglehetősen speciális, és ilyenkor, amint az egyszerűen ellenőrizhető, a vágás feltételt nem kell az összes lehetséges vágásra megkövetelni, hanem elég csak oszlopokra és sorokra.

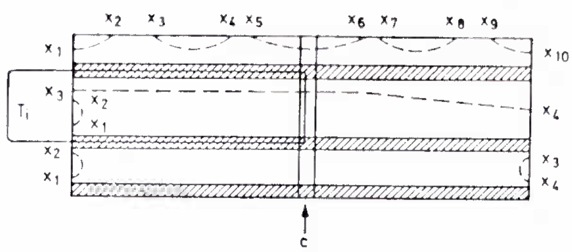
A tétel bizonyitásának alapgondolata az, hogy a T kerületén lévő, G+H-ban páratlan fokú pontokat alkalmasan párba állitva új terminálpárokat jelölünk ki úgy, hogy a vágás feltétel érvényben maradjon, majd alkalmazzuk az Okamura-Seymour tételt.

Legyenek a telitett oszlopok $r_1,\dots,r_t$ $(t\geq 0)$ és a telitett oszlopok $c_1,\dots,c_s$ $(s\geq 0)$. Az ezekben lévő éleket mind kihagyva a gráf $(t+1)(s+1)$ komponensre bomlik, melyek mindegyike páros sok olyan pontot tartalmaz, amely G+H-ra nézve páratlan. Tekintsünk egy ilyen C komponenst és legyenek az ebben szereplő páratlan pontok v_1, $v_2,\dots, v_{2l}$, T kerületén körbehaladva ebben a sorrendben. A H igénygráfhoz vegyük hozzá a v_1v_2, v_3v_4,..., $v_{21-1}v_{21}$ igényéleket, és minden szóban forgó komponensre végezzük el ugyanezt. A megnövelt igénygráfot jelölje H'.

ÁLLITÁS. A sor és oszlop feltétel teljesül G és H'-re vonatkozólag.

BIZONYITÁS. Csak az oszlop feltételt bizonyitjuk, a sorfeltétel szimmetrikus. Legyen c tetszőleges oszlop. Ha c eredetileg kritikus, akkor nem választ el semmilyen új terminál párt, igy c terhelése nem nőtt, ezért H'- re nézve is kielégiti az oszlop feltevést. Tegyük fel c eredetileg nem kritikus és legfeljebb 2 új terminál párt szeparál. Ekkor c csak abban az esetben tudná az oszlop feltételt megsérteni, ha a eredeti többlete pontosan egy. De ez paritási okokból lehetetlen.

Tegyük most fel, hogy c kettőnél több új terminál párt választ el. Ekkor t>0 és s=0.



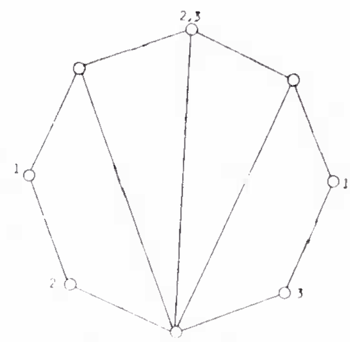
4.3 ábra

Figyeljük meg, hogy egy, a telitett sorok elhagyásával keletkező C komponensben legfeljebb egy új terminál pár létezhet, amelyet a c oszlop elválaszt, és pontosan akkor létezik ilyen, ha a megfelelő T_i páratlan. Ez azt jelenti, hogy a c oszlop pontosan q(c) új terminál párt választ el, és igy a tétel hipotézise alapján az oszlop feltétel G+H'-re nézve teljesül.∎∎∎

Megjegyzendő, hogy a fenti bizonyitás igen egyszerű algoritmust is szolgáltat az új párok megtalálására, továbbá, hogy az Okamura-Seymour tétel eredeti bizonyitása is polinomiális idejű algoritmushoz vezet.

Fennmarad a kérdés, hogy vajon nem létezik-e az 1.4.1 tételnek és az Okamura-Seymour tételnek közös általánositása. Tegyük fel, hogy G sikgráf, amelynek minden, nem a végtelen C tartományon lévő pontja páros fokú. Tételezzük továbbá fel, hogy a terminálpontok mind C-n vannak.

A 1.4.1 tételben lévő feltétel természetes kiterjesztése a következő. Legyen c tetszőleges vágás. Töröljük el a c vágás és az összes kritikus vágás éleit. Jelölje q(c) a c egyik oldalán keletkező G+H-ra nézve páratlan komponensek számát. Ekkor $q(c) \leq s(c)$ egyenlőtlenség a megoldhatóságnak nyilván szükséges feltétele. Sajnos nem elegendő, amint ezt a következő példa mutatja.

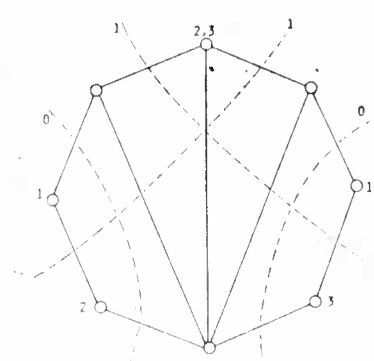


4.4 ábra

E feltétel egy további erősitése azonban már célba vezet.

<u>1.4.2 TÉTEL</u> *Adott G gráf és H igénygráf úgy, hogy G síkgráf, G-nek minden belső pontja páros fokú, a terminálok pedig a külső tartományon vannak. Az élidegen útproblémának akkor és csak akkor létezik megoldása, ha* (*) $\sum s(c_i) \geq q/2$ *teljesül minden* $\{c_1, c_2, \ldots c_l\}$ $(l \leq |V|)$ *vágás családra, ahol q jelöli a* $G' = G - c_1 - c_2 - \ldots - c_l$ *gráf azon komponenseinek számát, melyek páratlanok G+H-ra nézve.*

Megjegyzések. A 4.4 ábrán lévő példában az alábbi vágás család megsérti (*)-ot:



4.5 ábra

A 1.4.1 tételben levő feltétel lényeges előnye, hogy előre igen egyszerűen ellenőrizhető. Ez a (*) feltételre nem áll: az alábbi bizonyitás olyan eljárásként szolgál, amely vagy megtalálja a kivánt utakat, vagy a (*)-ot megsértő vágás családot.

BIZONYITÁS. Szükségesség. Tegyük fel, hogy a tételben szereplő utak léteznek, és jelöljük őket $P_1,\ldots,P_k$-val. Jelölje $Q_1,\ldots Q_q$ a G' gráf azon komponensei, melyek G+H-ra nézve páratlanok. A paritási érv szerint minden i-re, $1\le i\le q$, Q_i-nek legalább egyik Q_i-t elhagyó éle nem szerepel egyik P_j úton sem. Ily módon az ilyen kihagyott élek száma legalább q/2. Másrészt ezen élek mind a $c_1,\ldots,c_l$ vágások valamelyikében szerepelnek, ezért számuk nem múlhatja felül e vágások többlet összegét, ami épp (*) fennállását jelenti.

Elegendőség. Először is figyeljük meg, hogy (*), az l=1 esetre alkalmazva, a vágás feltételt magában foglalja. Megállapithatjuk, hogy ha egyáltalán nem létezik páratlan halmaz, akkor az Okamura-Seymour tétel alkalmazható, és ekkor készen vagyunk. Feltesszük tehát, hogy vannak páratlan halmazok, és ekkor persze vannak egyelemű páratlan halmazok is. A tételben szereplő feltételekből adódóan a páratlan pontok mind a külső tartományon helyezkednek el. Legyen ezek halmaza $T=\{a_1,\ldots a_{2n}\}$, ahol az indexek a külső tartományon történő elhelyezkedés sorrendjét tükrözik.

A bizonyitás alapgondolata ugyanaz, mint a megelőző tétel bizonyitásáé volt. Vagyis, a páratlan pontokat alkalmas módon összepárositjuk, és ezeket a párokat új összekötendő pontpároknak tekintjük. A megnövelt feladatban nincs már páratlan halmaz, igy az Okamura-Seymour tétel alkalmazható, feltéve, hogy a vágás feltétel teljesül. Ez annyit jelent, hogy a páratlan pontok összepárositása akkor "alkalmas", ha minden vágás legfeljebb annyi új párt szeparál, mint amennyi az eredeti többlete volt. Azt fogjuk kimutatni, hogy (*) teljesülése esetén ilyen alkalmas párositás mindig létezik.

Az $A_{i,j}=\{a_i,a_{i+1},\ldots,a_j\}$, $1<i\le j\le 2n$, halmazra definiáljuk a $p_1(A_{i,j})$ értéket a következőképpen: $p_1(A_{i,j}):=$ min(s(c): c a G gráf olyan vágása, amely elválasztja $A_{i,j}$ és $T-A_{i,j}$ halmazokat.

Megfigyelhetjük, hogy egy $A_{i,j}$ -t és $T-A_{i,j}$ -t elválasztó c vágás többlete ugyanolyan paritású, mint $A_{i,j}$ elemszáma, következésképp $p_1(A_{i,j})$ és $|A_{i,j}|$ paritása is megegyezik.

A bizonyitás kulcsa a következő lemma. A megfogalmazáshoz legyen D a T csúcshalmazon definiált teljes gráf. Egy $A_{i,j} = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j\}$, $1<i\leq j\leq 2n$, alakú nemüres halmazt nevezzünk *ivhalmaznak*. Legyen p olyan nemnegativ eghészértékű függvény az ivhalmazokon értelmezve, amelyre $p(X)$ és $|X|$ minden X ivhalmazra ugyanolyan paritású. Az $A_{i,j}$ halmaz első, a_i elemét jelöljük $e(A_{i,j})$-vel, mig az utolsó, a_j elemét $u(A_{i,j})$-vel.

<u>PÁROSITÁSI LEMMA</u>. *Az alábbi két lehetőség közük pontosan az egyik áll fenn.*

(i) A D teljes gráfban létezik olyan M teljes párositás, amelyre $d_M(X)\leq p(X)$ áll fenn minden X ivhalmazra.

(ii) Létezik ivhalmazoknak egy olyan $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_l\}$ családja, amelyre $e(A_i)\neq e(A_j)$ és $u(A_i)\neq u(A_j)$ és $\Sigma(p(A_i): A_i\in\mathcal{F}) < q/2$, ahol q jelöli a $D-\cup(\nabla_D(A_i): A_i\in\mathcal{F})$ páratlan pontszámú komponenseinek a számát.

A LEMMA BIZONYITÁSA. Indirekt tegyük először fel, hogy (i) és (ii) egyszerre teljesül. Jelölje $Q_1,\dots,Q_q$ az (ii)-ben szereplő páratlan komponenseket. Mivel $|Q_j|$ páratlan, M-nek páratlan számú éle lép ki belőle, és igy legalább egy. Következésképp M azon éleinek szám, melyek valamely Q_j-ből kilépnek, legalább $q/2$. Másrészt ez a szám nem lehet nagyobb mint $\Sigma(p(A_i): A_i\in\mathcal{F})$, és igy (i) és (ii) nem állhat fenn egyszerre.

