

A MAGYAR MÓDSZER ÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSAI¹

FRANK ANDRÁS

ELTE, Operációkutatási Tanszék

A lineáris programozás dualitás tételének legkorábban előforduló speciális alakja Egerváry Jenő klasszikus tétele teljes páros gráf teljes párosításának maximális súlyáról. Az elegáns bizonyítás elvezet egy hatékony algoritmushoz, melynek a szállítási problémára kiterjesztett alakja a nemzetközi szakirodalomban a Magyar Módszer nevet viseli. A módszer alapelvét azóta több irányban is általánosították: nempáros gráfok maximális súlyú párosításának meghatározására, a súlyozott matroid metszet problémára, folyam és szubmoduláris áram feladatokra. Jelen munkában áttekintjük a Magyar Módszer e kiterjesztéseit.

1 Bevezetés

A Matematikai és Fizikai Lapok 1931-es 38-as számában jelent meg Egerváry Jenő: *Matricok kombinatorikus tulajdonságairól* című dolgozata. [A címben szereplő *kombinatorikus* szó valószínűleg nem elírás, mert a cikk páratlan oldalainak tetején is ekként szerepel. Ugyanakkor Egerváry egy 1957-ben megjelent dolgozatának [9] irodalomjegyzékében saját cikkére hivatkozva már a *kombinatorikus* szót használja.] A dolgozat fő eredménye König Dénes a páros gráfok maximális elemszámú párosításairól szóló tételének súlyozott változata, melyet eredeti, betűhív alakban idézünk:

1.1 Tétel (Egerváry). *Ha az $\|a_{ij}\|$ n -etrendű matrix elemei adott nem-negatív egészek, úgy a*

$$\lambda_i + \mu_j \geq a_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (\lambda_i, \mu_j, \text{ nem negatív egészek}) \quad (1)$$

feltételek mellett

$$\min \sum_{k=1}^n (\lambda_k + \mu_k) = \max(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}), \quad (2)$$

hol $v_1, v_2, \dots, v_n$ az $1, 2, \dots, n$ számok összes permutációit befutják.

Egerváry a dolgozatban megjegyzi, hogy a tétel akkor is érvényben marad, ha elejtjük az a_{ij} mátrixelemekre rótt egészértékűségi feltevést, és a λ_i, μ_j számokról nem követeljük meg az egészértékűséget.

¹Beérkezett: 2002. március 29. Készült a T029772 és T037547 sz. OTKA pályázatok támogatásával. Operációkutatási Tanszék, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Pázmány P. s. 1/c, Budapest, H-1117 és Traffic Lab Ericsson Hungary, Laborc u.1, Budapest, H-1037. A szerző tagja az Egerváry Kutatócsoportnak (EGHRS), e-mail: frank@cs.elte.hu.

König Dénes érdeme volt, hogy felismerte az eredetileg Frobenius által vizsgált súlyozatlan probléma gráfelméleti jellegét, Frobenius tételét (amelynek ekvivalens alakja a Hall tétel) általánosította, és a konstruktív alternáló utas módszert alkalmazta tételének bizonyítására. Ennek segítségével hatékonyan ki lehet számítani páros gráf maximális elemszámú párosítását és az éleknek pontokkal történő minimális elemszámú lefoglalását. Akkoriban a gráfelmélet egyreképiben járt, így nem csoda, hogy Egerváry a tételét még a mátrixok nyelvén fogalmazta meg. Lényegét tekintve azonban ez a tétel a páros gráfokról szól, és az általánosításokhoz is könnyebben eljuthatunk, ha gráfok alakban adjuk meg. Tekintettel arra, hogy az A mátrix a_{ij} elemei költségként értelmezhetők, a továbbiakban a helyett a c jelölést használjuk. Azt is előrebocsátjuk, hogy a célfüggvényt néha költség- néha súlyfüggvény-nek nevezzük, az előbbi inkább minimalizáláskor, az utóbbi maximalizálás-kor használva.

1.2 Tétel. Legyen $G = (V, E)$ teljes páros gráf, melynek pontjai két n elemű osztályba vannak sorolva. Legyen továbbá $c : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ az éleknek egy nemnegatív számokkal történő súlyozása. Ekkor G teljes párosításának maximális súlya egyenlő a nemnegatív súlyozott lefoglalások minimális súlyával, ahol nemnegatív súlyozott lefoglalás egy olyan $\pi : V \rightarrow \mathbf{R}_+$ függvényét értjük, amelyre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ a gráf minden uv élére fennáll. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható egészértékűnek.

A szakirodalomban a maximális súlyú párosítás kérdését gyakran hozzárendelési problémának nevezik. Érdemes még egy ekvivalens alakban megfogalmazni Egerváry tételét, a lineáris programozás nyelvén.

1.3 Tétel. Jelölje A a G teljes páros gráf pont-él incidencia mátrixát, és legyen c nemnegatív célfüggvény. Ekkor a $\max\{ax : x \geq 0, Ax \leq 1\}$ lineáris program optimuma mindig felvethetik egész (és így $0 - 1$) vektoron, és van olyan egész optimális megoldás, amelyre $Ax = 1$. Továbbá, ha c egészértékű, úgy a $\min\{\sum (\pi(v) : v \in V), \pi \geq 0, \pi A \geq c\}$ lineáris program optimuma is egészen felvethetik, és a két optimum mindig megegyezik egymással.

Egerváry eredményének úttörő jellege a következőkben foglalható össze.

1. A tétel a legelső explicit megfogalmazása, mégha speciális mátrixokra is, a lineáris programozás dualitás tételének.
2. A dualitás tételnek olyan esetét írja le, amelyben mindig létezik egészértékű optimum.

3. A konstruktív bizonyítási jelleg rámutat az algoritmusoknak, mint önálló matematikai objektumoknak jelentőségére, összefüggésben az algoritmusok hatékonyságával. Bár 1931-ben e fogalmak értelmezésén fel sem vetődhettek, Egerváry módszere mind gyakorlatilag, mind elméletileg hatékony. Amint az kimutatható (lásd alább), polinomiális, sőt valójában erősen polinomiális futásidejű.

4. Egerváry tétele és eljárása azt demonstrálja, hogy egy elégszám matematikai eredmény nélkül nyújthat megoldást természetesen felvetődő gyakorlati kérdésekre.

A Magyar Módszer számos további eljárás kiindulópontja lett. Korai példaként Ford és Fulkerson minimális költségű folyam algoritmusra hozható fel. A hozzárendelési feladatban, szállítási problémákban, hálózati folyamoknál fellép az a jelenség, hogy az optimum egész vektoron is felvethetik. Ennek valójában közös gyökere van, éspedig az, hogy a szóban forgó problémához tartozó lineáris program feltételi mátrixa teljesen unimoduláris. A Magyar Módszer gondolatait azonban olyan körülmények között is sikerrel fejleszítették tovább, amikor a feltételi mátrix már nem teljesen unimoduláris, mégis az optimum egészértékűsége biztosítható, ennek massze ható kombinatorikus következményeivel együtt. Mindkét eljárás kiindulópontja J. Edmondstól származik. Az első segítségével meg lehet határozni tetszőleges gráf maximális súlyú párosítását. A második kiterjesztés matroidokra vonatkozik. Ennek segítségével például ki lehet számítani egy elsúlyozott irányítatlan gráf olyan minimális súlyú feszítő fáját, amely egy megadott pontban (vagy általában egy gráf stabil pontjában) fokszám korlátozások teszt eleger. Vagy, a gráf éhalmazán megadott k darab költségfüggvényhez meg tudunk határozni k éledegen feszítő fát úgy, hogy minimalizáljuk a kiválasztás teljes költségét, ahol az i -dik fát az i -dik költségfüggvény szerinti költsége szerint számoljuk be.

A dolgozat célja, hogy összefoglalót adjon az ilyen irányú eredményekről. Ennek során megadok néhány olyan bizonyítást, melyek ismertek ugyan, de Magyar nyelvű szakirodalomban még nem szerepeltek. A súlyozott matroid metszet tételre egy másutt még nem publikált új bizonyítást adok, amely csak a matroidok elemi tulajdonságait használja, szemben a komolyabb apparátust igénylő korábbi polidéres vagy algoritmikus háttérű bizonyításokkal. Azti is igazolni fogom, hogy már Egerváry eredeti bizonyítása is hatékony, azaz erősen polinomiális futásidejű algoritmust szolgáltat maximális súlyú teljes párosítás megkeresésére. Ez nem ugyanaz, mint a H. W. Kuhn által javasolt eljárás (amit valójában Kuhn nyomán Magyar Módszernek neveznek), mert Kuhn a duál változók cseréjét és az alternáló utas módszert egybeötvözteti, míg az Egerváry bizonyításból közvetlenül adódó algoritmusban a maximális elemszámú párosítást meghatározó König-féle algoritmus egy különálló szubrutinként szerepel.

2 Páros gráfok

2.1 Maximális elemszámú párosítások

Az egész elmélet kiindulópontja König [15] klasszikus tétele.

2.1 Tétel (König Dénes). Egy $G = (S, T, E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefoglaló pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.

Bizonyítás. Egy ν elemű párosítás lefoglaláshoz kell legalább ν csúcs, így az összes élhez is kell, ezért $\nu \leq \tau$. Ebből az is következik, hogy $(*)$ egy ν elemű L lefogás egy ν elemű párosítás minden élit pontosan egyszer fogja le.

A fordított irányhoz lássuk be, hogy G éleit lefoghatók $\nu(G)$ ponttal. Indirekt, legyen G minimális ellempélda abban az értelemben, hogy $\nu(G) < \tau(G)$, de minden G -nél kisebb G' gráfra $\nu(G') = \tau(G')$.

Minden u csúcsot elkerül maximális párosítás, mert ha valamelyiket nem, úgy $\nu(G-u) < \nu(G)$, és miután $G-u$ élei már lefoghatók $\nu(G-u) \leq \nu(G)-1$ ponttal, ezen lefogáshoz u -t hozzávéve G elemek egy legfeljebb $\nu(G)$ elemű lefogását kapnánk.

Legyen $e = st$ a gráf egy éle, melyre $s \in S, t \in T$. A $G - e$ elemek léteznek $\nu(G)$ elemű $L := A \cup B$ lefogása, ahol $A \subseteq S, B \subseteq T$. Az L nem fogja le e -t, mert különben G eleinek is $\nu(G)$ elemű lefogása volna. $G - s$ -nek van $\nu(G)$ elemű párosítása, amelynek B -t fedő M_B része $(*)$ miatt nem fedi A egyetlen pontját sem. $G - t$ -nek van $\nu(G)$ elemű párosítása, amelynek A -t fedő M_A része $(*)$ miatt nem fedi B egyetlen pontját sem. De most $M_A \cup M_B \cup \{e\}$ párosítása G -nek, melynek elemszáma $|A| + |B| + 1 = \nu(G) + 1$, ellentmondás. $\square$

A most következő algoritmikus bizonyítás lényegében König eredeti bizonyítása kicsit algoritmikusabb nyelven elmondva. (König nem tekintette explicit azt a kérdést, hogy miként lehet megtalálni a szóban forgó alternáló utakat, de a bizonyításából ez közvetlenül kiolvasható.)

Algoritmikus bizonyítás. A nemtriviális $\nu \geq \tau$ irány igazolásához konstruálunk egy M párosítást és egy L lefogást, melyek elemszáma ugyanaz. Az eljárás tetszőleges M párosításból indul ki, ami kezdetben az üres halmaz is lehet. Az általános lépésben vagy találunk egy nagyobb párosítást, és ekkor a nagyobb párosításra vonatkozóan iteráljuk az eljárást, vagy pedig egy $|M|$ -mel megegyező elemszámú lefogást, amikor is az algoritmus véget ér.

Irányítsuk meg M éleit T -ről S felé, míg az összes többi élt fordítva. Jelölje R_S illetve R_T az S -ben illetve a T -ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit szélességi kereséssel találhatunk meg). Két eset lehetséges. Amennyiben R_T -nek esik pontja Z -be, akkor megkapunk egy olyan R_S -t és R_T -t összekötő P utat, amely M -ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M -nél eggyel több élből álló M' párosítás. (Technikailag az eljárást nagyon egyszerű végrehajtani: a megtalált út elemeinek irányítását egyszerűen megfordítjuk.)

A másik esetben R_T diszjunkt Z -től. Z definíciója folytán Z -ből nem lép ki irányított élt. Erélyes továbbá, hogy Z -be nem lép be megirányított $uv \in M$ párosítás élt, hiszen u -n keresztül érhető el, így v csak akkor lehetett irányított úton elérhető R_S -ből, ha u is az volt.

Következik, hogy az $L := (T \cap Z) \cup (S - Z)$ halmaz egyrészt lefogja az összes élt, másrészt minden M -beli élnek pontosan az egyik végpontját tartalmazza, tehát $|M| = |L|$. $\square$

A fenti bizonyítás egyúttal hatékony algoritmust is jelent a szóban forgó

optimumok meghatározására. A lépésszám megbecsléséhez figyeljünk meg, hogy legfeljebb $n/2$ alkalommal kell utat keresnünk. Miután egyetlen út megkeresése az élszámmal arányos időben történhet, az összlépésszám nem nagyobb, mint $O(nm)$ (ahol n a gráf pontszáma, míg m az élszáma).