Annak bizonyitása érdekében, hogy (i) és (ii) közül az egyik teljesül, tételezzük fel, hogy (ii) nem áll fenn. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset. Tegyük fel, hogy $p(A)>0$ minden A ivhalmazra. Állitjuk, hogy ekkor a kézenfekvő $M:=\{(a_1,a_2), (a_3,a_4),\dots, (a_{2n-1},a_{2n})\}$ párositás kielégiti (i)-t. Valóban, ekkor $d_M(A)\leq 2$ teljesül minden A ivhalmazra. Ha $d_M(A)\leq 1$ valamely A-ra, akkor $p(A)>0$ miatt $d_M(A)\leq p(A)$. Ha $d_M(A)=2$, akkor $|A|$ és $p(A)$ is páros, igy $p(A)\leq 2$.

2.eset. Tegyük fel, hogy $p(A_o)=0$ valamely ivhalmazra. Válasszuk A_o-t minimálisnak. Ekkor $|A_o|$ páros, és a pontok esetleges átszámozasaval elérhető, hogy $A_o=\{a_{2k+1},\dots,a_{2n}\}$ valamely k-ra, $1<k<n$.

Definiáljunk most egy kisebb párositási problémát a $T'=\{a_1,\dots,a_{2k}\}$ csúcshalmazon megadott D' teljes gráfra vonatkozólag a következő p' függvény segitségével. A D' teljes gráf valamely $A_{i,j}$ ivhalmazára, $1<i\leq j\leq 2k$, legyen

$$p'(A_{i,j})=\begin{cases} p(A_{i,j}) & \text{ha } j<k \\ \min(m_1,m_2) & \text{ha } j=k \end{cases}$$

ahol $m_1=\min(p(A_{i,2s-1}): s=k+1,\dots,n)$ és $m_2=\min(p(A_{i,2s}): s=k,\dots,n)$. Nyilvánvalóan $p'(A)$ és $|A|$ egyforma paritásúak és $p'(A)\geq 0$.

<u>ALLITAS</u> *(ii) nem állhat fenn D' és P'-re vonatkozólag.*

BIZONYITAS. Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy $\mathcal{F}'$ család, amely D' és p'-re nézve kielégiti (ii)-t. Ekkor megkonstruálunk D ivhalmazainak egy $\mathcal{F}$ családját, amely D és P-re nézve kielégiti (ii)-t. Ilyen $\mathcal{F}$ létezése ellent fog mondani feltevésünknek.

Ha nincs a_{2k}-t tartalmazó ivhalmaz $\mathcal{F}'$-ben, akkor $\mathcal{F}:=\mathcal{F}'$ kielégiti (ii)-t D és P-re nézve. Ha létezik ilyen A ivhalmaz, akkor csak egy létezhet, és az legyen $A=A_{i,2k}$ valamely i-re, $1<i\leq 2k$. Ha $p'(A_{i,2k})=p(a_{i,2s})$ valamely s-re, $k\leq s\leq n$, akkor $\mathcal{F}:=\mathcal{F}'-\{A_{i,2k}\}\cup\{a_{i,2s}\}$ kielégiti (ii)-t D és p-re nézve. Ha $p'(A_{i,2k})=p(a_{i,2s-1})-1$ valamilyen s-re, $k+1\leq s\leq n$, akkor $\mathcal{F}:=\mathcal{F}'-\{A_{i,2k}\}\cup\{A_{i,2s-1},A_o\}$ kielégiti az (ii) feltételt a D és p-re nézve, ezzel az állitás bizonyitása teljes. ∎

Az indukciós hipotézist D' és p'-re alkalmazva azt kapjuk, hogy D'-nek létezik egy olyan M' teljes párositása, amely kielégiti (i)-t D' és p'-re nézve. Definiáljuk D-ben az alábbi teljes párositást.

$M:=M'\cup\{(a_{2k,2k+1}), \ldots, (a_{2n-1,2n})\}.$

ÁLLITÁS. *M kielégiti az (i) feltételt a D és p-re nézve.*

BIZONYITÁS. M és p' konstrukciója folytán tudjuk, hogy $d_M(A_{i,j}\leq p(A_{i,j})$ fennáll minden olyan i,j indexre, amelyeknél $1<i\leq 2k$. Olyan $A_{i,j}$ ivhalmazokra, melyeknél $2k<i\leq j\leq 2n$ az A_o minimális választása folytán $p(A_{i,j})>0$, amiből $d_M(A_{i,j}\leq p(A_{i,j})$ ismét következik.∎

Az állitás bizonyitásával a párositási lemma bizonyitása is teljessé vált.∎∎

Visszatérve a tétel bizonyitásához, alkalmazzuk a párositási lemmát a $p=p_1$ függvényre. Ha (i) teljesül, akkor megkaptuk a páratlan pontok keresett alkalmas összepárositását, és készen cagyunk. Ha (ii) áll fenn, akkor tekintsük az (ii)-t kielégitő $\mathcal{F}:=\{A_1,..A_l\}$ csládot. Legyen c_i olyan vágása G-nek, amely elválasztja az A_i és $T-A_i$ halmazokat és amelyre $s(c_i=p_1(A_i)$. Azt állitjuk, hogy a $c_1,\ldots,c_l$ vágások megsértik (*)-ot. Hogy ezt belássuk, először figyeljük meg, hogy $G':=G-c_1-\ldots-c_l$ gráf semelyik komponense sem tartalmazhat olyan pontokat, melyek a $D-\cup(\nabla_D(A_i)$: $i=1,\ldots,l)$ gráf különböző komponenseihez tartoznak. Legyen X az utóbbi gráf páratlan pontszámú komponense. Az X pontjai a G' egy vagy több komponenséhez tartozhatnak, de ezek közül legalább az egyik, jelöljük Y-nal, bizonyosan páratlan sok X-beli pontot tartalmaz. Ez viszont azzal ekvivalens, hogy Y páratlan G+H-ra nézve.

Következésképp, G'-ben legalább q darab komponens páratlan G+H-ra nézve és $\sum s(c_i)<q/2$, ami ellentmond (*) feltételnek. Ezzel a tétel bizonyitása teljes.∎∎∎

MEGJEGYZÉSEK , KÖVETKEZMÉNYEK

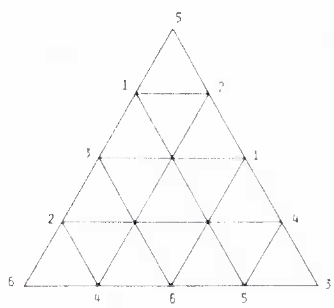
A fejezetet néhány következménnyel és megjegyzéssel zárjuk. Gyakorlati alkalmazások szempontjából (huzalozás tervezésben) valószinüleg a négyzetrács modell jut a legnagyobb szerephez. Ebből a szempontból a 1.4.1 tétel jelentősége abban áll, hogy segitségével a 1.3.1 tétel kapacitásos változata is kezelhetővé válik. Tegyük fel például, hogy a négyzetrács mindegyik vizszinte vonalának és mindegyik függőleges vonalának adott egy pozitiv egész kapacitása. Megengedett továbbá, hogy a terminál pontok egybe essenek. A feladat olyan összeköttetést találni, ahol minden vonalon legfeljebb csak annyi út halad, mint az illető vonal kapacitása.

Korábban emlitettük, hogy a (*) feltétel közvetlenül nem ellenőrizhető. Ezért indokolt olyan csupán elegendő feltételt keresni, amely egyszerűen kezelhető.

1.4.3 TÉTEL *Ha G sikgráf, az összekötendő pontok a külső tartományon helyezkednek el, minden belső pont foka páros és minden (nemüres) vágás többlete szigorúan pozitiv, akkor az élidegen útproblémának létezik megoldása.*

BIZONYITÁS. A párositási lemma bizonyitásánál láttuk, hogy ha p_1 mindenütt szigorúan pozitiv, akkor minden további feltétel nélkül, már bizonyosan létezik alkalmas párositás. Márpedig, ha minden vágás többlete pozitiv, akkor a párositási lemmábam definiált p_1 függvény is mindenhol pozitiv, igy a tétel következik.■■■

E tétel meglepő következménye az alábbi. Tekintsünk a sikban lévő háromszög rácsban egy három különböző irányú rácsvonal által körülhatárolt T tartományt. A G gráf legyen a T által a rácsból kivágott rész.



4.6 ábra

Ekkor minden belső pont foka 6. Az összekötendő pontpárok a külső tartományon helyezkednek el, és ezúttal különbözők.

1.4.4 KÖVETKEZMÉNY *A háromszögrács modellben a fenti körülmények között az élidegen útproblémának mindig van megoldása.*

BIZONYITÁS. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy esetünkben minden vágásra a vágás feltétel szigorúan teljesül, ezért a 1.4.2 tétel alapján készen vagyunk.■■■

A sikgráfoknak gyakran vizsgált speciális osztályát alkotják az ún. külsikgráfok (outerplanar). Egy sikgráfot akkor nevezünk *külsikgráfnak*, ha csúcsai egyetlen tartományon helyezkednek el. (A 4.3 ábrán látható páldában is G külsikgráf). Nyilvánvalo, hogy a 1.4.2 tételben megfogalmazott gráfosztály a küsikgráfokat magában foglalja, azaz az élidegen útprobléma külsikgráfokra jól karakterizálható.

A 1.4.2 tételben leirt bizonyitás az Okamura-Seymour problémát megoldó algoritmussal ötvözve egy $O(|E||V|^4)$ nagyságrendű algoritmushoz vezet. Megjegyezzük, hogy a kapacitásos eset is erősen polinomiális időben kezelhető. Ennek részletei [Frank 1985]-ben szerepelnek.

2. DISZJUNKT HOMOTÓP UTAK

2.1 BEVEZETÉS

A diszjunkt utak problémájának egyfajta változata a következő. Adott egy $G=(V,E)$ síkgráf, a síkba történő beágyazásával együtt. Tegyük fel, hogy G-nek ki van jelölve néhány véges tartománya, melyeket lyukaknak fogunk nevezni. Ezenkívül a végtelen tartományt is mindig kijelöltnek tekintjük.

Az összekötendő pontok mind valamely lyuk vagy a végtelen tartomány határán vannak. Tekintsünk most egy s,t összekötendő pontpárt. Az s és t pontokat összekötő görbéket a síkban osztályozhatjuk annak megfelelően, hogy a görbék a lyukak között, szemléletesen szólva, hogyan haladnak el, milyen homotópiájúak.

Két utat akkor nevezünk homotópikusan ekvivalensnek, vagy röviden homotópnak, ha az egyik folytonosan a másikba vihető anélkül, hogy közben lyukon átlépnénk. A diszjunkt homotóp utak problémájában nem csupán az összekötendő pontpárok vannak adva, hanem minden tervezendő útra előírjuk a homotópiáját is.

Kiderül, hogy a diszjunkt homotóp utak problémája jobban támadható, mint a kiindulási diszjunkt út feladat. Nyilvánvalóan meg kell követelnünk, hogy az előírt homotópiák a síkban keresztezés mentesen legyenek lerajzolhatók. Ezt mindig automatikusan feltesszük. Ezenkívül megfogalmazzuk a vágás feltétel idevonatkozó megfelelőjét. Legyen adva egy G síkgráf a síkba beágyazva. *Pont-duál úton* egy olyan $T_1,v_1,T_2,v_2,\dots,v_{k-1},T_k$ sorozatot értünk, amelyben a v_i tagok a G csúcsai, a T_i tagok a G tartományai és v_i rajta van mind a T_i mind a T_{i+1} tartományon.

PONT-DUÁL ÚT FELTÉTEL. Minden P pont-duál út legalább annyi pontot tartalmaz, mint ahány megadott homotópia osztály szükségszerűen árkeresztezi P-t.

Általános síkgráf esetén a pont-duál út feltétel még egyetlen út létezéséhez sem elegendő. Ha azonban csak két kijelölt tartomány van, akkor a pont duál út feltétel már elegendő:

2.1.1 TÉTEL [N.Robertson és P.Seymour]) *Ha csupán két kijelölt* *tartomány van, az O végtelen taromány és egy I-vel jelölt másik, és minden terminál pár egyik tagja O-n, a másik tagja I-n van, akkor a diszjunkt homotóp utak létezésének a pont-duál út feltétel szükséges és elegendő feltétele.*

Valójában a tétel érvényes akkor is, ha megengedünk olyan terminál párokat, melyek mindkét tagja vagy O-n vagy I-n van, ez azonban könnyen beláthatóan nem jelent lényeges általánositást.

Megjegyzendő, hogy A.Schrijver legújabban teljes általánosságban megoldotta a diszjunkt homotóp utak problémáját. Jelen célunk a Robertson- Seymour tétel egy más irányú kiterjesztése.

2.2 MAXIMALIZÁLÁS

Az 2.1.1. tételben a pont-duál út feltételeket két csoportba sorolhatjuk. Az elsőbe azok tartoznak, melyeknél a duál út az I tartományt megkerülő zárt görbe. Ha csak ezekre követeljük meg a duál út feltételt, akkor a Menger tétel egy változata alapján a külső k terminál pontból létezik k diszjunkt út a belső k terminál ponthoz. Az ilyen fajtájú feltételekre Menger-feltételként fogunk hivatkozni. Persze nem biztos, hogy igy a külső s_i terminált a neki megfelelő belső t_i-hez kötöttük, vagy ha véletlenül igen, akkor se biztos, hogy a kapott út az előirt homotópiájú.

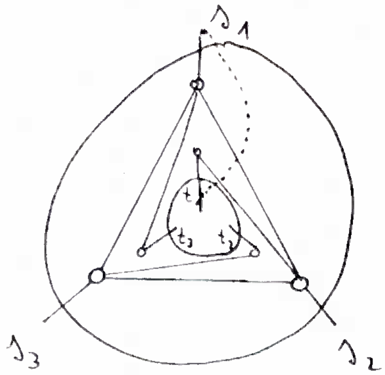
A másik tipusú duál út, amelyre a feltétel szól, I-t köti össze O-val. Eközben természetesen sokszor körbejárhatja I-t. Az ilyen pont-duál utakat *spirálnak* fogjuk hivni és a rájuk vonatkozó pont-duál út feltételt spirál feltételnek.

Hivjunk egy pont-duál utat *egyszerűnek*, ha a definiáló csúcs--tartomány sorozatában se csúcs, se tartomány nem ismétlődik.

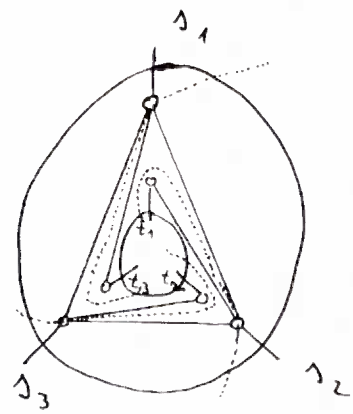
A Robertson-Seymour tételt vizsgálva természetesen vetődik fel a kérdés: mi van, ha a Menger vagy a spirál feltételek megsérülnek. Ekkor a megadott pontpárok között maximálisan hány adott homotópiájú diszjunkt út létezik? A továbbiakban a G-ben valamely terminál párt a megadott homotópiával összekötő utat *választhatónak* mondunk.

Az 1a.ábrán 3 összekötendő pontpár van adva. Pontozott vonal jelzi a megkivánt homotópiát. A Menger feltétel teljesül, mert a három külső terminál pontból vezethető 3 diszjunkt út a belső terminál pontokhoz. A spirál feltétel viszont megsérül: A szaggatott vonallal jelzett pont-duál út két terminál párt elválaszt, ugyanakkor csak egy csúcsot tartalmaz. Ily módon nem létezhet a három diszjunkt választható út.

Valójában nemhogy három, de még két ilyen út sem létezik, amint ezt ránézéssel könnyen megállapithatjuk.



2.1a.ábra



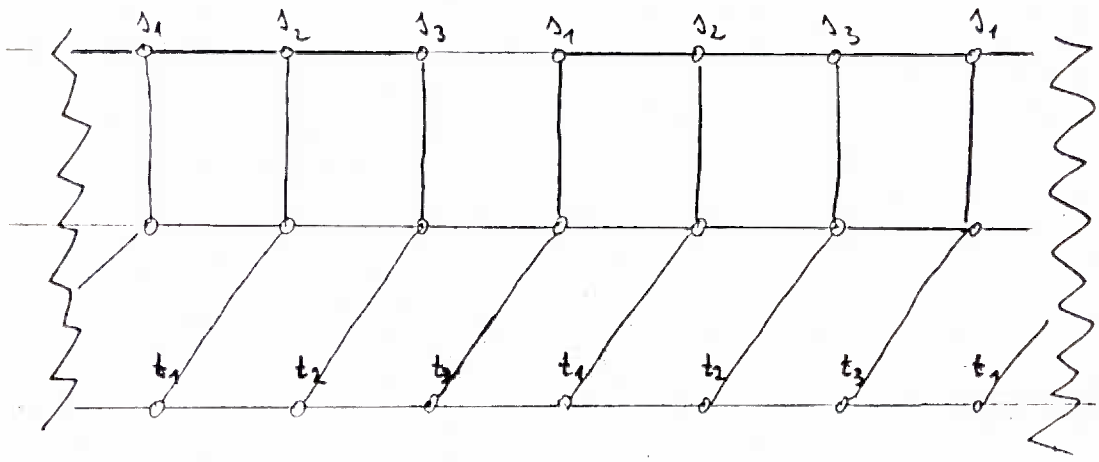
2.1b.ábra

Mi ennek az oka? Az 2.1b ábrán három spirált rajzoltunk be. Ezek együtt bármelyik választható utat legalább kétszer metszik. Igy ha azt akarjuk, hogy létezzék két diszjunkt választható út, akkor e három spirálnak együttesen legalább négy csúcsot kellene tartalmazna. Miután csak hármat tartalmaznak, a két út nem létezhet. Az alábbi tétel fő tartalma az, hogy csak ilyen tipusú bajok gátolhatják meg a keresett számú út létezését.

<u>2.2.2 TÉTEL</u> *Adott egy sikgráfnak az O végtelen tartománya, egy kijelölt I belső tartománya, valamint k terminál pár, melyek mindegyikének egyik tagja I-n, a másik tagja O-n van. Adott továbbá az egyik terminál párt összekötő homotópia (mely a többi párra is már előirja a homotópiát), valamint egy $l\leq k$ egész. A megadott terminál párok közül akkor és csak akkor létezik l darab, melyeket össze lehet kötni l diszjunkt választható úttal, ha bárhogy véve diszjunkt pont-duál utak egy R rendszerét, mely minden egyes terminál párt legalább d-szer választ el, az R-en lévő csúcsok száma legalább l*d.*

BIZONYITÁS. A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőség bizonyitásához képzeljük el, hogy a G gráf egy henger felületén van ábrázolva úgy, hogy az O tartomány a hengert határoló egyik körlapnak felel meg, az I tartomány pedig a másiknak.

Görditsük végig a hengert a síkon vízszintes irányban. A henger egy végtelen csík mentén fut végig. A G gráf lenyomata egy végtelen G_∞ gráf lesz. Az 2.1a ábrán lévő gráfból a 2.2 ábrán lévő keletkezik.

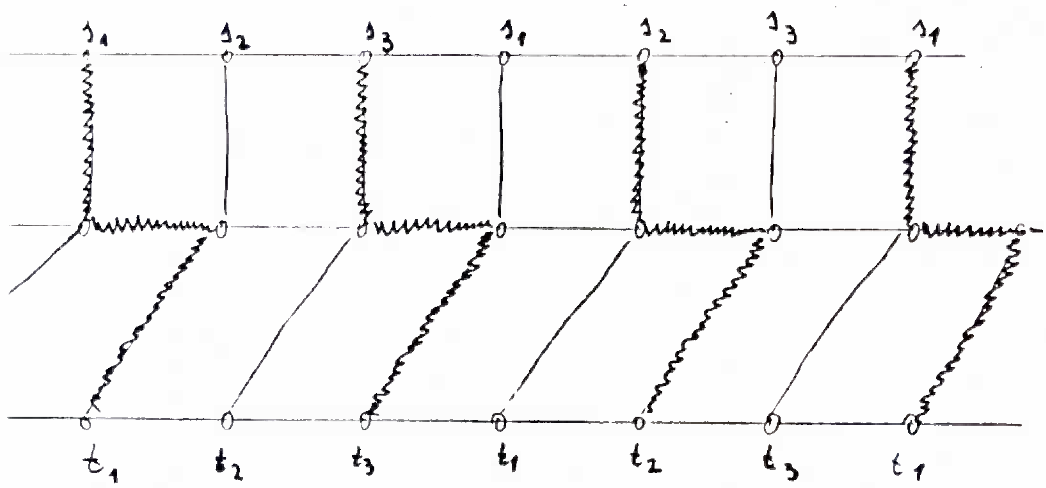


2.2 ábra

A tételt belátjuk először az l=1 esetre. Tegyük fel, hogy egyik terminál párra sincs előírt homotópiájú út. Ekkor, a Robertson-Seymour tételt a k=1 esetre alkalmazva, kapjuk, hogy bármely pontpár elválasztható egy olyan egyszerű pont-duál úttal, amely egyáltalán nem tartalmaz csúcsot. Ezen utak rendszere megsérti a tétel feltételét az l=1 esetben.

Térjünk most rá az általános l>1 esetre. Legyen P választható (egyszerű) út a G gráfban. Tekintsük a G_∞ gráfban a P út egy P_1 példányát. Ennél kezdve, jobb felé haladva csináljuk a következőt. Az általános lépésben tekintjük a jobbra következő terminál párt és megnézzük, hogy van-e ezt összekötő út, amely diszjunkt a már megkonstruált utaktól. Ha nincs ilyen út, a következő terminál párra lépünk. Ha van, vesszük az (egyértelműen meghatározott) legbaloldalibb egyszerű utat, és a következő terminálpárra térünk.