A König tételez szorosan kapcsolódik Hall tételéhez.

2.2 Tétel. Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik S -t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-féle feltétel:

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ minden } X \subseteq S \text{ részhalmazra,} \quad (3)$$

ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon T -beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X -ben.

A tételt rögtön kicsit általánosabb alakban igazoljuk. Defináljuk egy $X \subseteq S$ halmaz hiányát a $h(X) := (|X| - |\Gamma(X)|)$ értékkel és legyen $\mu = \mu(G, S)$ a maximális hiány, azaz

$$\mu := \max_{X \subseteq S} h(X). \quad (4)$$

2.3 Tétel. Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy párosítás által nem fedett S -beli pontok minimális száma egyenlő μ -vel.

Bizonyítás. A $\max \leq \min$ egyenlőtlenség nyilván fennáll. A fordított irány igazolásához legyen M egy maximális (azaz ν elemű) párosítás és L egy minimális (azaz $\tau = \nu$ elemű) lefogás. Legyen $X := S - L$. Ekkor M pontosan $|S| - \nu$ elemét nem fedi S -nek. Másrészt $\Gamma(X) \subseteq L - S$ és így

$$|X| - |\Gamma(X)| \geq |S - L| - |L - S| = |S| - |L| = |S| - \tau = |S| - \nu. \quad \square$$

Legyen $\mathcal{F}$ az S maximális (azaz μ) hiányú részhalmazainak rendszere, vagyis $\mathcal{F} := \{X \subseteq S : |X| - |\Gamma(X)| = \mu\}$. Az $\mathcal{F}$ tagjait röviden *max-hiányú* halmazoknak fogjuk hívni. Az előbbi bizonyítás mutatja, hogy egy-egy értelmi kapcsolat áll fenn a minimális lefogások és a max-hiányú S -beli halmazok között. Ha L minimális lefogás, akkor $S - L$ max-hiányú halmaz, míg ha $H \subseteq S$ max-hiányú halmaz, akkor $\Gamma(H) \cup (S - H)$ minimális lefogás lesz.

2.4 Lemma. $\mathcal{F}$ zárt a metszet és unió képzésre.

Bizonyítás. Könnyű ellenőrizni, hogy a h függvény szupermoduláris, azaz $h(X) + h(Y) \leq h(X \cap Y) + h(X \cup Y)$. Tegyük most fel, hogy X és Y két maximális hiányú halmaz (azaz $\mathcal{F}$ elemei). Ekkor $\mu + \mu = h(X) + h(Y) \leq h(X \cap Y) + h(X \cup Y) \leq \mu + \mu$, és emiatt valóban $h(X \cap Y) = \mu$, $h(X \cup Y) = \mu$. $\square$

A lemmából következik, hogy az összes max-hiányú halmaz metszete is és uniója is max-hiányú, azaz létezik egy értelmi legszűkebb és egy legbővebb max-hiányú halmaz. Megjegyzendő, hogy König fenti alternáló utas algoritmusa segítségével e két halmaz könnyen megkonstruálható. Például,

a legszűkebb K max-hiányú halmaz, amint azt könnyű kimutatni, éppen $Z \cap S$ lesz, ahol Z jelölte az irányított segédgráfban az R_S -ből elérhető pontok halmazát. Ez egyúttal azt is mutatja, hogy az algoritmus által produktált $(S - K \cup \Gamma(K))$ lefogás nem függ az algoritmus futásától (szemben az algoritmus által szolgáltatott párosítással). A súlyozott párosítási algoritmus bizonyításához szükségünk lesz még az alábbi hasznos megfigyelésre.

2.5 Lemma. *Legyen $K \subseteq S$ a legszűkebb max-hiányú halmaz G -ben. Ha a gráfból kitöröljük az összes olyan élt, amely $\Gamma(K)$ és $S - K$ között vezet, akkor a létrejövő G' gráfban a maximális hiány ugyanaz, mint G -ben. Továbbá G és G' max-hiányú halmazainak rendszere ugyanaz.*

Bizonyítás. Mivel G egy M maximális párosításának a $\Gamma(K)$ -t fedő élei mind K -ban végződnek, az M benne van G' -ben is, vagyis G' max hiánya legfeljebb akkora, mint G -é, de persze kisebb nem lehet, mert G' részgráfja G -nek. Ebből az is következik, hogy a G egy max-hiányú halmaza G' -ben is max-hiányú. Legyen most X tetszőleges max-hiányú halmaz G' -ben. Mivel K max-hiányú G' -ben is, a 2.4 lemma szerint $K \cap X$ is max-hiányú G' -ben. De akkor $K \cap X$ max-hiányú G -ben, hiszen $K \cap X$ -ből induló élt nem törölünk, és így a K minimalitása folytán $K \subseteq X$. Ekkor viszont $\Gamma(X) = \Gamma(X)$, azaz X max-hiányú G -ben is. $\square$

2.2 Súlyozott párosítások

Egervárynak az 1.2 tételére adott eredeti bizonyításának a váza a következő. Legyen π egy minimális súlyú nemnegatív, egészértékű súlyozott lefogás. (A π súlyán a $\sum |\pi(v)| : v \in S \cup T$ összeg értendő.) Feltételünk, hogy π az S elemein mindenütt pozitív, mert ha nem, akkor az S -beli pontokon egyvel növelve, a T -beli pontokon egyvel csökkentve má' ilyen lesz. Amennyiben azon élek G_π részgráfjában, melyekre $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$ létezik teljes M párosítás, úgy M maximális súlyú párosítás, melynek súlya egyenlő a $\pi(v)$ értékek összegével. Ha viszont G_π -ben nincs teljes párosítás, úgy a $\pi(v)$ értékek összege kisebb, mint a π értékeké. A π értékeit az X pontjain egyvel csökkentve, a $\Gamma_{G_\pi}(X)$ pontjain pedig egyvel növelve, egy másik nemnegatív, súlyozott lefogást kapunk, amelynek súlya kisebb, mint π -é, ellentmondásban π minimalitásával.

Ez a bizonyítás könnyen algoritmizálható, hiszen tetszőleges π súlyozott lefogásból kiindulva vagy talál egy maximális súlyú teljes párosítást, és ekkor az aktuális π is optimális, vagy pedig talál egy jobb súlyozott lefogást, amivel az eljárást iterálva véges sok lépés után az első eset következik be. Egy kézenfekvő gyorsítási lehetőség azonnal kímálkozik (amint azt Egerváry a későbbi [9] dolgozatában maga is javasolja): a π súlyozott lefogás módosításakor ne egyvel növeljünk vagy csökkentünk, hanem a legnagyobb olyan δ értékkel, amelyre a módosított π' még súlyozott lefogás. Az így nyert eljárást nevezzük Egerváry algoritmusának. (Hangsúlyozzuk, hogy ez nem ugyanaz, mint a H. W. Kuhn által kifejlesztett primál-duál eljárás, amit ma valószínűleg

világban Kuhn javaslata nyomán Magyar Módszernek hívják.)

Az Egerváry algoritmusnak ez az előnye is megvan, hogy nem egészértékű c súlyfüggvényre is működik, bár ekkor még az is kérdés, hogy az eljárás véges-e egyáltalán, és Egerváry valójában a nemegész c esetét nem algoritmusként, hanem folytonossági megfontolásokkal intézte el.

Nem kevésbé fontos a másik kérdés, hogy Egerváry algoritmusra milyen hatékony, akár egész c , akár nem. Példával megmutatható, hogy ha tetszőleges olyan X halmazt használunk a π módosítására, amely megsérti a Hall-féle feltételt, akkor az algoritmus nem polinomiális futásidőjű (és ez a kellemetlen ség még akkor is előfordulhat, ha X maximális hiányú halmaz.) Ráadásul irracionális költségek esetén még azt sem tudjuk, hogy az algoritmus véges sok lépés után megáll-e.

Egerváry azonban [8]-ban azt javasolja, hogy a π változtatását annak a maximális hiányú X halmaznak a segítségével végezzük, amelyet König alternáló utas algoritmus szolgáltat, amely tehát az (egyértelmű) legszűkebb max-hiányú halmaz. Az alábbiakban kimutatjuk, hogy Egerváry algoritmusra ilyenkor polinomiális, sőt erősen polinomiális futásidőjű. Mivel nem jelent semmilyen többlet nehézséget, a bizonyítást rögtön a tétel azon csöppnyit általánosabb alakjára mondjuk el, amikor a páros gráf nem feltétlenül teljes, csupán azt írjuk elő, hogy tartalmazzon teljes párosítást.

2.6 Tétel. *Tegyük fel, hogy a $G = (S, T, E)$ páros gráfnak van teljes párosítása. Legyen továbbá $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ az éleknek egy nemnegatív számokból történő súlyozása. Ekkor G teljes párosításainak maximális súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális súlyával, ahol súlyozott lefogáson egy olyan $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt értünk, amelyre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ a gráf minden uv élére fennáll. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható egészértékűnek. Amennyiben G teljes páros gráf, az optimális π választható nemnegatívnak.*

Bizonyítás. Tetszőleges M teljes párosításra és π súlyozott lefogásra fennáll, hogy $\sum (\pi(z) : z \in S \cup T) = \sum (\pi(u) + \pi(v) : uv \in M) \geq \sum (c(uv) : uv \in M)$ vagyis a minimum valóban legalább a maximum. Az is kiolvasható, hogy itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha az M párosítás minden uv éle pontba, abban az értelemben, hogy $\pi(u) + \pi(v) = c(uv)$. Célnk tehát azt kimutatni, hogy létezik egy olyan π , amelyre nézve a pontos élek gráfjában létezik teljes párosítás.

Legyen π egy olyan súlyozott lefogás (egészértékű, ha c az), amelyre a pontos élek $G_\pi = (S, T; E_\pi)$ részgráfjában a $\mu_\pi (= |S| - \nu(G_\pi))$ érték minimális és ezen belül, az (egyértelmű) legszűkebb max-hiányú $K \subseteq S$ halmaz a leghelyesebb. Készen vagyunk, ha a μ_π maximális hiány nulla, mert ez épp azt jelenti, hogy G_π -nek van teljes párosítása. Tegyük fel tehát, hogy $\mu_\pi > 0$. Mivel G_π -nek van teljes párosítása, biztosan van olyan e éle G_π -nek, amely F és $T - \Gamma_\pi(K)$ között vezet, ahol $\Gamma_\pi(K)$ jelöli a K szomszédainak halmazát G_π -ben. Ilyen él nem pontos, így a

$$\delta := \min(\pi(u) + \pi(v) - c(uv) : uv \in E, u \in K, v \in T - \Gamma_\pi(K)) \quad (5)$$

érték pozitív. Módosítsuk π -t úgy, hogy a K minden elemén δ -val csökkentsük, míg $\Gamma_\pi(K)$ minden elemén δ -val növeljük, azaz

$$\pi'(v) := \begin{cases} \pi(v) - \delta, & \text{ha } v \in K; \\ \pi(v) + \delta, & \text{ha } v \in \Gamma_\pi(K); \\ \pi(v), & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (6)$$

A δ választása miatt az így módosított π' továbbra is súlyozott lefogás, amely egészértékű, ha c az volt. A π' -ra vonatkozó pontos élek $G_{\pi'}$ gráfja abban különbözik G_π -től, hogy van legalább egy éle (ahol a δ -t definiáló minimum felvételre) K és $T - \Gamma_\pi(K)$ között, de biztosan nincsen éle $T \cap \Gamma_\pi(K)$ és $S - K$ között (miközben G_π -nek lehetett). A 2.5 lemma szerint $\mu_{\pi'} = \mu_\pi$, és $G_{\pi'}$ -ben a legszűkebb max-hányú halmaz szigorúan bővebb, mint K , és ez ellentmond π választásának.

Belátnuk tehát, hogy van olyan π súlyozott lefogás, amelyre a pontos élek részgráfjában van teljes párosítás. Végül tegyük fel, hogy G teljes páros gráf, és igazoljuk, hogy π választható nemnegatívnak. Legyen a π legnagyobb értéke $-\alpha$ ahol $\alpha > 0$ és legyen $\pi(v) = -\alpha$, ahol v mondjunk S -ben van. ekkor minden $u \in T$ csúcsra $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv) \geq 0$ miatt $\pi(u) \geq \alpha$. Így ha π -t úgy módosítjuk, hogy S elemein növeljük α -val, míg T elemein csökkentjük α -val, akkor egy másik minimális súlyozott lefogás keletkezik, amelyik már nemnegatív. $\square$

A 3. szakaszban még az is kiderül, hogy az optimális súlyozott lefogás pontosan akkor választható nemnegatívnak, ha a maximális súlyú párosítás teljes párosításon vetetük fel (amely feltétel persze teljes páros gráf esetén fennáll.)

A bizonyítás alapján Egerváry algoritmusra a következő. Az algoritmus beemenete egy teljes párosítással rendelkező páros gráf, míg a kimenete egy maximális súlyú párosítás és egy minimális súlyú súlyozott lefogás. Szubrutinként szükségünk van a súlyozatlan esetre vonatkozó fentebb ismertetett alternáló utas algoritmusra, amely egy tetszőleges $G' = (S, T; E')$ páros gráfban megkonstruál egy maximális M' párosítást és a(z egyértelmű) legszűkebb $K' \subseteq S$ max-hányú halmazt (melyekre tehát $|M'| = |\Gamma_\pi(K')| + |S - K'|$). Hivatkozás kedvéért ezt König szubrutinnak nevezzük.