A 2.ábra gráfján az eljárás a következő utakat eredményezi:



2.3 ábra

<u>ÁLLITÁS</u> *Az igy kapott utak mindegyikének az eredeti gráfban egyszerű út felel meg.*

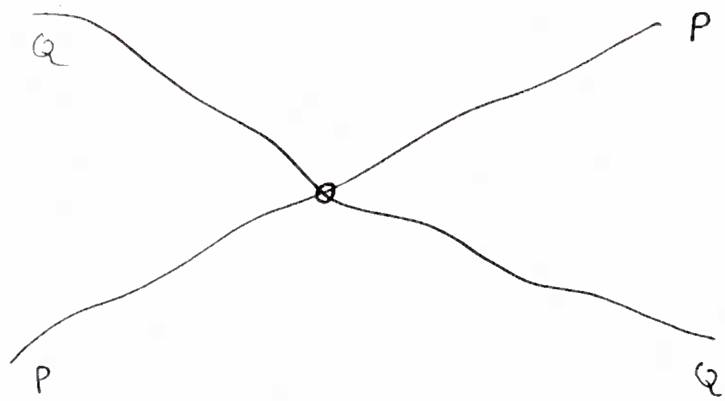
BIZONYITÁS. Az első P út a feltevés szerint egyszerű volt. A P_1 utat követően megkonstruált Q_1 út biztosan nem nyúlik túl a P út P_1 után jobbra következő G_∞-beli másolatán. Szükségképpen a Q_1 út eredetije a G gráfban egyszerű. Most a P szerepét Q-nak adva, láthatjuk, hogy a következő út is egyszerű, és igy tovább. ∎

Mivel a G gráf véges, csak véges sok egyszerű út van. Igy az állitás szerint a G_∞-ben egymás után konstruált utak között biztosan lesz két olyan, amelynek G-beli eredetije ugyanaz. Tegyük fel, hogy ez az út P_1, továbbá azt, hogy P_1 az (s_1,t_1) terminál párt köti össze. Tegyük fel, hogy a fenti a P_1 út következő P_1' példánya, ami a konstrukció során előáll, d periódus után jelenik meg, és hogy eközben t darab utat konstruáltunk, ahol P_1-t beszámoljuk t-be, de P_1'-t nem (a 3. ábrán d=2, t=3). Legyenek ezen utak $P_1,P_2,\dots,P_t$.

Jelöljük az ld szorzatot q-val. Két esetet különböztetünk meg.

1.ESET. $t \geq q$. Tekintsük ekkor a $P_1,P_2,\dots,P_q$ utak eredeti G-beli $Q_1,Q_2,\dots,Q_q$ megfelelőit. Mivel a P_i utak G_∞-ben diszjunktak, a Q_i utak olyan $\mathcal{F}$ útrendszert alkotnak G-ben, hogy G minden csúcsát legfeljebb d út tartalmazza közülük. Egy ilyen útrendszert *d-függetlennek* nevezünk.

Akkor mondjuk, hogy két út, P és Q a v pontban keresztezi egymást, ha v mindkét útnak belső pontja, és P-nek v-vel szomszédos két éle a megadott síkbeli reprezentációban elválasztja Q-nak v-vel szomszédos két élét.



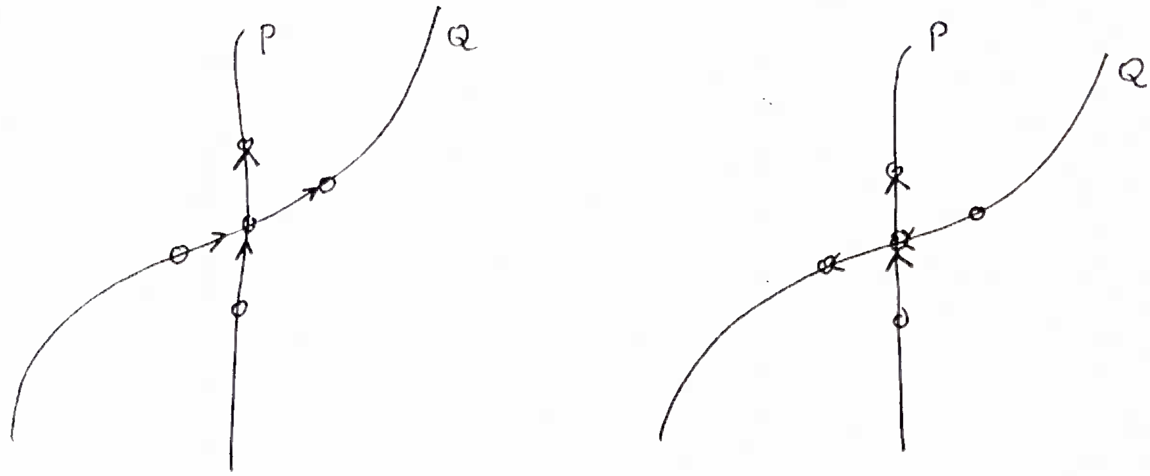
2.4 ábra

Nevezzük G egy útrendszerét *keresztezés mentesnek*, ha a rendszer semelyik két útja nem keresztezi egymást.

ÁLLITÁS. *Ǧ átalakitható úgy, hogy továbbra is d-független legyen, és keresztezés mentes választható utakból álljon.*

LEMMA *Tegyük fel, hogy P és Q két élidegen választható út, melyek keresztezik egymást. Ekkor léteznek P' és Q' választható utak, melyek nem keresztezik egymást, továbbá minden pontot legfeljebb annyiszor használnak, mint a P és Q.*

BIZONYITÁS. Irányitsuk mindkét út éleit a belső I tartománytól kifelé indulva. Két csoportba sorolhatjuk azon v pontokat, ahol P és Q keresztezi egymást, annak megfelelően, hogy a v-be belépő P-beli és Q-beli (irányitott) él az óra járása szerint, vagy avval ellentétesen követi egymást. Az első esetet hivjuk PQ-keresztezésnek, a másodikat QP-keresztezésnek.



PQ-keresztezés QP-keresztezés

4.5 ábra

Mivel P és Q azonos homotópiájú utak, a PQ-és QP-kereszteződések száma ugyanannyi. Induljunk el a Q úton a belső tartománytól és tegyük fel hogy a P-vel való első keresztezés PQ tipusú. Ekkor a Q úton továbbhaladva lesz olyan X PQ-kereszteződés, amelyet egy Y QP-kereszteződés követ. Tekintsük a siknak azt a T tartományát, melyet a P és Q utak X és Y közötti szegmensei határolnak. Ha a Q úton továbbhaladunk, a Q mondjuk z-szer ($z \geq 0$) belép a T tartományba. Minden ilyen belépéshez tartozik egy kilépés, igy létezik egy olyan "legbelső" X_1 belépés és Y_1 kilépés, hogy a P és Q utak X_1 és Y_2 között lévő szegmensei olyan T_1 tartományt határolnak, amelybe sem a P sem a Q nem lép be (és amely tartomány nem tartalmazza a kijelölt I belső tartományt). Cseréljük fel P és Q-ban az X_1 és X_2 között vezető szegmensüket. A keletkezett P_1 és Q_1 utak rendre homotópak P illetve Q-val. Továbbá P_1 és Q_1 kereszteződéseinek száma kisebb (2-vel), mint P és Q-é, és P_1, Q_1 minden pontot annyiszor használ, mint P és Q. Ezt a kikeresztezési eljárást addig folytathatjuk, amig csak létezik keresztezés.

Visszatérve az állitás bizonyitására, párhuzamos élek bevezetésével elérhető, hogy $\mathcal{F}$ élidegen utakból álljon. Ha $\mathcal{F}$ keresztezés mentes, akkor $\mathcal{F}$ maga jó. Alkalmazzuk a lemmát, amig csak van $\mathcal{F}$-nek két keresztező tagja. A lemma által biztositott új útrendszer továbbra is d-független és választható utakból áll. Ez az eset csak véges sokszor következhet be, mert a lemma minden egyes alkalmazásánál az összes lehetséges útpárra vonatkozó keresztezések száma csökken. Ezzel az Állítást beláttuk.∎

Tegyük tehát fel, hogy a q darab választható út $\mathcal{F}$-ben keresztezés mentes. Jelöljük ezen utakat, sorrendben $Q_1, Q_2, \dots, Q_q$-val. Válasszuk ki most ezek közül sorrendben a Q_1, $Q_{d+1}, Q_{2d+1}, \dots$ utakat. Mivel $q=ld$, így l utat választottunk. Jelöljük ezen utakat rendre $R_0, \dots R_{l-1}$-gyel

ÁLLÍTÁS *Az R_i utak diszjunktak.*

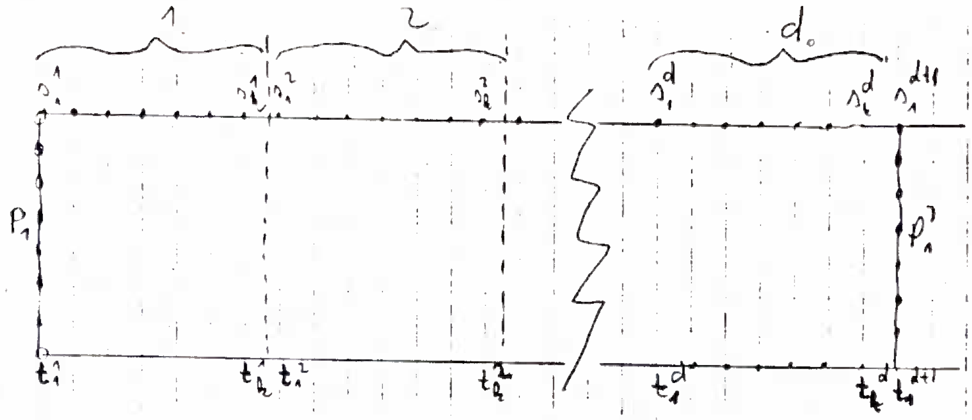
BIZONYÍTÁS. Mivel a szóbanforgó utak keresztezés mentesek, elég azt belátnunk, hogy az egymást követő R_i utak diszjunktak. De ez világos hiszen, ha mondjuk R_i és R_{i+1} metszené egymást valamely v pontban, akkor a $Q_{di+1}, Q_{di+2}, \dots, Q_{d(i+1)+1}$, összesen d+1 darab $\mathcal{F}$-beli út is mind átmenne v-én (hiszen $\mathcal{F}$ keresztezés mentes) ellentmondásban azzal, hogy $\mathcal{F}$ d-független.∎

Beláttuk tehát, hogy az 1. eset teljesülése estén a keresett l diszjunkt választható út létezik.

2.ESET $t<q$. Tekintsük a $G_{::}$ gráfnak a P_1 és P_1' által határolt részét és jelöljük ezt a véges részgráfot G_1-gyel. G_1-ben a P_1 és P_1' között megkonstruált $P_1, \dots, P_t$, $P_{t+1} = P_1'$ utakról tudjuk, hogy P_1 és P_1' eredetije G-ben ugyanaz az út, továbbá, hogy mindegyik P_i $(i=2,3,\dots,t+1)$ út a legbaloldalabbi olyan egyszerű út G_1-ben, amely valamely terminál párt köt össze és diszjunkt a kisebb indexű P_j utaktól.

Nem lehet hogy G_1-ben mindegyik terminál pár össze van kötve, mert akkor $t=d*k\geq d*l$, azaz az 1. eset állna fenn.