Az algoritmus egy általános lépésben rendelkezésre áll egy π súlyozott lefogás (amely egészértékű, ha c az, és amely kezdetben lehet például az azonosan α lefogás, ahol α a $c(e)$ költségek maximuma. Alkalmazzuk a König szubrutint a π -re nézve pontos élek G_π részgráfjára. Amennyiben G_π -ben van M teljes párosítás, úgy az algoritmus az aktuális π súlyozott lefogás és M teljes párosítás kiadásával véget ér. Ha viszont G_π -nek nincs teljes párosítása, úgy a szubrutin által szolgáltatott $(G_\pi$ -re nézve) legszűkebb K_π max-hányú halmaz segítségével (6) szerint módosítjuk π -t, és az eljárást iteráljuk.

Mi mondható az algoritmus lépésszámáról? Tekintsük egy fázisanak az algoritmus azon szakaszát, amíg a pontos élek (egyre változó) részgráfjában a maximális hiány változatlan. Nyilván legfeljebb $|S|$ fázis létezik. Egy fázis során a szubrutint legfeljebb $|S|$ -szer hívjuk meg, hiszen belátnuk, hogy a π

cseréjekor a legszűkebb max-hányú halmaz szigorúan bővül. Vagyis a súlyozatlan esetre vonatkozó alternáló utas algoritmusnak legfeljebb $|S|^2$ -szeri meghívásával az algoritmus futása befejeződik. Míután König algoritmusának lépésszámára $O(|S||E|)$ korlát volt mondható, a leírt súlyozott eljárás teljes futásideje $O(|S|^3|E|)$.

Bár ez a lépésszám nem különösebben látványos (és valójában hatékonyabb eljárások is léteznek), mindenesetre azt megkaptuk, hogy az algoritmus polinomiális futásidejű, sőt erősen polinomiális is abban az értelemben, hogy a futásidő egyáltalán nem függ a szereplő c költségfüggvényről, amennyiben feltesszük, hogy a számokkal végzett összeadást, kivonást és összehasonlítást egyetlen lépésben tudjuk elvégezni.

A jelen megközelítés előnye, hogy tisztán mutatja a súlyozatlan és a súlyozott párosítási algoritmusok viszonyát. A súlyozatlan König-féle algoritmus teljesen szeparáltnak, szubrutinként kerül felhasználásra. Amint azt H. W. Kuhn megmutatta, a két eljárás összehasonlítható, aminek talán hátránya, hogy az algoritmus összetettségébe válik, de előnye, hogy jobb lépésszám becslés adódik. Most ismertetjük a Kuhn által javasolt Magyar Módszert.

Kuhn algoritmusra súlyozott teljes párosítás meghatározására

Az általános lépésben tekintjük a pontos élek által (az $S \cup T$ pontthalmazon) alkotott G_π részgráfot. Legyen M egy már rendelkezésre álló párosítás G_π -ben. Irányítsuk meg M élett T -től S felé, míg az összes többi G_π -beli élt fordítva. Jelölje R_S illetve R_T az S -ben illetve a T -ben az M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az R_S pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg). Amennyiben R_T -nek esik pontja Z -be, akkor megkapunk egy olyan R_S -t és R_T -t összekötő P utat, amely M -ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M -nél eggyel több élből álló M' párosítás. Ekkor az eljárás egy fázisa véget ér, és az új M' párosítással folytatva iteráljuk az eljárást.

Nézzük most azt az esetet, amikor R_T diszjunkt Z -től. Legyen $K_\pi := Z \cap S$ és módosítsuk π -t a (6)-ban leírtak szerint. Ekkor az R_S -ből elérhető pontok halmaza szigorúan bővül. Így egy fázis (ami alatt tehát a pontos élek gráfjában a maximális párosítás elemszáma nem nő) $|S|$ utkereső eljárás alkalmazása után véget ér. Mivel egy utkeresés $O(|E|)$ lépésben végrejárható és legfeljebb $|S|$ fázis van, az algoritmus teljes futásideje $O(|E||S|^2)$.

A fejezet lezárásaképp megmutatjuk, hogy a maximális súlyú (nem feltétlenül teljes) párosítás meghatározásának problémája egyszerű fogással visszavezethető a maximális súlyú teljes párosításra.

2.7 Tétel. Egy $G' = (S', T'; E')$ páros gráfban nemnegatív c súlyfüggvény esetén a párosítások maximális v'_c súlya egyenlő a nemnegatív (!) súlyozott lefogások minimális r'_c súlyával. Amennyiben c egészértékű, az optimális π' is választható egészértékűnek.

Bizonyítás. A $v'_c \leq r'_c$ egyenlőtlenség nyilvánvaló, így csak a fordított irányú

foglalozunk. Új pontok esetleges hozzávételével elérhetjük, hogy a páros gráf két osztálya egyforma méretű legyen. Egészítsük ki a gráfot 0 súlyú élek bevitelével egy G teljes páros gráffá. A súlyfüggvény ezen kiterjesztését továbbra is jelölhetjük c -vel. A 2.6 tétel (második része) szerint G -nek létezik egy M teljes párosítása és c -nek egy π nemnegatív súlyozott lefoglalás, melyekre $c(M) = \sum \pi(v)$. Mivel az új élek súlya 0, így az új élek kihatásával M -ből keletkező G' -beli M' párosítás súlya változatlanul $c(M)$. Mintán új pontból (ha van) csak 0 súlyú él megy ki, így π értéke az új pontokon 0, vagyis, ha π -t megszorítjuk az eredeti pontokra, akkor a keletkező π' -re $\sum \pi'(v) = \sum \pi(v)$, és így $\sum \pi'(v) = c(M')$. $\square$

Végül megjegyezzük, hogy tetszőleges rögzített k pozitív egészre Ford és Fulkerson minimális költségű folyam algoritmusának segítségével ki lehet számolni a maximális (vagy minimális) súlyú k élű párosítást, ha ilyen párosítás egyáltalán létezik.

3 Teljesen unimoduláris mátrixok az optimálizálásban

Az alábbiakban ismertettük azt a Hoffmantól és Kruskaltól [13] származó megközelítést, amely rávilágít arra a háttérben megbújó mélyebb okra, ami miatt Egerváry tétele fennáll. Ez pedig az, hogy egy páros gráf pont-él incidencia mátrixa teljesen unimoduláris, és a lineáris programozás dualitás tételében az optimumok egészértékű vektoron is felvételnek, amennyiben a feltételi mátrix teljesen unimoduláris.

Az alábbiakban egy mátrixot vagy egy vektort akkor nevezünk egésznek vagy egészértékűnek, ha minden eleme (komponense) egész szám. Valamely A mátrixot akkor nevezünk *teljesen unimodulárnak*, ha minden aldetermínusa $(0, \pm 1)$ értékű. Speciálisan, ilyen mátrix minden eleme 0, +1 vagy -1. Világos, hogy TU-mátrix transzponáltja is az. Sorokat vagy oszlopokat -1-gyel szorozva vagy elhagyva ismét TU-mátrixot kapunk. Továbbá, egységvektorokat soroként vagy oszlopoként egy TU-mátrixhoz illesztve TU-mátrixot kapunk. Így ha az A TU-mátrixot kiegészítjük egy I egységmátrixszal, akkor a keletkező (A, I) mátrix is TU-mátrix. Ha A TU-mátrix, úgy $(A, -A)$ is az. Példaképp, legyen A egy $D = (V, E)$ irányított gráf incidencia mátrixa, azaz A sorai a V -nek, oszlopai E -nek felelnek meg, és az $a_{v,e}$ elem akkor +1 illetve -1, ha az e él belép illetve kilép v -ből (egyébként 0). Nem nehéz igazolni, hogy digráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris, és hogy páros gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.

Ezeket általánosítja a *hálózati mátrix*. Legyen D olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő, és legyen F egy feszítő fa. Az A mátrix sorai az F éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az F -en kívüli éleknek. Minden uv nem-fa élre a fában egy egyértelmű (nem biztosan irányított) út vezet v -ből u -ba. Ennek egy f elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha f iránya megegyezik az útéval és -1-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix

minden más eleme 0. Számos érdekes alkalmazást tesz lehetővé az alábbi Tütte-től való eredmény.

3.1 Tétel. Az A hálózati mátrix teljesen unimoduláris.

Bizonyítás. Mivel hálózati mátrix részmatrixa is az, elég azt belátni, hogy egy négyzetes hálózati mátrix determinánása 0, 1 vagy -1. Hálózati mátrix sorát vagy oszlopát -1-gyel szorozva hálózati mátrixot kapunk. Egy sor vagy oszlop -1-gyel való szorzása annak felét meg, hogy a megfelelő élt (akár fa-él, akár nem-fa él) átirányítjuk.

Tekintsük a fának egy v végpontját. Ha az F fa v -vel szomszédos éléhez tartozó sorban lévő nemnulla elemek α száma legfeljebb 1, akkor a determináns kifejezési szabály alapján indukcióval készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $\alpha > 1$, vagyis v szomszédos legalább két nem-fa éllel. Átirányítás miatt feltehető, hogy ezek közül pontosan egy van v felé irányítva. Legyen ez sv és legyen vt egy másik nem-fa él. Ha az sv -nek megfelelő oszlopot, hozzáadjuk a vt -nek megfelelő oszlophoz, akkor egyrészt persze a determináns értéke nem változik, másrészt ismét hálózati mátrixot kapunk, és pedig azé a gráfét, amelyben a vt él helyett az st él szerepel.

Ilyen átalakításokkal egy olyan digráft kaphatunk, amelyben az F feszítő fa változatlan, egyetlen nem-fa él (nevezetesen sv) szomszédos v -vel, vagyis a hozzátartozó hálózati mátrix v -nek megfelelő sorában egy nemnulla elem van. Ilyen hálózati mátrixról pedig már láttuk, hogy a determinánása 0, ± 1 , ugyanakkor a fenti operációk nem változtatják a determináns abszolút értékét. $\square$

Most vizsgáljuk, hogy a lineáris programozás dualitás tétele illetve a Farkas lemmá miként alkalmazható olyan kombinatorikus optimalizálási feladatok esetén, mint amilyen a súlyozott párosítás problémája. A megoldás kulcsa az a megfigyelés lesz, hogy bizonyos speciális feltételi mátrixok esetén az optimum mindig egész vektoron is felvételik.

Adott $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrixhoz tekintsük a

$$Px = b_0, \quad Qx \leq b_1 \quad (7)$$

lineáris rendszert. Tegyük fel, hogy ennek megoldás halmaza az R poléder nem üres. Az R egy elemét nevezük *erős bázis-megoldásnak*, ha előáll valamely $M'x' = b'$ egyenletrendszer egyértelmű megoldásának nulla komponensselkel való kiegészítéseként, ahol M' az M egy $[(\tau(M)) \times (\tau(M))]$ -es nonszinguláris részmatrixa és b' jelöli a b azon részét, amely az M' sorainak felel meg. (Könnyű igazolni, hogy egy $\{Ax = b, x \geq 0\}$ alakú rendszer egy megoldása pontosan akkor erős bázis-megoldás, ha a pozitív komponenseihez tartozó A -oszlopok lineárisan függetlenek). Abban a speciális esetben, amikor R csúcsos, némi munkával igazolható, hogy az erős bázis-megoldások éppen az R csúcsai. A definícióból következik, hogy legfeljebb csak véges sok erős bázis-megoldás létezhet. A Carathéodory tétel egy változata szerint, mindig létezik erős bázis-megoldás, sőt tetszőleges olyan c célfüggvényre,

amelyre cx felülről korlátozott az R poléderen, érvényes, hogy az R bármely x' eleméhez létezik egy olyan x^* erős bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cx'$, amiből adódik, hogy a $\max\{cx : x \in R\}$, ha korlátozott egyáltalán, akkor egy erős bázis-megoldáson felvétel.

3.2 Lemma. Tetszőleges M TU-mátrixszal megadott (7) egyenlőtlenség-rendszer esetén, ha a jobboldali korlátozó b vektor egész, akkor minden erős bázis-megoldás egész.

Bizonyítás. Egy erős bázis-megoldás előáll valamely $M'x' = b'$ egyenlőtlenszer egyértelmű megoldásának nulla komponensekkel való kiegészítéséeként, ahol M' az M egy $[(r(M)) \times (r(M))]$ -es nemszinguláris részmatrixa és b' jelöli a b azon részét, amely az M' sorainak felel meg. Mármost, ha M TU-mátrix, akkor a nemszinguláris M' determinánsa $+1$ vagy -1 . A Cramer szabály szerint, miután b' egész, az egyértelmű x' megoldás is az.

3.3 Lemma. Legyen c tetszőleges (nem feltétlenül egészértékű) vektor. Bármely

$$M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$$

TU-mátrixszal megadott $K := \{x : Px = 0, Qx \leq 0\}$ metszet-képnek, ha van olyan x eleme, amelyre $cx' > 0$, akkor K -nek van ilyen $(0, \pm 1)$ -értékű eleme is.