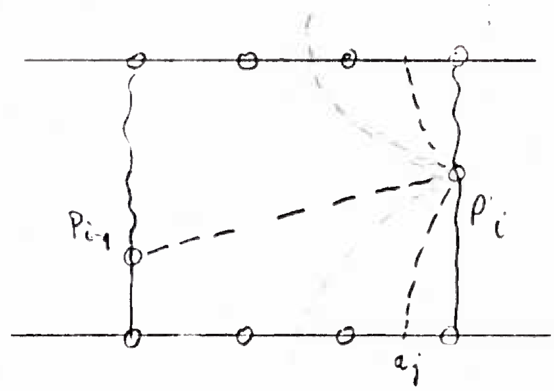
Képzeljük azt, hogy a G_1 gráf az (1,1), (1,0), (dk+1,0), (dk+1,1), pontok által meghatározott zárt téglalapra van rajzolva úgy, hogy a terminálpontok kivételével minden él és pont T belsejében van, a terminál pontok pedit T határának egész koordinátájú pontjai.



2.6 ábra

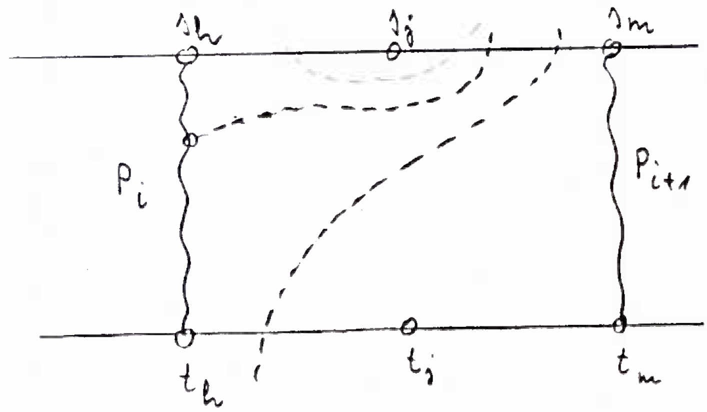
Számozzuk át a terminálokat úgy, hogy $s_{dj+i}=s_i^j$. Jelöljük a (j+1/2,1) pontot f_j-vel, a (j+1/2,0) pontot a_j-vel. Tegyük fel, hogy valamely P_i út az s_{j+1} és t_{j+1} terminál párt köti össze. A P_i utak "amilyen balra csak lehet" konstrukciója folytán érvényes a következő két állítás.

<u>1.ÁLLITÁS</u> *P_i bármely v pontjából vezet gráf pontot vagy élt nem érintő duál út vagy P_{i-1} egy u pontjába vagy az f_j vagy az a_j pontba. Továbbá, ha nem az első eset áll fenn, akkor a P_{i-1} út végpontjai biztosan nem az s_j, t_j terminálok.*



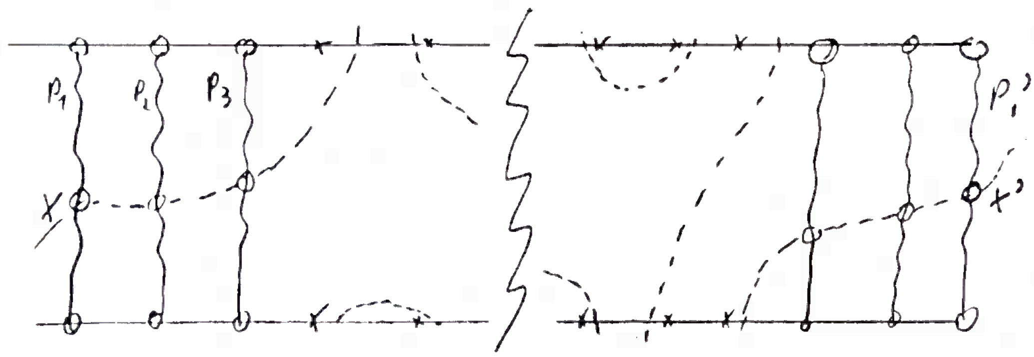
2.7 ábra

<u>2.ÁLLITÁS</u> *Tegyük fel, hogy P_i út az s_h, t_h terminálokat köti össze, a P_{i+1} pedig az s_m, t_m terminálokat ($m>h+1$). Ekkor tetszőleges j-re ($h<j<m$) valamely f_c vagy a_c pontból ($j\leq c<m$) létezik duál út vagy P_i egy pontjába vagy valamely f_d vagy a_d ($h\leq d<j$) pontba.*



2.8 ábra

Legyen mármost s_{j+1} t_{j+1} az első terminál pár, ami nincs összekötve. Ekkor van olyan C görbe, amely valamely f_h vagy a_h-ból ($h>j$) indul, a $P_1,\ldots,P_j$ utakkal pontosan egyszer metszi, méghozzá az út egy csúcsában, és G_1-gyel nincs más közös pontja. Legyen C nek és P_1-nek a közös pontja az X csúcs. P_1'-n az X megfelelő példányát jelölje X'. Ismételten alkalmazva a fenti 1. és 2. állitások közül a megfelelőt, az X'-ből visszafelé indulva megkonstruálhatunk görbéknek egy olyan rendszerét, amely (i) G_1-ben elválasztja valamennyi terminál párt, (ii) mindegyik P_i utat pontosan egyszer metszi, éspedig P_t' egy csúcsában, (iii) a P_1 úttal X, a P_1' úttal X' a közös pontja.



2.9 ábra

Tekintsük most e görbe rendszer tagjainak megfelelő pont-duál utak R rendszerét az eredeti G gráf sik reprezentációjában. R az (i) miatt minden terminál párt d-szer választ el és (ii) miatt (multiplicitással számolva) pontosan t csúcson halad keresztül.

Miután a 2. eset feltevése szerint $t<ld$, az R rendszer megsérti a tételben szereplő feltételt, igy a 2. eset nem fordulhat elő. Evvel a tétel bizonyitását befejeztük. ▮▮▮

1. Megjegyzés. Könnyen ki lehet mutatni, hogy a tételbeli feltételt elég csupán olyan R duál-út rendszerekre megkövetelni, amelyekre a bennük előforduló pont-duál utak G minden csúcsát legfeljebb egyszer használják.

2. Megjegyzés. A fenti bizonyitás sajnos nagy mértékben nem algoritmikus.

3. KORPAKOLÁSOK

3.1. BEVEZETŐ

Miután egy nem-negativ egészértékű cirkuláció mindig előáll irányitott körök (karakterisztikus vektorainak) nem-negativ egészértékű lineáris kombinációjaként, Hoffman cirkulációs tétele olyan tételként interpretálható, amely szükséges és elegendő feltételt ad arra, hogy irányitott gráfban létezzenek irányitott körök úgy, hogy minden élre az élen áthaladó kiválasztott körök száma előre megadott nem-negativ egész alsó és felső korlátok közé essék. Ezen eredmény egyfajta irányitatlan ellenpárját P.Seymour [1979] adta meg:

3.1.1 TÉTEL [Seymour] *Adott egy G irányitatlan gráf, minden élen $f(e)$ alsó és $g(e)$ felső korlát $(0\leq f\leq g)$, akkor és csak akkor lehet G köreihez nem-negativ változókat rendelni úgy, hogy minden e élre $f(e)\leq \sum(x(C)\text{: } C \text{ kör és } e\in C)\leq g(e)$, ha minden B vágás minden e élére $f(e)\leq g(B-e)$.*

(Az egész fejezetben végig feltesszük, hogy a szereplő gráfok hurok mentesek.)

Fontos különbség az irányitott esethez képest, hogy ott az $f\equiv g$ esetben a körpakolás triviálisan mindig létezik, mig az irányitatlan esetben, amint az Seymour bizonyitásából kiderül, épp ez az érdekes eset. Ezért itt külön is megfogalmazzuk és mostantól csak ezzel foglalkozunk.

3.1.2 TÉTEL [P.Seymour körösszeg tétele] *Akkor és csak akkor lehet G köreihez nem-negativ változókat rendelni úgy, hogy minden e élre $f(e)=\sum(x(C)\text{: } C \text{ kör és } e\in C)$, ha minden B vágás minden e élére*

$$(3.1.1) \qquad 2f(e)\leq f(B).$$

Egy másik lényegi különbség az irányitott és az irányitatlan eset között, hogy az irányitott esetben egész kapacitások esetén a körökhöz rendelt változók is választhatók egésznek, mig irányitatlan esetben ez nincsen igy, amint ezt a teljes négyes mutatja f≡1 választás mellett.

Hogy az irányitatlan esetben egész körpakolásra egyáltalán reményünk lehessen, nyilván szükséges megkövetelnünk, hogy minden csúcsra a befutó élek f-jeinek összege páros legyen. Ilyenkor azt mondjuk, hogy *f Euler-féle*. (Ebbe mindig beleértjük hogy f egész-értékű).

(3.1.1) még Euler f-re sem elegendő általában, amint azt a Petersen gráf mutatja, ha f-et egy teljes párositás élein 2-nek, mig a maradék tiz élen egynek választjuk. Sikgráf esetén azonban már kedvező a helyzet:

3.1.3a TÉTEL [P.Seymour egész körösszeg tétele] *Adott $G=(V,E)$ sikgráf, $f:E\to Z_+$ Euler- féle kapacitás. Akkor és csak akkor lehet G köreihez nem-negativ egész változókat rendelni úgy, hogy minden e élre $f(e)=\sum(x(C):\ C$ kör és $e\in C)$, ha minden B vágás minden e élére (3.1.1) teljesül.*

A tételt későbbi általánositás céljából megfogalmazzuk egy ekvivalens alakban.

3.1.3 TÉTEL *Egy sik Euler gráf élhalmaza akkor és csak akkor bontható fel legalább három hosszú körökre, ha nincs olyan vágás, amelyben az éleknek több mint a fele ugyanazt a két pontot összekötő párhuzamos él.*

Ez a tétel a fejezet egyik kiinduló pontja. A másik alapvető eredmény H.Fleischnertől származik.

Legyen G Euler-féle sikgráf. Tegyük fel, hogy G minden csúcsánál adva vannak különböző élekből álló bizonyos párok, mely párokat *tiltott átmeneteknek* hivunk. Nevezzünk egy kört *jónak*, ha nem használ tiltott átmenetet.

3.1.4 TÉTEL [H.Fleischner] *G élhalmaza akkor és csak akkor particionálható fel jó körökre, ha nincs olyan kételű szétvágás, amely tiltott átmenetet alkot.*

Megemlitünk még egy idetartozó fontos eredményt:

<u>3.1.5 TÉTEL</u> [P.Seymour páros körfelbontási tétele] *G Euler-féle síkgráf élhalmaza akkor és csak akkor bontható fel páros körökre, ha G minden blokkja páros sok élt **tartalmaz**.*

E tételek mindegyikének az ismert **bizonyítása** két részből áll. Az első részben kimutatják, hogy **elég a megfelelő** állítást legfeljebb 4-fokú gráfokra igazolni. **Fleischner** ezt az esetet egy bonyolult technikás bizonyítással intézi el. **Seymour** a 3.1.3 tétel esetén a négyszín tételt hívja segítségül. **Valójában** erre nincs szükség, mert a $\leq$4-fokú gráfok esetén a 3.1.4 **tétel** speciális esetként tartalmazza a 3.1.3 tételt (a párhuzamos élek **legyenek** a tiltott átmenetek). A 3.1.5 tétel $\leq$4 fokú **gráfokra** **vonatkozó** speciális esetének bizonyításakor Seymour felhasználja **Fleischner** tételét, majd még egy meglehetősen bonyolult érvelést **alkalmazva** jut célba.