Bizonyítás. Mivel x' pozitív számszorosa is K -ban van, feltehető, hogy x' maga olyan, hogy minden komponense a $[-1, +1]$ zárt intervallumba esik. Vagyis a

$$(-1, \dots, -1) \leq x \leq (1, \dots, 1), \quad Px = 0, \quad Qx \leq 0 \quad (9)$$

rendszer által meghatározott korlátozott polédernek x' olyan eleme, amelyre $cx' > 0$. Ekkor az előbb említett tulajdonság szerint van olyan x^* erős bázis-megoldása (8)-nak, amelyre $cx^* \geq cx'$. A 3.2 lemma miatt x^* egészértékű, azaz minden komponense $0, \pm 1$. $\square$

A Farkas lemma (egyik változata) azt mondja ki, hogy a (7) és az alábbi (9) lineáris rendszerek közül pontosan az egyik oldható meg. Amennyiben a szereplő M mátrix teljesen unimoduláris, a megoldásokról több mondható:

3.4 Tétel. Tegyük fel, hogy az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris.

Ha a (7) primál probléma oldható meg és a korlátozó b vektor egész, akkor (7)-nek van egész megoldása is. Ha az

$$y_1 \geq 0, \quad yM = 0, \quad yb < 0 \quad (9)$$

duális probléma oldható meg, ahol $y = (y_0, y_1)$, akkor van $(0, \pm 1)$ -értékű y megoldás is (függetlenül b egészértékűségétől).

Bizonyítás. A tétel első fele következik a 3.2 lemmából, és abból a már említett eredményből, hogy ha létezik megoldás, akkor létezik erős bázis-megoldás is. A tétel második fele pedig a 3.3 lemma közvetlen következménye. $\square$

3.5 Tétel. Ha a $\max\{cx : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ lineáris programozási problémának létezik megoldása, továbbá ha az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris és b egész, akkor az optimum egész vektoron is felvétel (függetlenül attól, hogy c egészértékű vagy sem).

Bizonyítás. Miután az optimum erős bázis-megoldáson is felvétel, a 3.2 lemmából az eredmény következik. $\square$

Alkalmazásként először levezetjük Kőnig tételét.

A 2.1 tétel bizonyítása. Nyilván minden gráfra $\nu \leq \tau$. Az egyenlőség igazolásához azt kell kimutatnunk, hogy páros gráfban létezik olyan párosítás és olyan lefoglaló pontrendszer, melyek elemszáma megegyezik.

A páros gráf incidencia mátrixát jelölje A , amelyben a soroknak a gráf pontjai, az oszlopoknak a gráf élei felelnek meg. Tekintsük a következő primál-duál lineáris program párt:

$$\max\{1x : Ax \leq 1, x \geq 0\}, \quad (10)$$

$$\min\{1y : yA \geq 1, y \geq 0\}. \quad (11)$$

A 3.5 tétel szerint mindkét programnak az optimuma egész vektoron felvétel. Jelöljük ezeket rendre x_0 -al és y_0 -al. (10) minden egészértékű megoldása $0 - 1$ értékű, és rögtön látszik, hogy (11) minden optimális egészértékű megoldása is $0 - 1$ értékű. Legyen M azon élek halmaza, melyeken x_0 az 1 értéket veszi fel, és legyen L azon pontok halmaza, amelyek y_0 az 1 értéket veszi fel. Az $Ax \leq 1$ feltétel azt jelenti, hogy M párosítás a gráfban, míg az $yA \geq 1$ feltétel azt jelenti, hogy L az éleket lefoglaló pontrendszer. A primál és duál optimum értékek egyenlősége pedig azt jelenti, hogy $|M| = |L|$, ami a célunk volt. $\square$

Természetesen a primál programban az azonosan 1 célfüggvény helyett választhatunk tetszőleges c célfüggvényt. Ekkor a fenti módszer kiadja a 2.6 tételt, sőt annak utolsó mondatát még az alábbi erősebb alakban: Az optimális π akkor és csak akkor választható nemnegatív, ha a maximális súlyú párosítás teljes párosítás is felvétel.

További általánosítást kaphatunk, ha a primál feladatban a jobboldalt valamilyen (nemnegatív) b vektornak választjuk. Ennek az a kombinatorikus jelentése, hogy maximális költségű fókuszam-korlátozott részgráfot keressünk. Természetesen alsó korlátozást is kitűzhetünk a fókuszamokra, mint ahogy korlátozhatjuk alulról és felülről azt, hogy egy élt hány példányban vehetünk be a keresett részgráfba. Valójában nem is érdemes megfogalmazni a különböző lehezőségekre vonatkozó min-max tételeket, mert a duálisás tétel és a páros gráf incidencia mátrixának teljes unimodularitása már magában hordozza a szükséges információit.

A szakasz befejezéséként megmutatjuk, hogy a TV-mátrixokra vonatkozó Farkas lemma (3.4 tétel) miként adja ki Hoffman megengedett áram tételét. Jelöljön $D = (V, E)$ egy irányított gráfot. Legyen $f : E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó

kapacitás, $g : E \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Valamely $x : E \rightarrow \mathbf{R}$ vektorra és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\theta_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in E, uv \text{ belép } S\text{-be})$ és legyen $\delta_x(S) := \theta_x(V - S)$. Az x vektort áramnak (cirkulációnak) nevezzük, ha teljesül a rá megmaradási szabály, azaz $\theta_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. Az x áramot megengedettnek mondjuk, ha

$$f \leq x \leq g. \quad (12)$$

3.6 Tétel (A. Hoffman, 1960). *Akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\theta_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \quad (13)$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek, és (13) fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett áram is.

Bizonyítás. A szükségeség igazolásához, tegyük fel, hogy x megengedett áram. Ekkor $\delta_g(X) - \theta_f(X) = \theta_x(X) = 0$, amiből (13) következik.

Az elegendőséghöz tekintsük az $\{Ax \leq 0, x \leq g, -x \leq -f\}$ rendszert. Figyeljük meg, hogy a jelen esetben egy x vektorra akkor és csak akkor teljesül az $Ax \leq 0$ egyenlőtlenség, ha $Ax = 0$. A 3.4 tételt alkalmazva kapjuk, hogy ha a fenti rendszernek nincs megoldása, akkor van olyan $(y, u, v) (0, 1)$ -értékű vektor, amelyre $(*)$ $yA + u - v = 0$ és $(**)$ $uy - vf < 0$. Mivel $f \leq g$, így minden élre feltehető, hogy $u(e)$ és $v(e)$ közül legalább az egyik nulla (ha ugyanis mindkettő 1, akkor mindkettőt helyettesíthetjük nullával).

Jelölje Z azon z pontok halmazát, ahol az $y(z) = 1$. Ekkor $(*)$ miatt minden olyan e élre, amelynek mindkét vége vagy Z -ben vagy $V - Z$ -ben van, $u(e) = v(e) = 0$. Továbbá minden Z -be belépő e élre $v(e) = 1$, $u(e) = 0$ és minden Z -ből kilépő élre $v(e) = 0$, $u(e) = 1$. Mivel $uy - vf = \delta_g(Z)$ és $vf = \theta_f(Z)$, így $(**)$ ellentmond a (13) feltételnek. $\square$

4 Párosítások nem-páros gráfban

Nem-páros gráfokra a maximális (súlyú) párosítás meghatározásának problémája jóval nehezebb, mint a páros esetben. Ebben a fejezetben ismertétjük azt a döntően J. Edmondstól eredő elméleti hátteret, amely lehetővé tette [4] az algoritmusok kidolgozását. Maguk az algoritmusok összetettebbek annál, semhogy egy ilyen összefoglaló cikk keretében vállalkozhatnánk a bemutatásukra, ugyanakkor az alábbi fő eredményeinkre mára már viszonylag tömör bizonyítások állnak rendelkezésre. A közötti bizonyítások Schrijver [17] munkájából valók, némi egyszerűítéssel.

4.1 Maximális elemszámú párosítások

A maximális elemszámú párosítás meghatározásának kérdésére Tutte tétele illetve a Berge-Tutte formula adja meg az elvi választ. A háromszög példája mutatja, hogy a páros gráfra vonatkozó esettel szemben, itt már a párosítások maximális ν elemszáma lehet szigorúan kisebb, mint a lehető pontok minimális τ száma.

4.1 Tétel (W. T. Tutte). *Egy $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha a csúcsok bármely X részhalmazát kihagyva a keletkező párhuzam pontszámú komponensek $q(X)$ száma legfeljebb $|X|$.*

Ezt általánosítja (bárha könnyen levezethető belőle) a párosítások maximális számára vonatkozó Berge-Tutte formula.

4.2 Tétel (Berge-Tutte formula).

$$\nu(G) = \min(|V| - q(X) + |X| : X \subseteq V)/2. \quad (14)$$

Vagy ekvivalens alakban, egy párosítás által fedetlenül hagyott pontok minimális száma egyenlő $q(X) - |X|/2$ érték minimumával.

Bizonyítás. Egy összefüggő gráfot (faktor-)kritikusnak neveznek, ha bármely pontját kihagyva a maximális párosítás elemszáma nem csökken, más szóval minden csúcsot elkerül maximális párosítás. A bizonyítás egyszerű indukcióval fog következni az alábbi lemmából.

4.3 Lemma (Gallai). *Ha $H = (U, F)$ gráf kritikus, akkor $|U|$ párhuzam és $\nu(H) = (|U| - 1)/2$, azaz H -nak van olyan párosítása, amely egyetlen pontot hagy fedetlenül.*

Bizonyítás. Kritikus gráfunk természetesen nem lehet teljes párosítása. Tegyük fel indirekt, hogy H egy maximális párosítása legalább két pontot fedetlenül hagy, és válasszuk meg ezt az M párosítást és a fedetlen s és t pontokat úgy, hogy a H -beli távolságuk minimális legyen. Ez a távolság persze nem lehet egy, azaz s és t nem lehet szomszédos, mert akkor az s és t között M -hez vére nagyobb párosítást kapnánk. Az s -t és t -t összekötő P legrovidebb útnak legyen x egy belső pontja. Mivel H kritikus, létezik x -t elkerülő maximális M' párosítás. M és M' két maximális elemszámú párosítás, ezért szimmetrikus differenciájuk diszjunkt alternáló körökből és páros élszámú utakból áll. Ezek közül jelölje R az x -t tartalmazó utat. Ekkor M és R szimmetrikus differenciája egy olyan M'' maximális párosítás, amely szabadon hagyja x -t, és legalább az s és t pontok egyikét, és ez ellentmond az s, t és M választásának. $\square$

Ráérve a Berge-Tutte formula bizonyítására, látható, hogy tetszőleges M párosítás és $X \subseteq V$ halmaz esetén legalább $q(X) - |X|$ pont marad fedetlen, azaz M legfeljebb $|V| - (q(X) - |X|)$ pontot fed, így az M elemszáma legfeljebb $(|V| - q(X) + |X|)/2$. Így (14)-ben $\nu(G) \leq \min$ következik.

A fordított irány bizonyításához V elemszáma szerinti indukciót alkalmazunk. Ha $|V| = 0$, akkor (14) mindkét oldala 0. Tegyük fel tehát, hogy $|V| \geq 1$ és azt, hogy a (14) formula érvényes minden kisebb gráfra. Nyilván feltehető, hogy G összefüggő. Azt kell kimutatnunk, hogy létezik egy olyan $X_0 \subseteq V$ halmaz, amelyre

$$\nu(G) \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2. \quad (15)$$

1. eset G nem kritikus, azaz van olyan v pontja, amelyet elhagyva a keletkező G' gráfra $\nu(G') \leq \nu(G) - 1$. Legyen $V' := V - v$. Indukciót használva

kapjuk, hogy létezik olyan $X'_0 \subseteq V - v$, amelyre $\nu(G') = (|V'| - q'(X'_0) + |X'_0|)/2$, ahol $q'(X'_0)$ a $G' - X'_0$ -ben jelöli a páratlan komponensek számát. Legyen $X_0 := X'_0 + v$. Nyilván $q(X_0) = q'(X'_0)$. Ezeket összeadva kapjuk:

$$\nu(G) - 1 \geq \nu(G') = (|V'| - q'(X'_0) + |X'_0|)/2 = (|V| - q(X_0) + |X_0| - 2)/2,$$

ami éppen (15).

2. eset G kritikus. A Gallai lemma alapján $\nu(G) = (|V| - 1)/2$. Tehát $X_0 := \emptyset$ választással

$$\nu(G) = (|V| - 1)/2 \geq (|V| - q(X_0) + |X_0|)/2,$$

azaz (15) fennáll. $\square$

4.2 A súlyozott párosítások problémája

Hogyan lehet nempáros gráfban egy maximális súlyú (teljes) párosítást megtalálni, és egyáltalán mi mondható a maximális súlyú párosítás súlyáról vagy a minimális költségű teljes párosítás költségéről? Magyarán, mi Egerváry tételének nempáros gráfok megfelelője? A megoldáshoz J. Edmonds zseniális ötlete adja a kulcsot. Ennek lényege a következő. Tekintsük a teljes párosítások (incidencia vektorainak) konvex burkát. Írjuk ezt le egyenlőtlenségekkel, majd alkalmazzuk a lineáris programozás dualitás tételét. A terv nehézsége persze az egyenlőtlenségek megtalálásában van, de az adott problémára Edmondsnak ez fényesen sikerült.

Feltesszük, hogy a szereplő gráfok hurok-mentesek. Célunk tehát egyenlőtlenségekkel (azaz feltételek metszeteként) megadni egy $G = (V, E)$ gráf párosításai illetve teljes párosításai incidencia vektorainak konvex burkát, melyeket rendre B_P illetve B_{TP} -vel fogunk jelölni. Továbbiakban rövidség kedvéért egyszerűen csak párosítások konvex burkáról beszélünk. Mifután tetszőleges politop felírható véges sok feltétel metszeteként, tudjuk, hogy létezik ilyen leírás. Ennek explicit megadása azzal az előzményl jár, hogy a lineáris programozás dualitás tételét alkalmazva egy min-max tételt nyerhetünk a maximális súlyú párosítás illetve a minimális súlyú teljes párosítás súlyára.

Páros gráfok esetén a páros gráf incidencia mátrixának teljes unimodularitása miatt az $\{x : x \in \mathbb{R}_+^E, d_x(v) \leq 1 \text{ minden } v \in V \text{ csúcsra}\}$ polidéer csúcsai egészek, és így $0 - 1$ vektorok, vagyis párosítások incidencia vektorai, tehát ez a polidéer éppen a párosítás polidéer. Hasonlóképp, ha a $d_x(v) \leq 1$ egyenlőtlenségeket egyenlőségekre cseréljük, úgy megkapjuk a páros gráf teljes párosítás polidéerét. Nem páros gráf esetén azonban az így kapott polidéerek már nem írják le B_{TP} -t illetve B_{TP-1} . Például egy háromszög esetén a mindenütt $1/2$ vektorra $d_x(v) = 1$ teljesül, de ez nem lehet B_{TP} -ben, mert abban bármely vektorban a komponensek összege legfeljebb 1 lehet.

Jelölje $\mathcal{O}$ a V legalább háromelemű páratlan elemszámú részhalmozainak rendszerét. Ennek bármely Z tagja olyan, hogy tetszőleges párosítás legfeljebb $(|Z| - 1)/2$ darab Z által feszített élt tartalmaz és tetszőleges teljes párosítás páratlan sok, így legalább egy élt tartalmaz a $[Z, V - Z]$ vágásból.

4.3 A teljes párosítás polidéer

Legyen $G = (V, E)$ teljes párosítással rendelkező irányítatlan gráf. Jelölje a teljes párosítások (incidencia vektorainak) konvex burkát P_G . Tekintsük a következő polidéert

$$P' := \quad (16)$$

$$\{x \in \mathbb{R}^E, x \geq 0, d_x(v) = 1 \text{ minden } v \in V \text{ csúcsra}, \quad (17)$$

$$d_x(Z) \geq 1 \text{ minden } Z \in \mathcal{O}\text{-ra.}\} \quad (18)$$

4.4 Tétel (Edmonds). $B_{TP} = P'$

Bizonyítás. Paritási megfontolásból adódik, hogy egy M teljes párosítás és egy páratlan elemszámú Z halmaz esetén $d_M(Z)$ páratlan és így legalább 1. Emiatt $B_{TP} \subseteq P'$. A fordított irányú tartalmazás igazolásához tekintsünk P' -nek egy x elemét. Erről fogjuk kimutatni, hogy előáll teljes párosítások konvex kombinációjaként.

Feltehetjük, hogy x minden élen pozitív, mert azon éleket, ahol 0, kihagyhatjuk a gráfból. Nevezzünk egy $Z \subseteq V$ halmazt *pontosnak* (x -re nézve), ha $|Z|$ páratlan és $d_x(Z) = 1$. Egy pontos halmaz komplementere is pontos. Z pontos halmaz valódi, ha $|Z| \geq 3, |V - Z| \geq 3$. Jelölje $d(Z, Z')$ a $Z - Z'$ és $Z' - Z$ között vezető élek számát.

4.5 Lemma. Ha Z és Z' olyan pontos halmazok, melyek metszete páratlan elemszámú, akkor metszetük és uniójuk is pontos. Továbbá ilyenkor $d(Z, Z') = 0$.

Bizonyítás. Ha a metszet páratlan, akkor az unió is, ezért $1 + 1 = d_x(Z) + d_x(Z') = d_x(Z \cap Z') + d_x(Z \cup Z') + 2d_x(Z, Z') \geq 1 + 1 + 0$, amiből a lemma következik. $\square$

Nevezzünk egy M párosítást (az x -re nézve) *feszresnek*, ha M teljes párosítás és $d_M(Z) = 1$ fennáll minden Z pontos halmazra. A tétel bizonyításához arra lesz csak szükségünk, hogy létezik feszres párosítás, de kényelmesebb kicsit többet igazolni:

4.6 Lemma. Minden $e = uv \in E$ élhez létezik e -t tartalmazó feszres párosítás.

Bizonyítás. Először nézzük meg azt az esetet, amikor nem létezik valódi pontos halmaz. Ekkor azt kell igazolnunk, hogy létezik e -t tartalmazó teljes párosítás, hiszen ez automatikusan feszres. Ha indirekt nem létezne ilyen, akkor Thue tétele nyomán létezik egy olyan $A \subseteq V - \{u, v\}$ halmaz, amelyre a $G - \{u, v\} - A$ gráfban a páratlan komponensek t száma nagyobb, mint A elemszáma. Legyen $A' := A \cup \{u, v\}$, jelölje a szóban forgó páratlan komponenseket $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$, és legyen E' az A' és a páratlan komponensek között vezető élek halmaza. Mivel $|V|$ páros, t és $|A|$ ugyanolyan paritású, így $t \geq |A| + 2 = |A'|$. Ekkor egyrészt $x(E') = \sum d_x(Z_i) : i = 1, \dots, t \geq t$, másrészt $x(E') \leq \sum d_x(w) : w \in A' - x(uv) \leq |A'| - x(uv) < |A'|$, amiből $|A'| > t$ adódik, és ez az ellentmondás bizonyítja a lemmát abban az esetben, ha nincs valódi pontos halmaz.

Tegyük most fel, hogy Z_1 valódi pontos halmaz. Legyen $Z_2 := V - Z_1$ és jelölje rendre $G_1 = (Z_1 + z_2, E_1)$ és $G_2 = (Z_2 + z_1, E_2)$ a Z_2 illetve a Z_1 halmazok összehúzásával keletkező gráfokat, ahol z_i a Z_i halmaz összehúzásával keletkező csúscot jelöli. Jelölje x_1 illetve x_2 az x vektor megszorítását az E_1 illetve az E_2 élre. Mintán $d_x(Z_1) = 1$, a G_1 minden csúcára teljesül $d_{x_1}(v) = 1$. Továbbá G_1 minden pártalan elemszámú Z halmazára $d_x(Z) \geq 1$.

Tegyük először fel, hogy az $e = uv$ él mindkét vége ugyanabban a Z_i -ben van, mondjunk Z_1 -ben. Indukcióval létezik G_1 -nek egy M_1 feszes párosítása, amely tartalmazza e -t. Legyen f' az M_1 -nek a z_2 -t fedő éle. Jelölje f a G -nek azt az élét, amelyből a Z_2 összehúzásakor f' keletkezett és jelölje f'' a G_2 -nek azt az élét, amely f -ből keletkezett a Z_1 összehúzásakor. (Vagyis f'' szomszédos a z_1 csúccsal.) Indukcióval létezik G_2 -ben egy f'' -t tartalmazó M_2 feszes párosítása. Ekkor $M := (M_1 - f') \cup (M_2 - f'') + f$ teljes párosítása G -nek, amely tartalmazza e -t.

Abban az esetben, ha e végpontjai különböző Z_i -khez tartoznak, akkor G_1 -ben létezik e' -t tartalmazó M_1 feszes párosítás és G_2 -ben létezik e'' -t tartalmazó M_2 feszes párosítás és ilyenkor $M := (M_1 - e') \cup (M_2 - e'') + e$ teljes párosítása G -nek, amely tartalmazza e -t.

Alfjűk, hogy mindkét esetben M feszes. Valóban, tetszőleges $Z \subseteq V$ pártalan elemszámú halmazra $|Z \cap Z_1|$ és $|Z \cap Z_2|$ egyike pártalan, mondjunk $|Z \cap Z_1|$. A 4.5 lemma alapján $|Z \cap Z_1|$ és így $|Z_2 - Z|$ is pártalan és pontos, továbbá $|Z \cap Z_1|$ pontos és $d_x(Z, Z_1) = 0$. Emiatt $d_M(Z \cap Z_1) = d_{M_1}(Z \cap Z_1) = 1$, $d_M(Z_2 - Z) = d_{M_2}(Z_2 - Z) = 1$ és $d_M(Z, Z_1) = 0$. Ebből $1 + d_M(Z) = d_M(Z_1) + d_M(Z) = d_M(Z_1 \cap Z) + d_M(Z_1 \cup Z) + 2d_M(Z_1, Z) = 1 + 1 + 0$, amiből $d_M(Z) = 1$ következik, vagyis M valóban feszes. $\square$

A tétel bizonyításához visszatérve, azt feltettük, hogy x mindent pozitív. Azt is feltehetjük, hogy G összefüggő. A tétel nyilvánvalóan igaz, ha G -nek egyetlen éle van. Tegyük fel tehát, hogy nem ez a helyzet. Ekkor $(*)$ x -nek van olyan komponense, amely kisebb, mint 1.

A 4.6 lemma szerint létezik egy M feszes párosítás. Tekintsük az $x_\alpha := (x - \alpha x_M)/(1 - \alpha)$ vektort. Mivel M teljes párosítás minden v csúcra $d_{x_\alpha}(v) = 1$ teljesül bármely α értékre. Mivel M feszes, kicsiny pozitív α -ra $d_{x_\alpha}(Z) \geq 1$ fennáll minden pártalan Z -re. Mivel x mindent pozitív, kicsiny pozitív α -ra $x_\alpha \geq 0$. Válasszuk α -t maximálisa úgy, hogy $x_\alpha \in P'$, vagyis α a legnagyobb olyan szám, amelyre $\alpha \leq x(e)$ minden $e \in E$ éle és $(d_x(Z) - \alpha d_M(Z))/(1 - \alpha) \geq 1$ (Konkrétan $\alpha := \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, ahol $\alpha_1 := \min\{x(e) : e \in E\}$, és $\alpha_2 := \min\{(d_x(Z) - 1)/(d_M(Z) - 1) : Z \text{ nem-pontos pártalan halmaz}\}$). Ekkor $(*)$ miatt $0 < \alpha < 1$, $x_\alpha \in P'$ és az α maximális választása miatt vagy x_α -nak van 0 komponense vagy x_α -ra nézve szigorúan több pontos halmaz létezik. Így indukcióval feltehetjük, hogy x_α benne van $B_T P$ -ben, azaz előáll teljes párosítások konvex kombinációjaként. De akkor $x = \alpha x_M + (1 - \alpha)x_\alpha$ miatt x is előáll teljes párosítások konvex kombinációjaként. $\square$

Tegyük fel, hogy $c : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ egy adott súly- (vagy költség) függvény.

A teljes párosítás poléder leírását és a dualitás tétele felhasználva kapjuk az alábbi formulát a teljes párosítások minimális súlyára.

4.7 Tétel (Edmonds). *A teljes párosítások minimális súlya egyenlő az alábbi maximummal:*

$$\max \sum (y(Z) : Z \subseteq V, |Z| \text{ pártalan}), \quad (19)$$

ahol $y(Z) \geq 0$, ha $|Z| > 1$ és minden $e = uv \in E$ éltre

$$\sum (y(Z) : |Z \cap \{u, v\}| = 1) \leq c(e).$$

$\square$

4.4 A párosítás poléder

A teljes párosítások poléderének leírását felhasználva egyszerű elemi konstrukció segítségével meghatárjuk a párosítások poléderét. Jelölje $i_x(Z)$ a Z által feszített éleken az x komponenseinek összegét.

4.8 Tétel. *Tetszőleges $G = (V, E)$ gráf párosításai incidencia vektora által feszített polétop pontosan a következő poléder:*

$$P_0 := \{x \in \mathbf{R}^E : x \geq 0, \quad (20)$$

$$d_x(v) \leq 1 \text{ minden } v \in V\text{-re}, \quad (21)$$

$$i_x(Z) \leq (|Z| - 1)/2 \text{ minden pártalan elemszámú } Z \subseteq V \text{ halmazra}\}. \quad (22)$$

Bizonyítás. Egy M párosítás $x := x_M$ incidencia vektorára nyilván mindkét egyenlőtlenség fennáll, így a párosítások konvex bukkának elemeire is.

Megfordítva, legyen most x egy olyan vektor, amely az egyenlőtlenségeket kielégíti. Készítsük el a G gráfot két példányban, melyeket jelölje $G' = (V', E')$, $G'' = (V'', E'')$. Kössük össze a megfelelő v' és v'' pontokat egy-egy éllel és az így kapott gráfot (a $V' \cup V''$ pontthalmazon) jelöljük H -val. Készítsünk el egy y vektort a H gráf élein. G minden e élére legyen $y(e') := y(e'') := x(e)$, ezenkívül minden $v \in V$ csúcra legyen $y(v'v'') := 1 - d_x(v)$.