Egy egyszerű trükkel szerencsére **ez** utóbbi bonyodalom elkerülhető. Legyen G kétszer összefüggő **Euler-féle síkgráf**, melynek páros sok éle van és minden pont foka **legfeljebb 4**. **Ekkor** a gráf éleit meg lehet pirossal és kékkel színezni, **hogy minden** pontba ugyanannyi piros él menjen, mint kék. Valóban, **kiindulva egy** adott pontból, haladjunk a gráf egy Euler köre mentén és **színezzük** az éleket felváltva pirossal és kékkel. Mivel páros sok él **van**, **az** így kapott színezés a kívánt tulajdonságú lesz. Ezután **minden 4** fokú csúcsnál a piros-piros illetve a kék-kék élek **alkossák a** tiltott párokat. A Fleischner tétel szerint az élhalmaz **felbontható** jó körökre. Most egy jó kör piros-kékben alternáló lesz, **így szükségképpen** páros.

Megjegyezzük még, hogy egy egyszerű **elemi** konstrukcióval Fleischner kimutatta, hogy a $\leq$4-fokú **esetben a** 3.1.5 tétel is közvetlenül implikálja az ő tételét.

E kis kitérő után rátérünk **a fejezet fő**, H.Fleischnerrel közösen elért eredményének [Fleischner-**Frank**] **ismertetésére**, amely a 3.1.3 é 3.1.4 tételek közös **általánosítása**. Megjegyezzük, hogy e tétel bizonyításánál is először a $\leq$4 **fokú** esetre redukálunk, és ott pedig a Fleischner tételre hivatkozunk.

3.2. KÖZÖS ÁLTALÁNOSITÁS

Legyen $G=(V,E)$ Euler-féle gráf. Minden $v\in V$ pontnál adott a szomszédos élek egy $\mathcal{P}(v)$ particiója nem-üres részekre. Az $\mathcal{P}(v)$ egy tagját *tiltott résznek* nevezzük, mig egy tiltott rész legalább kételemü részhalmazát ***tiltott halmaznak.*** A tiltott részek halmazát jelölje $\mathcal{P}:=\cup(\mathcal{P}(v):v\in V)$.

Egy kört *jónak* nevezünk, ha semelyik két szomszédos éle nem tiltott halmaz. Hivjunk egy S szétvágást ($\mathcal{P}$-re nézve) *kritikusnak* ($P\in\mathcal{P}$ miatt), ha pontosan $|S|/2$ elemet tartalmaz egy P tiltott részből. Ha S ennél több elemét tqartalmazza P-nek, akkor nevezzük S-et ($\mathcal{P}$-re nézve) *hibásnak* (P miatt). (Egyelemü tiltott rész nyilván nem jelent semmiféle megkötést a jó körökre.) egyszerübb szóhasználat kedvéért ebben a szakaszban egy vágást *szétvágásnak* fogunk nevezni, mig egy tartalmazásra nézve minimális szétvágást hivunk *vágásnak.*

3.2.1 TÉTEL ***Sikbeli Euler gráf élhalmaza akkor és csak akkor bontható fel jó körökre, ha nincsen hibás szétvágás.***

Ebből rögtön következik a 3.1.4 tétel, ha minden tiltott részt legfeljebb kételeműnek választunk. Ha viszont az egy pontból kiinduló párhuzamos élek csoportjait vesszük tiltott részeknek, akkor Seymour egész körösszeg tételét kapjuk meg.

MEGJEGYZES. A tételben minden tiltott rész egyetlen ponttal lefogható. Kisérletezhetnénk olyan további kiterjesztéssel, amikor a tiltott részekre semmilyen kikötést nem teszünk (és egy kört akkor tekintünk jónak, ha nem tartalmaz tiltott halmazt). Ekkor azonban a természetes vágás feltevés (hogy semmilyen szétvágásban nincs a szétvágás felénél nagyobb tiltott rész) immár nem elegendő, amint ez a következő példából leolvasható. Legyen G négy hosszú kör, melynek minden élét (párhuzamosan) megháromszoroztuk. Ez felbomlik 3 négyélü körre, melyek élei legyenek rendre pirosak, kékek és zöldek. Tiltott részek legyenek az egyszinü halmazok. Most minden szétvágás hibátlan, mégsincs jó körökre bontás. (Példával megmutatható, hogy a vágás feltétel még akkor sem elég, ha csak két tiltott rész van. Egyetlen tiltott résznél a vágás feltétel ismét elegendő: ez nem más mint Seymour tétele sikgráfok útpakolásairól).

BIZONYITÁS A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőség bizonyitásához először is figyeljük meg, hogy a tételben elég a hibás vágásokat kizárni, hiszen hibás szétvágás vágásokra történő particiójánál a szereplő vágások között kell lennie hibásnak.

Legyen $G=(V,E)$ egy olyan ellenpélda, amelyben $|E|+|V|$ minimális és $\mathcal{F}$-ben az egyelemű részek száma a lehető legnagyobb.

1.ALLITAS *G 2-összefüggő.*

BIZONYITAS. Valóban, Euler gráf minden blokkja Euler gráf. Tekintsük G valamely B blokkját és a tiltott részek B-re való megszoritását. Nyilván B-ben nincs hibás szétvágás, igy ha $B\neq G$, akkor jó körökre bontható. Az egyes blokkok jó kör-felbontásai együttvéve G jó kör-felbontását adják, szemben a feltevéssel, hogy G rossz.■■■

2.ALLITAS ***G minden kritikus szétvágása vagy csillag vagy valamelyik oldalát egy pontra húzva a keletkező gráf nem sikbarajzolható.***

BIZONYITAS. Legyen $S=\nabla(X)$ kritikus szétvágás, amely nem csillag, azaz $1<|X|<|V|-1$ és legyen $T\subseteq S$ tiltott halmaz, amelyre $2|T|=|S|$. A T-t lefogó v pont legyen X-ben. Tegyük fel továbbá, hogy az állitással ellentétben, akár X-et akár $V-X$-et húzzuk össze egy pontta sikgráfot kapunk. Először húzzuk össze X-et és töröljük a keletkező hurok-éleket. Az összehúzott gráf Euler-féle sikgráf, nem tartalmaz hibás vágást és kisebb mint G, igy van jó kör-felbontása. Ugyanez érvényes, ha X helyett $V-X$-et húzzuk össze egy pontta. A kétféle felbontás az eredeti gráfnak egy olyan felbontását adja, amelyben jó körök szerepelnek továbbá az X-ben illetve a $V-X$-ben haladó utak, melyek nem használnak tiltott halmazt és melyek mindegyikének egyik végén T-beli él van a másikon $S-T$-beli. Ezen X-ben haladó $|T|$ darab útból hagyjuk ki a T-beli éleket. Ekkor tehát mindegyikük a v pontban végződik, igy a $V-X$-ben haladó $|T|$ úttal úgy összepárositható, hogy G-nek $|T|$ darab jó körét adják. Ily módon megkaptunk G-nek egy jó kör-felbontását, ellentétben a G-re tett feltevéssel. ■■■ (A bizonyitásban lényegesen kihasználtuk, hogy minden tiltott halmaz lefogható egy ponttal.)

Nevezzünk egy v csúcsot *triviálisnak*, ha $\mathcal{F}(v)$ egyelemű részekből áll.

Legyen $e_i\in E(v,u_i)$ $(i=1,2)$ G-nek két olyan éle, melyekre v, u_1, u_2 különbözőek és G-nek ugyanazon a tartományán fekszenek. Az e_1 és e_2 élek *leemelésén* a következő operációt értjük. Helyettesitsük e_1 és e_2-t egy új $e=v_1v_2$ éllel, és módositsuk $\mathcal{F}$-t úgy, hogy ha

$e_i \in P_i \in \mathcal{P}(u_i)$, akkor $P_i$ben helyettesitsük e_i-t $(i=1,2)$ az e éllel. Jelöljükmaz új gráfot G'-vel, mig a módositott tiltott részek halmazát $\mathcal{P}'$-vel. Nyilván G' sikgráf és Euler-féle.

3.ALLITAS *Ha a v csúcs triviális, akkor létezik G'-nek olyan vágása, amely hibás $\mathcal{P}'$-re nézve. Továbbá G' valamennyi hibás vágása csillag, éspedig a $\nabla'(v)$, $\nabla'(u_1)$, $\nabla'(u_2)$ csillagok egyike.*

BIZONYITAS. Először megmutatjuk, hogy G'-nek van hibás szétvágása. Valóban, ha nem volna, akkor G' felbomlik jó körök egyesitésére, hiszen G'-nek kevesebb éle van mint G-nek, igy már nem ellenpélda. Ebben a körfelbontásban az e élt nem használó körök jó körök G-ben is a $\mathcal{P}$-re nézve. Ha most visszahelyettesitjük az e élt az e_1 és e_2 élekkel, akkor a körfelbontás e-t tartalmazó C köre vagy egyetlen kör lesz G-ben is (amikor C nem megy át v-én), a vagypedig két élidegen körre bomlik. Mivel v triviális, mindkét esetben jó körökhöz jutunk, és ezáltal G egy jó körfölbontását kapjuk, ami nem lehet, mert G ellenpélda volt.

Azt már korábban megjegyeztük, hogy ha van hibás vágás, akkor van hibás szátvágás is. Tegyük most fel, hogy az $S'=\nabla'(X)$ szétvágás hibás $\mathcal{P}'$-re nézve. Nyilvánvalóan $\nabla(X)$ kritikus (G-ben) a $\mathcal{P}$-re nézve.

Mivel u_1 és u_2 G-nek ugyanazon a tartományán fekszik, a $G+e$ gráf sikgráf. Mivel S' szétvágás G'-ben, mind X és $V-X$ a $G+e$ gráfnak összefüggő részgráfját feszitik. Ilymódon a G gráfban akár az X-et, akár a $V-X$-et egyetlen ponttá összehúzva sikgráfot nyerünk. A 2. állitás szerint ekkor $\nabla(X)$ csillag. Világos, hogy az e_1 és e_2 élek leemelésekor csak a of v, u_1 és az u_2 csillagai válhattak hibássá. ∎

4.ALLITAS *Ha $\nabla(u_1)$ G-ben kritikus (például, ha $\nabla'(u_1)$ hibás G'-ben), akkor $d(u_1)<d(u_2)$.*

BIZONYITAS. Ha $\nabla'(u_1)$ hibás G'-ben $\mathcal{P}'$-re nézve, éspedig a $P'\in\mathcal{P}'$ tiltott résznél, akkor $P\in\mathcal{P}(u_2)$ és $\nabla(u_1)$ G-ben a $\mathcal{P}$-re nézve kritikus a P-nél. Ekkor $d(u_1)=2|P\cap\nabla(u_1)|= 2|P\cap E(u_1,u_2)|< 2|P\cap\nabla(u_2)|\le d(u_2)$. ∎

A következő állitás nyilvánvaló.