Alfjűk, hogy y benne van a H teljes párosítás poléderében. A definícióból nyilvánvaló, hogy $d_y(u) = 1$ fennáll H minden csúcára. Legyen most $Z = A' \cup B''$ egy pártalan elemszámú halmaz. Ekkor $A - B$ és $B - A$ egyike pártalan elemszámú, mondjunk $A - B$, és így, $i_x(A - B) \leq (|A - B| - 1)/2$ miatt, $d_x(Z) \geq \sum |d_y(v')| = |A' - B'| - 2i_x(A' - B') - d_y(A' - B', A' \cap B') + d_y(A'' - B'', A'' \cap B'') = |A - B| - 2i_x(A - B) \geq 1$. A 4.4 tétel miatt y a H teljes párosításainak konvex kombinációja, ami miatt ezen párosításokat a G -re megszorítva az x a G párosításainak konvex kombinációjaként áll elő. $\square$

Figyeljük meg, hogy a tétel azzal ekvivalens, hogy a P_0 poléder egész. Ez ugyanis azzal egyenértékű, lévén P_0 korlátos, hogy P_0 csúcsai egészek, ami a (21) miatt azt jelenti, hogy P_0 csúcsai $0 - 1$ -vektorok. Mintán a P_0 -ban lévő (egy (21)-et) kielégítő $0 - 1$ -vektorok pont a párosítások incidencia vektoraí,

4.13 Állítás. Tetszőleges (y, π) optimális duális megoldás esetén $\pi \equiv 0$. $\square$

4.14 Állítás. Létezik olyan (y, π) optimális duális megoldás, amelyre az

$$O_y := \{Z \in \mathcal{O}, y(Z) > 0\}$$

halmaz rendszer lamináris.

Bizonyítás. Induljunk ki egy (y, π) duális optimumból. Az y mindenestülre választható racionálisnak, hiszen egy bázis-megoldás racionális és mindig létezik optimális bázis-megoldás. (A 4.13 állítás szerint $\pi \equiv 0$.)

Tegyük fel, hogy O_y nem lamináris, azaz tartalmaz két halmazt, A -t és B -t, melyekre $A \cap B, A - B, B - A$ egyike sem üres. Állítjuk, hogy $|A \cap B|$ páratlan. Ha ugyanis páros lenne, akkor egy $v \in A \cap B$ csúcsra a 4.12 állítás első része miatt létezik maximális súlyú v -t elkerülő M párosítás. Másrészt, a 4.12 állítás második része miatt M -nek A -ba illetve B -be eső élei teljes párosítását adják $A - v$ -nek illetve $B - v$ -nek, de akkor $|A \cap B - v|$ páros.

Jelölje az $y(A)$ és $y(B)$ értékek minimumát α , és csökkentjük mind $y(A)$ -t, mind $y(B)$ -t α -val. Most $|A \cap B|$ páratlan, így persze $|A \cap B|$ is növeljük α -val. Ezt az átalakítást egy kikeresztelési lépésnek nevezzük. Könnyen ellenőrizhető, hogy a létrejövő (y', π') teljesíti (26)-ot. Azt sem nehéz belátni, hogy $b(y, \pi) = b(y', \pi')$, azaz (y', π') is optimális duális megoldás.

Ismételjük ezt az eljárást egészen addig, amíg a szóban forgó Z_y halmaz-rendszer nem lamináris. Állítjuk, hogy a kikeresztelési eljárás véges sok lépés után véget ér. Ezt elég csak arra az esetre igazolni, amikor y egészértékű, mert ha nem az, akkor komponenseinek közös nevezőjével felszorozhatjuk. Egy kikeresztelési lépésnél a $\sum(y(Z)|Z| : Z \in \mathcal{O})$ összeg vagy változatlanul marad (amikor $|A \cap B| > 1$) vagy csökken (ha $|A \cap B| = 1$). Világos, hogy ezen utóbbi eset csak véges sokszor fordulhat elő. Az első esetben viszont a $\sum(y(Z)|Z|^2 : Z \in \mathcal{O})$ kísérő összeg szigorúan nő, így véges sok ilyen lépés után a $\sum(y(Z)|Z| : Z \in \mathcal{O})$ összegnek kell változnia, tehát kikeresztelési lépésből valóban csak véges sok lehet. $\square$

Rendelkezésünkre áll tehát egy $(y, \pi \equiv 0)$ duális optimális megoldás, amelyre O_y lamináris. Mivel (G, c) ellenpélda, y nem egészértékű, azaz van olyan $A \in O_y$ halmaz, amelyre $y(A)$ nem egész, azaz $\beta := y(A) - \lfloor y(A) \rfloor$ pozitív. Tegyük fel, hogy A maximális ilyen. Módosítsuk most y -t úgy, hogy $y(A)$ -t csökkentjük β -val, míg O_y azon tagjain (ha vannak egyáltalán), melyek részalmezzai A -nak és maximális ilyenek (és melyek a laminaritás miatt diszjunktak) az y értéket növeljük β -val. Az A maximális választása és c egészértékűsége miatt így egy másik duális megoldást kapunk, de ez ellentmond y optimális voltának, hiszen ezen változtatás során a $\sum_{x \in O_y} y(X)(|X| - 1)/2$ összeg szigorúan csökken. Az ellentmondás mutatja, hogy nem létezhet ellenpélda.

A második részhez csak azt kell észrevennünk, hogy a fent leírt kikeresztelési eljárás az egészértékűséget nem romítja el, így egy tetszőleges egészértékű duális optimumból kiindulva végül kapott „lamináris” optimum is egészértékű. $\square \square$

5 Matroidok

5.1 A mohó algoritmus

A Magyar Módszer egy másik irányú általánosításának ismertetése előtt érdemes felidéznünk, hogy a kombinatorikus optimalizálásnak van egy másik kiinduló pontja is, éspedig Kruskal közismert algoritmusra összerángott gráf maximális vagy minimális súlyú feszítő fájának meghatározására. Ez az eljárás az úgynevezett mohó algoritmus, és szintén alapvető eredménynek számít, mégha jóval egyszerűbb is, mint a Magyar Módszer.

Nem meglepő, hogy nemcsak a Magyar Módszernek találhatók kiterjesztései, hanem a mohó algoritmusnak is. Kiderült például, hogy a mohó algoritmus valójában minden matroidon helyes eredményt ad. A matroid egy olyan absztrakt struktúra, amely egy $(S, \mathcal{F})$ párral adható meg, ahol $\mathcal{F}$ az S alaphalmaz bizonyos, függetlennek hívott, részalmezzainak olyan rendszere, amelyre érvényesek az úgynevezett függetlenségi axiómák:

(I1) az üres halmaz független,

(I2) egy független halmaz bármely részalmezzai független,

(I3) az S valamennyi Z részalmezzára, a Z -be eső, Z -ben már nem bővíthető független halmazok elemszáma ugyanaz a csupán Z -től függő $r(Z)$ szám, (amit a Z halmaz rangjának neveznek, míg egy Z -ben maximális független halmazt Z egy bázisának).

Például egy gráf élhalmazán az erdők, mint független halmazok matroidot alkotnak, vagy egy mátrix oszlopainak halmazán a lineárisan független részhalmazok szintén. A matroidok érdekességét egyrészt az adja, hogy számos helyen felbukkannak (néha ugyancsak rangjelűve), másrészt matroidokra igen elegáns, jól használható elméletet dolgoztak ki.

A mohó algoritmus segítségével tetszőleges c súlyfüggvényre egy matroid maximális súlyú bázisa kiszámítható. Ehhez tegyük fel, hogy az S elemek súly szerint csökkenő sorrendben vannak, azaz $c(s_1) \geq c(s_2) \geq \dots \geq c(s_n)$. Ebben a sorrendben tekintsük az elemeket, és az aktuálisan vizsgált elemet akkor vesszük ki, ha a már eddig kiválasztottakkal együtt független halmazt alkot. Igazolni lehet, hogy így bizonyosan maximális súlyú független halmazt kapunk. Jelölje $r(c)$ a maximális súlyú bázis súlyát a c súlyfüggvényre nézve. Az $r(c)$ tehát a mohó algoritmus révén könnyen számolható, sőt valójában egy egyszerű explicit formában is felírható. Ehhez legyen $S_i := \{s_1, \dots, s_i\}$.

5.1 Tétel. Tetszőleges c esetén a maximális súlyú bázis $r(c)$ súlyára

$$r(c) = r(S)c(s_n) + \sum_{i=1}^{n-1} r(S_i)(c(s_i) - c(s_{i+1})). \quad (28)$$

A matroidok használhatósága többek között azon múlik, hogy a matroidok osztálya számos műveletre nézve zárt. Például a gráfoknál alkalmazott élhagyás vagy éösszehúzás fogalma átvihető matroidokra, vagy egy

gráf sík-dualizálása elvezet a duális matroid fogalmához. Szintén érdekes tény, hogy a maximális c -súlyú bázisok egy M_c matroid bázisait alkotják. Ennek rangfüggvényét az alábbiakban r_c -vel fogjuk jelölni. (Egy adott Z részalmazra $r_c(Z)$ tehát azt a maximális számot jelenti, ahány elemmel egy maximális súlyú bázis bele tud metszeni Z -be.)

5.2 Maximális elemszámú közös függetlenek

A mohó algoritmus matroidokon való helyitalósága persze öntelt jelenség, az algoritmus hatásugara azonban túlságosan szűk. Például páros gráf maximális súlyú párosításának kiszámítására nem alkalmas. Másik baj, hogy már a feladat kis változtatásánál is határalanává válik. Fákkal kapcsolatosan például meglehetősen természetességgel vetődik fel az a kérdés, hogy miként lehet egy minimális súlyú feszítő fát meghatározni, ha előírjuk, hogy egy rögzített s pontban a fának a fokszáma előre megadott szám legyen, vagy általánosabban, megadott korlátok közé essék. A következő példa mutatja, hogy ilyenkor a mohó algoritmus már nem feltétlenül ad jó eredményt. [A gráf legyen a teljes négyes az s, a, b, c pontokon, az élsúlyok legyenek $w(sa) = 1, w(sb) = 1, w(sc) = 2, w(ab) = 3, w(bc) = 10, w(ac) = 11$. A keresett fa foka az s pontnál 2 legyen. Ekkor a mohó algoritmus először kiválasztja a két 1 súlyú élt sa -t és sb -t, majd más lehetősége nem lévén választja a 10 súlyú bc élt. Az így kapott fa össz-súly 12. Ugyanakkor az sc, sa, ab élekből álló fa össz-súlyja csak 5.]

Még nehezebb a következő kérdés: mikor létezik egy gráfban két diszjunkt feszítő fa, és ha létezik hogyan lehet megtalálni azt a két éliidegen fát, melyek összköltsége minimális. Persze ugyanezt a kérdést kettő helyett bármely k pozitív egészre megfogalmazhatjuk. Sőt még azt az általánosítást is tekinthetjük, ahol az élhalmazon nem egy, hanem k költség-függvény adott és úgy kell kiválasztanunk k éliidegen feszítő fát, hogy az i -ediknek az i -dik költség-függvényre vonatkozó költségét tekintjük, és ezek összegét akarjuk minimalizálni.

Irányított gráfokban tűzhető ki az alábbi feladat: Határozzunk meg egy minimális költségű részgráfot, amelyben minden pont elérhető egy előre adott gyökérpontból. Általánosabban olyan minimális költségű részgráfot keressünk, amelyben minden pont k éliidegen úton elérhető egy előre adott gyökérpontból.

Ezek mind olyan kérdések, melyek kívül esnek a Magyar Módszer (vagy más hálózati folyamatos modell) hatókörén és megoldásukhoz egy új elméletre volt szükség. A kiindulópont J. Edmonds matroid-metszet tételére, amely a König tétel nagymérvű általánosítása matroidokra.

5.2 Tétel (Edmonds metszet-tétele). *Az S alaphalmazon adott két matroid. A közös független halmazok maximális elemszáma egyenlő a*

$$\min_{X \subseteq S} (r_1(X) + r_2(S - X)) \quad (29)$$

értékkel.

Edmonds tételét néha az alábbi ekvivalens alakban fogalmazták meg.

5.3 Tétel (Edmonds). *Az S alaphalmazon adott két matroid, melyek rang-függvénye r_1 és r_2 . Akkor és csak akkor létezik legalább k elemű közös független halmaz, ha a*

$$r_1(X) + r_2(S - X) \geq k \quad (30)$$

fennáll minden $X \subseteq S$ halmazra.

Bizonyítás (Woodall). A (30) feltétel szükségessége kézenfekvő, hiszen teljesleges F közös független halmazra és az alaphalmaz $\{X_1, X_2\}$ partíciójára fennáll, hogy $r_1(X_1) \leq |X_1 \cap F|$ és $r_2(X_2) \leq |X_2 \cap F|$, amiket összeadva kapjuk, hogy $r_1(X_1) + r_2(X_2) \leq |X_1 \cap F| + |X_2 \cap F| = |F|$.

Az elegendőséghez $|S|$ szerinti indukciót használtunk. $|S| = 0$ -ra a tétel nyilván igaz, így tegyük fel, hogy S nemüres és hogy a tétel érvényes minden olyan esetben, amikor az alaphalmaz $|S|$ -nél kevesebb elemet tartalmaz. Válasszunk ki egy teljesleges $s \in S$ elemet és legyen $S' := S - s$.