5.ÁLLITÁS *Ha valamely v csúcsra $\nabla(x)$ mind $P\in\mathcal{F}(s)$-nél mind $T\in\mathcal{F}(t)$-nél kritikus (ahol $P\neq T$, $s\neq x\neq t$), akkor $s\neq t$ és x-nek az s és a t-én kivül nincs más szomszédja.*∎

6.LEMMA *Nem létezik triviális csúcs.*

BIZONYITÁS. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha egy v csúcs triviális, akkor v-nél alkalmas két élt leemelve nem keletkezik hibás csillag. Ez ellentmondásban lesz a 3. állitással.

1.ESET v-nek pontosan két szomszédja van.

Legyen u_1 és u_2 v két szomszédja úgy, hogy $d(u_1)\leq d(u_2)$. A 4. állitás szerint $\nabla(u_2)$ nem lehet kritikus $\mathcal{F}(u_1)$ egyik tagjánál sem. Ha $\nabla(u_1)$ kritikus $P\in\mathcal{F}(u_2)$-nél, akkor $P-E(v,u_2)\neq\emptyset$, mert különben $\nabla(\{u_1,v\})$ hibás vágás volna P-nél. Most $\nabla(v)$ nem lehet P-nél kritikus, mert akkor $|\nabla(\{u_1,v\})| < d(v)+d(u_1) = 2|P\cap E(v,u_2)| + 2|P\cap E(u_1,u_2)| \leq 2|P|$, azaz $\nabla(\{u_1,v\})$ ismét hibás volna. Ilymódon az e_1 és e_2 élek választhatók a következők szerint.

Legyen $e_i\in E(v,u_i)$ olyan, hogy $e_i\in P_i$ ha v kritikus valamely $P_i\in\mathcal{F}(u_i)$-nél ($i=1,2$), és ha még $\nabla(u_1)$ is kritikus $P\in\mathcal{F}(u_2)$-nél, akkor legyen $e_2\notin P$.

Most az e_1 és e_2 élek leemelése nem teheti hibássá a v, u_1, u_2 csúcsok egyikét se ellentmondásban a 3. állitással.∎

2.ESET. v-nek van legalább három különböző szomszédja

(Megjegyezzük, hogy az 1. állitás szerint nem lehet, hogy v-nek 2-nél kevesebb szomszédja van.)

Az 5. állitást x=v választással alkalmazva láthatjuk, hogy $\nabla(v)$ legfeljebb csak egy tiltott résznél lehet kritikus. Amennyiben $\nabla(v)$ kritikus valamely $T\in\mathcal{F}(t)$-nél, úgy legyen $u_2:=t$. Ha $\nabla(v)$ nem kritikus, akkor legyen u_2 a v-nek minimális fokszámú szomszédja.

Legyen u_1 és u_1' v-nek két további szomszédja úgy, hogy mind a $\{v,u_1,u_2\}$ ponthármas, mind a $\{v,u_1',u_2\}$ ponthármas G-nek egy tartományán helyezkedik el. Az 5. állítást $x=u_2$ választással alkalmazva nyerjük, hogy $\nabla(u_2)$ nem lehet kritikus mind a $\mathcal{F}(u_1)$ mind a $\mathcal{F}(u_1')$ egy-egy tagjánál. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $\nabla(u_2)$ nem kritikus a $\mathcal{F}(u_1)$ egyik tagjánál sem.

Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor $\nabla(v)$ nem kritikus. Ekkor az u_2 választása és a 4. állítás mutatja, hogy $\nabla(u_1)$ nem kritikus $\mathcal{F}(u_2)$ eyik tagjánál sem. Legyen $e_i \in E(v,u_i)$ $(i=1,2)$. Ha most leemeljük az e_1 és e_2 éleket, akkor a v, u_1, u_2 csúcsok csillagának egyike sem válik hibássá, ellentétben a 3. állítással.

Másodszor tételezzük fel, hogy $\nabla(v)$ kritikus valamely $T\in\mathcal{F}(u_2)$-nél. Legyen $e_1 \in E(v,u_1)$ és $e_2 \in T\cap E(v,u_2)$. Az u_1, e_1 and e_2 választása folytán az e_1 és e_2 éleket leemelve v és u_2 csillaga nem válhat hibássá. Azt állitjuk, hogy u_1 csillaga sem válhat hibássá. Valóban, ha $\nabla'(u_1)$ hibás volna (G'-ben), akkor szükségképpen T'-nél kell hibásnak lennie, így $\nabla(u_1)$ kritikus T-nél (G-ben) De ekkor $|\nabla(\{u_1,v\})| < d(v)+d(u_1) = 2|T\cap E(v,u_2)| + 2|T\cap E(u_1,u_2)| \leq 2|T|$, vagyis $\nabla(\{u_1,v\})$ hibás volna T-nél (G-ben) és a lemma következik.■■

Miután G ellenpélda, létezik P nem egyelemű tiltott rész. Legyen P legkisebb ilyen, és tegyük fel, hogy $P\in\mathcal{F}(r)$ $(r\in V)$. Módositsuk $\mathcal{F}$-t olymódon, hogy P-ből kivesszük az egyik e elemét, és e egyelemű tiltott rész lesz. Mivel G olyan minimális ellenpélda, amelyben a nem egyelemű tiltott részek száma a legkevesebb, a módositott $\mathcal{F}'$ tiltott részekre vonatkozólag már van G élhalmazának ($\mathcal{F}'$-re nézve) jó körökre való $\mathcal{C}$ felbontása. Ez majdhogynem jó $\mathcal{F}$-re nézve is, kivéve, hogy a körfelbontásban az e élen áthaladó C_o kör tartalmazza P-e-nek egy f elemét. (Lehet, hogy C_o csupán az e és f élekből áll.)

Készitsünk el egy $D=(V,A)$ irányitott segédgráfot a következőképp. Tartozzék az uv irányitott él A-hoz, ha létezik $\mathcal{C}-\{C_o\}$-ban egy C kör. amely átmegy az u és v pontokon és olyan, hogy vagy C diszjunkt P-től, vagy pedig ha tartalmazza P-nek egy $h=rs$ elemét (többet persze nem tartalmaz, mert C jó), akkor a C körön e pontok az r,s,u,v

sorrendben követik egymást.

7.ÁLLITÁS. *Létezik D-ben irányitott út r-ből a $V(C_o)-r$ halmazba.*

BIZONYITÁS. Ha nem létezik ilyen út, jelölje X az r-ből D-beli irányitott úttal elérhető pontok halmazát. Most tehát C_o-nak egyetlen pontja, az r esik X-be.

Belátjuk, hogy $\nabla(X)$ hibás P miatt. Valóban, legyen $uv\in\nabla(X)-P$, ahol $u\in V-X$, $v\in X$, és legyen C a $\mathcal{C}$ körfelbontásban az uv élen áthaladó kör. Mivel X-ből nem lép ki D-nek éle, a C szükségképpen tartalmaz egy $h=rs\in P$ élt, ahol $s\notin X$, továbbá C-nek az s és u közötti része V-X-ben halad, az r és v közötti része pedig X-ben. Vagyis minden $e\in\nabla(X)-P$ élhez egyértelműen hozzárendelhető egy $P\cap\nabla(X)$-beli él, és ezenkivül még $\nabla(X)$-ben vannak az $e,f\in P$ élek is, vagyis $\nabla(X)$ valóban hibás. ∎

Legyen S egy legrövidebb út r-ből a $V(C_o)-r$ halmazba, és az S pontjai sorrendben legyenek $r=v_o,v_1,\dots,v_k$ $(v_k\in V(C_o)-r)$. Legyen C_i az a kör $\mathcal{C}-\{c_o\}$-ban, amely a $v_{i-1}v_i$ élt D-hez definiálta $(i=1,2,\dots,k)$.

Jelölje G' ezen C_i körök éleiből és pontjaiból álló irányitatlan gráfot. Legyen $\mathcal{F}'$ a $\mathcal{F}$-nek G'-re történő megszoritása.

8.ÁLLITÁS. *G'-nek nincs hibás vágása a $\mathcal{F}'$-re nézve.*

BIZONYITÁS. Mivel G' a C_o kivételével jó körök uniójaként állt elő, vágás csak P' miatt lehet hibás (ahol P' a P megszoritottját jelöli), mert a C_1 kör nem tartalmazhat P-beli élt, C_o pontosan kettőt tartalmaz, és a $C_2,\dots,C_k$ körök legfeljebb egy élt tartalmaznak P-ből. ∎

9. ÁLLITÁS. *G'=G.*

BIZONYITÁS. Ha G' valódi része G-nek, akkor nem ellenpélda: Miután G'-nek nincs hibás vágása $\mathcal{F}'$-ra nézve, igy az élhalmaza felbomlik $\mathcal{F}'$-re nézve jó körök uniójára. Ez a felbontás a $\mathcal{C}-\cup(\{C_i\}: i=0,1,\dots,k)$ körökkel együtt a G ($\mathcal{F}$-re nézve) jó felbontását eredményezné.∎

Legyen $L_1\{C\in\mathcal{C}:\ E(C)\cap P=\emptyset\}$ és $L_2=\{c\in\mathcal{C}:\ |E(C)\cap P|=1\}$. S minimális választása miatt S minden pontja L_1-nek legfeljebb két tagjában van, míg r pontosan egy tagjában. Miután $G'=G$, $d(r)=2|L_2|+4=2|P|$ és $d(v_i)\leq 2|L_2|+4$ $(=2|P|)$, $(i=1,\ldots,k)$. Az 6. lemma és a P minimális választása miatt minden i-re $(i=1,\ldots,k)$ létezik $\mathcal{P}(v_i)$-ben egy Q_i tiltott rész, amelyre $|Q_i|>|P|$. Mivel nincsen hibás vágás, $d(v_i)\geq 2|Q|$. és így $d(v_i)\geq 2|Q|\geq 2|P|$. Következésképp a fenti egyenlőtlenségek mind egyenlőséggel kell, hogy teljesüljenek, és így minden v_i pont $(i=1,2,\ldots,k-1)$ pontosan két darab L_1-beli körben van (a v_o és v_k egyetlen L_1-beli körben valamint a $C_o$ban van). De ha v_i két L_1beli körben van, akkor a D segédgráf v_iv_{i+1} élét definiáló C_{i1} kör S minimalitása miatt nem lehet L_2-beli. Szükségképpen L_2 üres.

S minimalitása folytán G semelyik pontján nem mehet át 2-nél több $\mathcal{C}$-beli kör, így minden pont foka legfeljebb 4 (és így pontosan 4). A tétel most következik a Fleischner tétel 4-reguláris gráfokra vonatkozó speciális esetéből.∎∎∎

HIVATKOZÁSOK

[1982] I.Abos, A.Frank and E.Tardos, Algorithms for edge-disjoint paths in a rectilinear grid and their application in layout design, in Proceedings of the seventh colloquium on Microwave Communication, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1982.