Amenyiben $r_1(X') + r_2(S' - X') \geq k$ fennáll minden $X' \subseteq S'$ részalmazra, indukció alapján az $M_1|S'$ és $M_2|S'$ matroidoknak létezik k elemű közös függetlenje, amely természetesen M_1 és M_2 -nek is közös függetlenje. Így feltehetjük, hogy létezik egy $X' \subseteq S'$ halmaz, amelyre

$$r_1(X') + r_2(S' - X') \leq k - 1. \quad (31)$$

Ebből következik, hogy s nem hurrok egyik matroidban sem, mert ha mondjuk M_1 -ben hurrok volna, akkor $X := X' + s$ -re $r_1(X) + r_2(S - X) = r_1(X') + r_2(S' - X') \leq k - 1$, ellentétben (30)-cal.

Húzzunk most össze mindkét matroidban az s elemet. Állítsuk, hogy a keletkező $M_i \cdot S'$ matroidok r_i' rangfüggvényére $r_1'(Y') + r_2'(S' - Y') \geq k - 1$ teljesül minden $Y' \subseteq S'$ részalmazra. Álljon ugyanis valamelyik Y' -re $r_1'(Y') + r_2'(S' - Y') \leq k - 2$. Ez azzal ekvivalens, hogy $r_1(Y' + s) - 1 + r_2(S' - Y' + s) - 1 \leq k - 2$, azaz

$$r_1(Y' + s) + r_2(S - Y') \leq k. \quad (32)$$

Figyeljük meg, hogy $X' \cap Y'$ és $X' \cup (Y' + s)$ egymás komplementerei (S -re nézve), így (30) alapján $[r_1(X' \cap Y') + r_2((S' - X') \cup (S - Y'))] \geq k$, és hasonlóképp $X' \cup (Y' + s)$ és $(S' - X') \cap (S - Y')$ egymás komplementerei és ezért $r_1(X' \cup (Y' + s)) + r_2((S' - X') \cap (S - Y')) \geq k$. Ezt és a szubmodularitást felhasználva (31) és (32) összeadásával kapjuk, hogy $(k - 1) + k \geq r_1(X') + r_1(Y' + s) + r_2(S' - X') + r_2(S - Y') \geq r_1(X' \cap (Y' + s)) + r_1(X' \cup (Y' + s)) + r_2((S' - X') \cap (S - Y')) + r_2((S' - X') \cup (S - Y')) = [r_1(X' \cap Y') + r_2((S' - X') \cup (S - Y'))] + [r_1(X' \cup (Y' + s)) + r_2((S' - X') \cap (S - Y'))] \geq k + k$, ami ellentmondás.

Az $M_i \cdot S'$ matroidokra tehát k helyén $(k - 1)$ -gyel teljesül (30), így az indukciós feltevés alapján ezen matroidoknak létezik egy $k - 1$ elemű F közös függetlenje. De akkor $F + s$ az M_1 és M_2 matroidok k elemű közös függetlenje. $\square$

5.3 A súlyozott matroid metszet probléma

Amint említettük, a mohó algoritmus segítségével adott $c : S \rightarrow \mathbf{R}$ vektor esetén meg lehet határozni egyetlen matroid maximális súlyú bázisát. A fentiekben tételek adtuk két matroid közös függetlenének maximális elemszámára. Kérdés, mi mondható két matroid közös független halmazainak maximális súlyáról. A probléma első megoldása szintén Edmondstól származik. Mi most egy egyszerűsített utat követünk: a kapott eredmény Egerváry tételének általánosítása. Valójában itt több kérdés is kiűzhető: keresünk maximális súlyú közös független vagy maximális súlyú közös bázist, esetleg minden szóba jövő i értékre kíváncsiak lehetünk a maximális súlyú i elemű közös független halmazra. E feladatok többé-kevésbé ekvivalensek és most a maximális súlyú közös bázis feladatkörével foglalkozunk.

Már említettük, hogy a maximális c -súlyú bázisok egy M_c matroid bázisait adják, és hogy $r(c) +$ az (28) formula határozza meg. Az alábbi előkészítő lemma arra ad választ, hogy miként változik az $r(c)$ függvény, ha c értékeit egy adott Z halmaz minden elemén egyvel megnöveljük vagy lecsökkentjük.

5.4 Lemma. Legyen az M matroid rangfüggvénye r . Adott $c : S \rightarrow \mathbf{Z}$ egészértékű vektora és $Z \subseteq S$ halmazra legyen $c^+ := c + \chi_Z$ és $c^- := c - \chi_Z$.

Ekkor

$$r(c^+) = r(c) + r_c(Z), \quad (33)$$

és

$$r(c^-) = r(c) - r_c(S - Z), \quad (34)$$

ahol r_c a maximális súlyú bázisok által alkotott matroid rangfüggvénye.

Bizonyítás. Az első azonosság igazolásához rendezzük az S elemeit c -szerint csökkenő sorrendbe úgy, hogy egyenlő súlyú elemek esetén a Z elemek vesszünk előbbre. Mivel c egészértékű, ez a sorrend c^+ súlyozás szerint is csökkenő (azaz korábbi elem súlya nagyobb vagy egyenlő, mint egy későbbi elemé). Így a mohó algoritmus által szolgáltatott B bázis mind a c , mind a c^+ súlyozásra nézve maximális súlyú.

Ekkor persze $r_c(Z) \geq |B \cap Z|$, de itt valójában egyenlőségnek kell állnia, mert ha létezne olyan maximális c -súlyú B' bázis, amelyre $|B' \cap Z| > |B \cap Z|$, akkor $c^+(B) = c(B) + |Z \cap B'| > c(B) + |Z \cap B| = c^+(B)$, ellentmondásban avval, hogy B maximális c^+ -súlyú. Tehát $r_c(Z) = |B \cap Z|$, és így $r(c^+) = c^+(B) + |B \cap Z| = r(c) + r_c(Z)$.

A második azonossághoz először figyeljük meg, hogy $r_c = r_{c-\chi_S}$, majd alhalmazzuk az első azonosságot c helyén $c - \chi_S$ -re és Z helyén $(S - Z)$ -re. Kapjuk, hogy $r(c^-) = r(c - \chi_S + \chi_{S-Z}) = r(c - \chi_S) + r_{c-\chi_S}(S - Z) = r(c) - r(S) + r_c(S - Z)$. χ_{S-Z}

Térjünk most rá a maximális súlyú közös bázis kérdéseire. Legyen ehhez adott az S alaphalmazon két matroid, M_1 és M_2 , továbbá egy $c : S \rightarrow \mathbf{Z}$ egészértékű súlyfüggvény. Tegyük fel, hogy az M_1 és M_2 matroidoknak van közös bázisa, melynek elemszámát jelölje k .

5.5 Tétel [10]. Az M_1 és M_2 matroidok közös bázisának maximális c -súlya egyenlő a $\min\{r_1(c_1) + r_2(c_2) : c_1 + c_2 = c, c_i$ egészértékű\} értékkel, ahol $r_i(x)$ az M_i matroidban a maximális x -súlyú bázis súlya jelöli.

Bizonyítás. Adott B közös bázis és c_1, c_2 esetén, nyilván $c(B) = c_1(B) + c_2(B) \leq r_1(c_1) + r_2(c_2)$, amiből a $\max \leq \min$ irány következik. Ebből a becslésből az is kiolvasható, hogy az egyenlőség igazolásához a c -nek olyan $c_1 + c_2$ felbontását kell találnunk, amelyre létezik M_1 -nek és M_2 -nek olyan B közös bázisa, amely

(*) egyszerre az M_1 -nek maximális c_1 -súlyú bázisa és az M_2 -nek maximális c_2 -súlyú bázisa.

Legyen c_1 és c_2 a c -nek olyan egész felbontása, amelyre $r_1(c_1) + r_2(c_2)$ minimális. (Mintán c_i egészértékű és tetszőleges B közös bázisa $c(B)$ alsó korlát $r_1(c_1) + r_2(c_2)$ -re, a szóban forgó minimum létezik). Jelölje M'_1 az M_1 matroid maximális c_1 -súlyú bázisai által alkotott matroidot ($i = 1, 2$), míg a megfelelő rangfüggvényeket jelöljük r'_i -vel.

5.6 Lemma. Az M'_1 és M'_2 matroidoknak van k elemű közös független halmaza.

Bizonyítás. Az Edmonds féle metszet tétel szerint, ha nem létezik k elemű közös független halmaz, akkor van olyan $Z \subseteq S$ halmaz, amelyre

$$r'_1(Z) + r'_2(S - Z) < k. \quad (35)$$

Legyen $c_1^+ := c_1 + \chi_Z$ és $c_2^- := c_2 - \chi_Z$. Állalmazza a (33) formulát az M_1 matroidra és c_1 súlyfüggvényre illetve a (34) formulát az M_2 matroidra és a c_2 súlyfüggvényre, azt kapjuk, hogy $r_1(c_1^+) = r_1(c_1) + r'_1(Z)$ és $r_2(c_2^-) = r_2(c_2) + r'_2(S - Z) - r_2(S) = r_2(c_2) + r'_2(S - Z) - k$. Mindezeket összeadva az adódik, hogy $r_1(c_1^+) + r_2(c_2^-) = r_1(c_1) + r_2(c_2) + r'_1(Z) + r'_2(S - Z) - k < r_1(c_1) + r_2(c_2)$, ellentmondásban c_1 és c_2 minimális választásával. $\square$

A lemma által biztosított közös B bázis tehát teljesíti a (*) tulajdonságot. $\square$

Érdemes külön is megfogalmazni a (*) tulajdonságot.

5.7 Következmény. Amennyiben két matroidnak van közös bázisa, úgy tetszőleges c egészértékű súlyozáshoz létezik c -nek egy egészértékű $c_1 + c_2$ felbontása valamint a két matroidnak egy B közös bázisa úgy, hogy B maximális c_1 -súlyú bázisa M_1 -nek és maximális c_2 -súlyú bázisa M_2 -nek. $\square$

A maximális súlyú közös független halmaz súlyára is megállapíthatunk egy formulát. (Fekete Zsolt és Málai Márton doktorandusz hallgatók segítségével a bizonyítás kidolgozásában ezúton is köszönöm.)

5.8 Tétel. Az S alaphalmazon adott két matroid és egy c nemnegatív egészértékű súlyfüggvény. A maximális súlyú közös független halmaz súlya egyenlő a $\min\{r_1(c_1) + r_2(c_2) : c_1 + c_2 = c, c_i \geq 0, c_i$ egész\} értékkel.

Bizonyítás. Legyen F közös független és legyen $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ olyan, hogy $c_1 + c_2 = c$. Ekkor $c(F) = c_1(F) + c_2(F) \leq r_1(c_1) + r_2(c_2)$, amiből a max $\leq$ min irány következik.

A fordított irányhoz azt fogjuk megmutatni, hogy létezik c -nek egy olyan c_1, c_2 egészértékű, nemnegatív felbontása valamint egy F közös független halmaz, melyekre F maximális c_1 -súlyú független halmaza M_1 -nek ($i = 1, 2$).

Feltehetjük, hogy minden elem c -súlya szigorúan pozitív és egyik matroidban sincs hurok elem. (Miért?) Legyen $R := \max(r_1(S), r_2(S)) + 1$ és S' egy R elemű halmaz, amely diszjunkt S -től. Legyen $M_i^+(i = 1, 2)$ az a matroid id, amelyet úgy kapunk, hogy az M_i és az S' -n veti szabad matroid direkt összegét R -rel csonkoltuk. Terjesszük ki a c -t az $S \cup S'$ -re úgy, hogy az S' elemein legyen c azonosan nulla. Könnyen látszik, hogy M_i^+ -ban egy R elemű B halmaz akkor és csak akkor bázis, ha $B \cap S$ független M_i -ben, és ekkor persze $c(B) = c(B \cap S)$. (Speciálisan S' nulla súlyú bázis.) Ennek megfelelően M_1 és M_2 maximális súlyú közös független halmazának a súlya egyenlő az M_1^+ és M_2^+ matroidok maximális súlyú közös bázisának a súlyával.

Az 5.7 következmény szerint létezik egy olyan közös B bázis és c_1, c_2 egész felbontása a kiterjesztett c -nek, hogy B maximális c_1 -súlyú bázisa M_1^+ -nak.

5.9 Állítás. c_i ($i = 1, 2$) *választható olyannak, hogy S' elemein azonosan nulla.*

Bizonyítás. Kimutadjuk, hogy S' minden elemének c_i értéke ugyanaz. Az R érték választása miatt $B \cap S'$ nemüres. Az $S - B$ sem lehet üres, vagyis B nem lehet teljesen S' -ben, mert akkor egyrészt $c(B) = 0$ volna, ugyanakkor amiatt, hogy minden S -beli elem c -súlya pozitív, és nincs hurok elem, létezik pozitív súlyú közös bázis. A B ezen elhelyezkedése miatt elég kimutatnunk, hogy egy $B \cap S'$ -beli x elem és egy $S' - B$ -beli y elem c_1 -súlya megegyezik. Mivel $B - x + y$ egy másik közös bázis, kapjuk, hogy $c_1(y) \leq c_1(x), c_2(y) \leq c_2(x)$, amiből $c_1(x) + c_2(x) = 0 = c_1(y) + c_2(y)$ miatt $c_1(y) = c_1(x)$ következik. $\square$

Feltesszük tehát, hogy c_1 és c_2 azonosan nulla az S' elemein. Ebből következik, hogy minden $x \in S \cap B$ elemre $c_1(x) \geq 0$, hiszen egy $y \in S' - B$ elemre $B - x + y$ bázisa M_1^+ -nak, és ezért $c_1(x) \geq c_1(y) = 0$.

Legyen most $x \in S - B$ egy olyan elem, amelyre, mondjuk, $c_1(x)$ negatív. Növeljük $c_1(x)$ -t nullára, $c_2(x)$ -t pedig csökkentsük $c(x)$ -re. B továbbra is maximális súlyú bázis marad M_2^+ -ban, hiszen egy bázison kívüli elemek csökkentették a súlyt. B maximális súlyú bázis marad M_1^+ -ban is, hiszen B minden elemének a c_1 -súlya nemnegatív és egy negatív súlyú elem súlyát növeltük nullára.

Ilyen módosításokkal elérhetjük, hogy c_i nemnegatív. Kapjuk, hogy c_1 -nek az S -re való $c_1|_S$ megszorítására nézve az $F := B \cap S$ közös független halmaz maximális $c_1|_S$ -súlyú független az M_1 matroidban. $\square$

J. Edmonds további érdeme, hogy mind a súlyozatlan, mind az általános súlyozott esetre kidolgozott egy polinomiális futásidőjű algoritmust, amely egyúttal a tételeinek bizonyítására is használható.

Az Edmonds félé eredeti súlyozott matroid-metszet tétel a fentebb szereplőnél jóval bonyolultabb, így nem csoda, hogy Edmonds súlyozott metszet algoritmusa (és helyességének bizonyítása), pedig különösen az. A nehézség fő forrása abból ered, hogy szemben az eredeti Egerváry tétellel, az idevonatkozó dualis problémát csak meglehetősen bonyolult alakban sikerült megoldani. A fenti súly-szétvágos min-max tétel nemcsak egyszerű alakú, de lehatóságot teremtett egy viszonylag egyszerűen megfogalmazható és igazolható súlyozott matroid metszet algoritmus megadására [10]. Ez az algoritmus a Magyar Módszer nagyfokú és direkt általánosításának tekinthető.

6 Szubmoduláris modellek

6.1 Szubmoduláris áramok

A súlyozott matroid metszet tétel és a rá vonatkozó algoritmus számos nehéz dolog megoldását tette lehetővé (például az előbb felsorolt gráf optimalizálási feladatokat). De azért nem minden! Nézzük például azt a feladatot, amikor egy irányított gráfot kell erősen összefüggővé tennünk minimális számú, vagy általánosabban, minimális összköltségű élének összehúzásával. Egy másik természetes feladatot a következő: Határozzunk meg egy irányított gráf minimális összköltségű részgráfját, amelyben egy meghatározott gyökérponttól minden más csúcsba vezet k pontdiszjunkt út.

Ezek a feladatok már a súlyozott matroid metszet probléma segítségével sem oldhatók meg. Kifejlesztettek azonban egy még általánosabb keretet, amely magában foglalja a súlyozott matroid metszet problémát és a minimális költségű folyamok problémát is. Ez pedig a szubmoduláris áramok fogalma, amelyet Edmonds és Giles vezetett be 1976-ban [7].

Legyen $D = (V, E)$ irányított gráf és $b : V \rightarrow \mathbb{Z}$ egy keresztező szubmoduláris függvény, azaz $b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$ fennáll minden olyan $X, Y \subseteq V$ halmazpárra, amelyre $X \cap Y$ és $V - (X \cup Y)$ egyike sem üres. Legyen f és g a digráf élhalmazán értelmezett egészértékű alsó illetve felső korlát. Egy $x : E \rightarrow \mathbb{R}$ vektort szubmoduláris áramnak hívnak, ha $e_x(Z) - e_x(Z) \leq b(Z)$ minden $Z \subseteq V$ halmazra fennáll. A szubmoduláris áram megengedett, ha $f \leq x \leq g$. Ha b azonosan nulla, visszaajutunk a közönséges áram fogalmához. Edmonds és Giles többek között megmutatta, hogy a szubmoduláris áramok poliedere egész. Hoffman 3.6 megengedettségi tétele is szépen átnevez szubmoduláris áramokra [11].

6.1 Tétel. *Teljesen szubmoduláris b esetén akkor és csak akkor létezik egészértékű megengedett szubmoduláris áram, ha*

$$e_f(A) - e_g(A) \leq b(A) \quad (36)$$

fennáll minden $A \subseteq V$ -ra.

Megjegyzendő, hogy ez az eredmény nem csak Hoffman tételét foglalja magában, hanem Edmonds matroid metszet tétele is közvetlenül adódik.

Szubmoduláris áramok segítségével sikerült először levezetni az alábbi szeparációs tételt [11], amely a klasszikus konvex-konkáv elválasztási tételek diszkrét ellenpárjának tekinthető.

6.2 Tétel. Legyen S alaphalmaz, $p^* : 2^S \rightarrow Z \cup \{-\infty\}$ szupermoduláris függvény és $b^* : 2^S \rightarrow Z \cup \{\infty\}$ szubmoduláris függvény, melyekre $p^*(\emptyset) = b^*(\emptyset) = 0$ és $p^* \leq b^*$. Ekkor van olyan egészértékű n moduláris függvény, amelyre $p^* \leq m \leq b^*$. Más szóval, az $\{x : x(A) \leq b^*(A) \text{ minden } A \subseteq S\text{-re}, x(S) = 0\}$ és az $\{x : x(A) \geq p^*(A) \text{ minden } A \subseteq S\text{-re}, x(S) = 0\}$ poliederek metszete akkor és csak akkor tartalmaz egész pontot, ha $p^* \leq b^*$.

Kiderült, hogy a Magyar Módszer alap gondolatai még ilyen általános körülmények közé is átvihetők. Ezzel kapcsolatosan az egyik első dolgozat [2] egy olyan eljárást ír le, amely speciális esetként magában foglalja az eredeti Magyar Módszert, annak Ford-Fulkerson féle minimális költségű folyamokra való kiterjesztését és a fentebb említett súlyozott matroid metszet algoritmust is. Segítségével oldható meg algoritmikusan a digráf erősen összefüggővé tevésének előbb említett problémája, vagy az az érdekes kérdés, hogy egy irányítatlan gráfot mikor és miként lehet k -szor elősszeffüggővé irányítani, sőt e feladatnak még az a költséges változata is kezelhető, amikor minden él lehetséges két irányának költsége különbözõ, és célunk a minimális költségű k -elősszeffüggő irányítás megkeresése.

6.2 Még tovább

Bármennyire is általános ez az elmélet, az összes ilyen típusú eredmény azonban még ebbe sem fér bele. Például 1995-ben Jordán Tiborral bizonyítottunk egy min-max formulát arra vonatkozólag, hogy egy irányított gráfot hány új él hozzáadásával lehet k -szor pontosszeffüggővé tenni [12]. Ennek megfogalmazása érdekében legyen $D = (V, A)$ egyszerű irányított gráf és tegyük fel, hogy $k < |V| - 1$. A V diszjunkt nemüres részalmazzaiból álló (X, Y) párra legyen $h(X, Y) := |V - (X \cup Y)|$. Azt mondjuk, hogy (X, Y) egyirányú, ha nem megy el X -ből Y -ba, azaz $\delta(X, Y) = 0$, ahol $\delta(X, Y)$ jelöli általában az X -ből Y -ba vezető élek számát jelöli.

A Menger tétel segítségével nem nehéz kimutatni, hogy egy $D^+ = (V, A^+)$ irányított gráf akkor és csak akkor k -összefüggő, ha $h(X, Y) \geq k$ fennáll minden (X, Y) egyirányú párra. Defináljuk egy (X, Y) pár hiányát: $p_m(X, Y) = (k - h(X, Y))^+$, ha (X, Y) egyirányú, és $= 0$ különben. Világos, hogy $p_m(X, Y) = (k - k_{\delta}(X, Y) - h(X, Y))^+$ minden (X, Y) párra fennáll. Diszjunkt részalmazzaiból álló párok egy $\mathcal{F}$ családját akkor nevezzük függetlennek, ha $\mathcal{F}$ bármely két $(X, Y), (X', Y')$ tagjára az $X \cap X'$ és $Y \cap Y'$ halmazok egyike legalább üres.

6.3 Tétel [12]. A $D = (V, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k -összefüggővé, ha

$$\sum (p_m(X, Y) : (X, Y) \in \mathcal{F}) \leq \gamma \quad (37)$$

fennáll minden egyirányú párokból álló független $\mathcal{F}$ családra.

A [12] dolgozat valójában egy ennél jóval általánosabb, szupermoduláris függvényekre vonatkozó eredményt mutat be, amelynek számos egyéb következménye van, egyebek között Györi Ervin távollának látszó, nehéz min-max tétele függőlegesen konvex vízszintes és függőleges szakaszok által határolt síklbeli tartomány minimális számú téglalappal történő fedésétől. Sajnos a bizonyítás nem konstruktív, és mind a mai napig nem tudjuk, hogy miként lehet algoritmikusan az összefüggőség növelés feladatát hatékonyan megoldani.

Van itt még egy újszerű jelenség. A Magyar Módszernek a minden körülményben említtet kiterjesztésénél lehetséges volt a súlyozott esetek kezelése is. Az összefüggőség növelesénél azonban a súlyozott változat általánosságban NP-rejjes, és csak arra az esetre van megfelelő eredményünk, amikor a súlyfüggvény speciális alakú: egy pontsúlyozás indukálja.

A kérdés fennmarad: létezik-e ezen tételnek és a szubmoduláris áramok elméletének közös általánosítása. Egy másik, nagyobb lélegzetű kutatási irány annak feltárása, hogy a szubmoduláris áramok elméletét és a párosítások elméletét be lehet-e vonni valamiféle közös ernyő alá.

* * *

Összefoglalva megállapítható, hogy Egerváry tétele és az arra adott bizonyításának gondolata, bár egy szűk oldalon leírható, egy szerteágazó elméletnek lett kiindulópontja. Az egész kérdéskör azért tűnik különösképp vonzónak, mert gyakorlati kérdések, algoritmikus és tisztán elméleti vizsgálások metszéspontjában áll, mert számos korábban reménytelennek tűnő probléma vált kezelhetővé általa, és mert még mindig nem kevés izgalmas nyitott probléma forrása.

Irodalom

1. W. H. Cunningham and A. B. Marsh A primal algorithm for optimum matching, *Mathematical Programming Study* 8 (1978) 50–72
2. W. H. Cunningham and A. Frank, A primal-dual algorithm for submodular flows, *Mathematics of Operations Research*, Vol. 10, No. 2 (1985), 251–261.
3. J. Edmonds, Paths, trees, and flowers, *Canadian Journal of Mathematics*, 17, (1965) 449–467.
4. J. Edmonds, Maximum matching and a polyhedron with 0–1 vertices, *Journal of Research of the National Bureau of Standards* (B) 69 (1965), 125–130.
5. J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm, *Math. Programming*, 1 (1971) 127–136
6. J. Edmonds, Matroid intersection, *Annals of Discrete Math.* 4, (1979) 39–49
7. J. Edmonds and R. Giles, A min-max relation for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Mathematics* 1, (1977), 185–204
8. Egerváry Jenő, Matroidok kombinatorikus tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok*, No. 38 (1931), 16–28.
9. Egerváry Jenő, Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására, *A Matematikai Kutató Intézet Közleményei*, IV/1 (1958), 15–28.

10. A. Frank, A weighted matroid intersection algorithm, *J. Algorithms* 2 (1981) 328–336
11. A. Frank, An algorithm for submodular functions on graphs, *Annals of Discrete Mathematics* 16 (1982) 97–120.
12. A. Frank and T. Jordán, Minimal edge-coverings of pairs of sets, *J. Combinatorial Theory*, Vol. 65, No. 1 (1995, September) pp. 73–110.
13. A. J. Hoffman and J. B. Kruskal, Jr. Integral boundary points of convex polyhedra, Linear Inequalities and Related Systems, *Annals of Mathematics Study*, 38 (1956) 223–346, Princeton University Press.
14. A. Hoffman, Some recent applications of the theory of linear inequalities to extremal combinatorial analysis, *Proceedings of the Symposia of Applied Mathematics*, 10 (1960) 113–127.
15. D. König, Graphok és matrixok, *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38 (1931) 116–119.
16. H. W. Kuhn, The Hungarian Method for the assignment problem, *Naval Research Logistic Quarterly*, 2 (1955), 83–97.
17. A. Schrijver, Short proofs on the matching polytope, *J. Combinatorial Theory* (Ser B) 34 (1983) 104–108.

THE HUNGARIAN METHOD AND ITS EXTENSIONS

One of the earliest appearance of a special form of the linear programming duality theorem is E. Egerváry's classical result on the maximum weight of a perfect matching in a complete bipartite graph. Its elegant proof gave rise to an efficient algorithm called Hungarian Method. The basic principles of the procedure has been generalized in several directions such as the maximum weight matching problem in nonbipartite graphs, the weighted matroid intersection and the submodular flow problem. In the present work we overview these extensions of the Hungarian Method. As a new contribution, a short proof is given for the weight-splitting version of the weighted matroid intersection theorem.