[1983] E. Balas and W. Pulleyblank The perfectly matchable subgraph polytope of bipartite graphs Networks, Vol.13, No 4, 495-516.

[1983] Cai Mao-Cheng, Arc-disjoint arborescenes of digraphs J. Graph Theory, Vol.7, No.2, (1983), 235-24.

[1985] W.H. Cunningham, Optimal attack and Reinforcement of a Network, Journal of the Association for Computing Machinery, Vol.32, No.3 (1985) 549-561.

[1985] W.Cunningham and A.Frank, A primal-dual algorithm for submodular flows, Mathematics of Operations Research,Vol.10, No.2 (1985), 251-261.

[1965] J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent sets, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. 869(1965) 67-72.

[1970] J. Edmonds, Submodular functions, matroids, and a certain polyhedra, in: Combinatorial Structures and their applications (R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, and J. Schönheim, eds.), Gordon and Breach, New York[1970, pp. 69-87.

[1971] J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm, Math. Programming, 1 (1971) 127-136.

[1973] J. Edmonds, Edge-disjoint branchings, in: Combinatorial Algorithms (B. Rustin, ed.), Acad. Press, New York,[1973, 91-96.

[1979] J. Edmonds, Matroid intersection, Annals of Discrete Math. 4, (1979) 39-49.

[1977] J. Edmonds and R. Giles, A min-max relation for submodular functions on graphs, Annals of Discrete Mathematics 1, (1977), 185-204.

[1980] H.Fleischner, Eulersche Linien und Kreisüberdeckungen die vorgegebene Durchgänge in den Kanten vermeiden, J.Combinatorial Theory Ser. B 2 (1980) 145-167.

[1988] H.Fleischner and A.Frank, On circuit decomposition of planar Eulerian graphs, submitted to J.Combinatorial Theory.

[1962] L.R.Ford-D.R.Fulkerson, Flows in Networks, Princeton Univ.Press, Princeton NJ. 1962.

[1980] S.Fortune, J.Hopcroft and J.Wyllie, The directed subgraph homeorphism problem, Theoretical Computer Science, 10 (1980) 111-121.

[1979] A.Frank, Kernel systems of directed graphs, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) 41, 1-2 (1979) 63-76.

[1980] A.Frank, On the orientation of graphs, J.Combinatorial Theory, Ser B Vol.28, No.3 (1980) 251-261).

[1981a] A.Frank, On disjoint trees and arborescences, in:Algebraic Methods in Graph Theory, Colloquia Mathematica Soc. J.Bolyai, 25 (1978) 159-169. North-Holland.

[1981b] A.Frank, How to make a digraph strongly connected, Combinatorica 1 No.2 (1981) 145-153.

[1981c] A.Frank, A weighted matroid intersection algorithm, J.Algorithms 2 (1981) 328-336.

[1982a] A.Frank, An algorithm for submodular functions on graphs, Annals of Discrete Mathematics 16 (1982) 97-120.

[1982b] A.Frank, Disjoint paths in a rectilinear grid, Combinatorica 2 No.4 (1982) 361-371.

[1984a] A.Frank, Submodular flows, in: Progress in Combinatorial Optimization (ed.W.Pulleyblank), Academic Press (1984) 147-165.

[1984b] A.Frank, Finding feasible vectors of Edmonds-Giles polyhedra, J.Combinatorial Theory Ser.B, Vol.36, No.4 (1984) 221-239.

[1984c] A.Frank, Generalized polymatroids, in: Finite and infinite sets (Eger 1981), Colloquia Mathematica Soc. J.Bolyai, 37, 285-294 North-Holland.

[1985] A.Frank, Edge-disjoint paths in planar graphs. J.of Combinatorial Theory, Ser.B.No.2 (1985), 164-178.

[1987] A.Frank, Graph connectivity and network flows, in Handbook of Combinatorics (eds.R.Graham, M.Grötschel and L.Lovász) to appear.

[1988] A.Frank, Packing paths, circuits and cuts - a survey, to appear in the Proceedings of Summer School on "Paths, Flows and VLSI-Layouts" held in Bonn, 1988 June.

[1988] A.Frank, Packing paths in planar graphs, Combinatorica, submitted.

[1989] A.Frank, On connectivity properties of Eulerian digraphs, Annals of Discrete Mathematics 41 (1989), 179-194 (North Holland).

[1978] A.Frank and A.Gyárfás, How to orient the edges of a graph, in: Combinatorics, (Keszthely 1976), Coll.Math.Soc. J.Bolyai 18, 353-364 North-Holland.

[1984] A.Frank and E.Tardos, Matroids from crossing families, in: Finite and infinite sets (Eger 1981), Colloquia Mathematica Soc. J.Bolyai, 37, (295-304) North-Holland.

[1986] A.Frank and E.Tardos, Generalized polymatroids and submodular flows, Mathematical Programming, to appear.

[1987] A.Frank and E.Tardos: An application of simultaneous diophantine approximation in combinatorial optimization, Combinatorica, Vol.7, No.1, (1987) 49-65.

[1988] A.Frank and E.Tardos, An application of submodular flows, to appear in Linear Algebra and its Applications.

[1984] A.Frank, A.Sebő and ETardos, Covering directed and odd cuts, Mathematical Programming Studies 22 (1984) 99-112.

[1978] S.Fujishige, Algorithms for solving the independent flow problems J. Oper. Res. Soc., Japan 21 (1978), 189-203.

[1984] S.Fujishige, Structures of polyhedra determined by submodular functions on crossing families, Mathematical Programming 29 (1984), 125-141.

[1983] S.Fujishige and N.Tomizawa, A note on submodular functions on distbutive lattices J. Oper. Res. Soc. Japan 26 (1983), 309-317.

[1975] R.Giles, Submodular functions, graphs and integer polyhedra Ph. D. thesis, Department of Combinatocs and Optimization, University of Waterloo, Canada, 1975.

[1981] H. Gröflin and A.J.Hoffman, On matroid intersections, Combinatorica, 1 (1981), 43-47.

[1979] H.Gröflin and T.M.Liebling, Connected and alternating vectors, polyhedra and algorithms, Math. Programming 20 (1981) 233-244.

[1981] M. Grötschel, L. Lovász and A.Schrijver, The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, Combinatorica 1 (1981), 169-187.

[1982] R.Hassin, Minimum cost flow with set-constraints, Networks, Vol.12, No.1, 1-22.

[1986] C.van Hoesel and A.Schrijver, Edge-disjoint homotopic paths in a planar graph with one hole, J.Combinatorial Theory (B) submitted.

[1960] A.Hoffman, Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis, Proc.Symposia on Applied Math. 10 (1960).

[1974] A.Hoffman, A generalization of max-flow min-cut, Math.Programming 6 (1974) 352-359.

[1963] T.C.Hu, Multicommodity network flows, Oper.Res. 11 (1963) 344-360.

[1985] H. Imai, Network-flow algorithms for lower truncated transversal polymatroids, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol.26,

[1975] E.L.Lawler, Matroid intersection algorithms, Math. Programming 9 (1975), 31-56.

[1976] E.L.Lawler, Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, Holt, Rinehart, Winston, New York 1976.

[1982] E.L.Lawler and C.U.Martel, Computing maximal "polymatroidal" network flows, Math. Op. Res. 7, No.3, (1982), 334-347.

[1979] M.Lomonosov, Multiflow feasibility depending on cuts, Graph Theory Newsletter 9 (1979) 4.

[1970] L.Lovász, A generalization of König's theorem, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 21 (1970), 443-446.

[1976a] L.Lovász, On two minimax theorems in graph theory, J.Combinatorial Theory (B) 21 (1976) 96-103.

[1976b] L.Lovász, On some connectivity properties of Eulerian graphs, Acta Mat. Akad. Sci.Hungaricae. 28 (1976) 129-138.

[1977] L.Lovász, Flats in matroids and geometric graphs, in: Combinatorial Surveys, (Proc. 6th Btish Combinatorial Conf., P.J. Cameron ed.) Acad. Press (1977), 45-86.

[1983] L.Lovász, Submodular functions and convexity, in: Mathematical Programming - the state of the art (A. Bachem, M. Grötschel, B. Korte, eds.) (1983) Springer Verlag, 235-257.

[1986] L.Lovász and M.Plummer, Matching Theory, North Holland, 1986.

[1982] L.Lovász and Y.Yemini, On generic rigidity in the plane, SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods, 3 (1982), 91-98.

[1978] C.L.Lucchesi and D.H.Younger, A minimax relation for directed graphs, J. London Math. Soc. (2) (1978), 369-374.

[1978] C.J.H.McDiarmid, Blocking, anti-blocking, and pairs of matroids and polymatroids J. Combinatorial Theory, B 25, (1978), 313-325.

[1967] C.St.J.A.Nash-Williams, An application of matroids to graph theory in: Theory of Graphs (Proc. Int. Symp. Roma,[1966; P. Rosenstiehl, ed.) Gordon and Breach, New York and Dunod, Pas (1967), 263-265.

[1969] C.St.J.A.Nash-Williams, Well-balanced orientation of finite graphs and unobtrusive odd-vertex paring, in: Recent progress in combinatocs (W.T. Tutte, ed.) Academic Press (1969), 133-149.

[1927] K.Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, Fund. Math. 10 (1927) 96-115.

[1981] H.Okamura-P.D.Seymour, Multicommodity flows in planar graphs, J.Combinatorial Theory, Ser.B 31 (1981) 75-81.

[1942] R. Rado A theorem on independence functions Quart. J. Math. (Oxford) 13 (1942), 83-89.

[1986a] N.Robertson and P.D.Seymour, Graph minors VI: Disjoint paths across a disc, J.Combinatorial Theory, B, 1986.

[1986b] N.Robertson and P.D.Seymour, Graph minors XIII: The disjoint paths problem, J.Combinatorial Theory (B) to appear.

[1966] B.Rothschild and A.Whinston, On two-commodity network flows, Operations Research 14 (1966) 377-387.

[1980] P.Schönsleben, Ganzzahlige Polymatroid -Intersektions -

Algorithmen. Ph.D. Thesis, Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, 1980.

[1983] A. Schrijver Packing and coveng of crossing families of cuts Journal of Combinatorial Theory, Ser. B, Vol. 35, No 2 (1983),

[1979] P.D.Seymour, Sums of circuits, in: Graph Theory and Related Topics (J.A.Bondy and U.S.R.Murty, eds.) Academic Press, New York (1979).

[1981] P.D.Seymour, Even circuits in planar graphs, J.Combinatorial Theory, Ser. B 31, (1981) 327-338.

[1971] L.S. Shapley, Cores of convex games International Journal of Game Theory, 1 (1971), 11-26.

[1984] G.Tardos, oral communication.

[1961] W.T.Tutte, On the problem of decomposing a graph into n connected factors, J. London, Math. Soc. 36 (1961), 221-230.

[1984] V.A.Yemelichev, M.M.Kovalev and M.K.Kravtsov, Polytopes, Graphs and Optimization, Cambridge University Press, 1984.

[1978] K.Vidyasankar, Covering the edge-set of a directed graph with trees, Discrete Math. 24 (1978) 79-85.

[1976] D.J.A.Welsh Matroid Theory, Acad. Press, London, 1976.