

ÖSSZEFÜGGÉSEK A KOMBINATORIKUS OPTIMALIZÁLÁSBAN

I. OPTIMALIZÁLÁS GRÁFOKON

FRANK ANDRÁS¹

Tartalom

0. Bevezetés	20
1. Optimális részgráfok	23
2. Leemelés és kikeresztezés	36
3. Gráfok irányításai	41
4. Pakolás és fedés fenyőkkkel és fákkal	56
5. Összefüggőségi tulajdonságok kialakítása és megőrzése	63
6. Jelölések, definíciók	71
Irodalom	74

0. Bevezetés

„Az utóbbi időben kiderült, hogy a diszkrét programozás és kombinatorika sokkal szorosabb kapcsolatban van egymással, mint ahogy korábban gondolták. A kombinatorika igen nagy része foglalkozik diszkrét struktúrák optimalizációs kérdéseivel, vagy átfogalmazható úgy, hogy ezzel foglalkozzon.”

E szavakkal kezdődik Lovász László [41] negyedszázada íródott *Gráfelmélet és diszkrét programozás* című, a Matematikai Lapokban megjelent összefoglaló dolgozata. Jelen munkában a klasszikusnak számító eredmények vázlatos ismertetését követően néhány terület azóta elért fejlődését szeretném áttekinteni. Az első rész döntően gráfok összefüggőségeivel, utakkal, fákkal, vágásokkal, folyamokkal kapcsolatos problémákat vizsgál, míg a második a háttérben megbúvó mélyebb összefüggéseket igyekszik feltárni a szubmoduláris technika és a poliéderes kombinatorika elemeinek bemutatásával.

Egy összefüggő gráf minimális költségű feszítő fáját Kruskal mohó algoritmusával kereshetjük meg. Minimális költségű út konstruálására szolgál Dijkstra eljárása,

¹Készült az OTKA K60802 sz. pályázata valamint az Ericsson Hungary támogatásával.

amikor a költségek nemnegatívak. Páros gráf maximális elemszámú párosításának meghatározását az alternáló utas módszerrel végezhetjük, míg egy maximális súlyú párosítást a Magyar Módszer segítségével lehet megtalálni. Hasonló elven működő eljárásokkal kereshető egy irányított gráf (röviden digráf) két pontja között k darab pont- vagy élidegen út, illetve ilyenek közül a minimális összköltségű. Ezek kezelésére szolgálnak a folyam és áram (circulation) algoritmusok.

A kombinatorikus optimalizálásnak ezek a kiinduló pontjai. Maga az elnevezés először E. Lawler [38] 1976-ban (magyar fordításban 1982-ben) megjelent könyvének címében fordult elő. A kombinatorikus optimalizálás tipikusan olyan véges struktúrák optimalizálási kérdéseit vizsgálja, mint a gráfok, hálózatok, hipergráfok, részbenrendezett halmazok, matroidok. A felvetődő problémák döntő hányada **NP**-nehéz (mint például az utazó ügynök, gráf színezés, halmaz lefogás), amikor polinomiális futásidejű pontos megoldó algoritmus és/vagy jó karakterizáció létezése nem várható. Az **NP**-teljes feladatok tengeréhez képest viszonylag ritkábbak a polinomiálisan megoldható vagy legalábbis **NP** $\cap$ co-**NP**-ben lévő problémák. Ilyenekről szólt a harminc évvel ezelőtti szinten Lawler fentemlített műve, és ezekről ad számot A. Schrijver [49] 2003-ban megjelent enciklopédikus ígénnel íródott háromkötetes könyve is. A kettő között több kitűnő tankönyv is napvilágot látott ([1, 35, 5]).

A [22] magyar nyelvű dolgozatban összefoglalást adtam a Magyar Módszer-ről és annak két kiterjesztéséről: nem páros gráfok párosításaira és két matroid metszetére. Ott röviden utaltam rá, hogy az elmélet az elmúlt három évtizedben messze túllépett a matroid metszet problémakörön. A jelen munkában a kombinatorikus optimalizálás Schrijver könyve által fémjelzett irányzatának néhány fontos gondolatát, eszközét és eredményét vázolom. A dolgozat címe egyrészt a különféle témakörök közötti átjárásokra és kapcsolatokra utal másrészt azt jelzi, hogy a terület motivációiban és az eredményekben különféle összefüggőségi fogalmak játszanak központi szerepet. Összefüggőségi tulajdonságon intuitív egy (di)gráf útjaira vagy vágásaira vonatkozó előírást értünk. Például a fa egy olyan élelhagyásra nézve minimális gráf, amelyben bármely két pont között vezet út, vagy ami ezzel ekvivalens, bármely vágásban van él. Egy másik alapvető fogalom a teljes párosítás: ez egy olyan részgráf, amelyben minden csúcs által meghatározott vágásban pontosan egy él van.

A vizsgálandó kérdések alapvetően öt csoportba sorolhatók.

1. Részgráf problémák. Adott irányítatlan vagy irányított gráfban keresünk előírt összefüggőségi tulajdonsággal rendelkező részgráfot, esetleg minimális (vagy maximális) költségű. Ilyen feladat a minimális költségű feszítő fa, a legolcsóbb út probléma és a maximális (súlyú) párosítás feladata is. Részgráf probléma a maximális folyam feladat és annak költségű változata. Idetartozik a minimális költségű feszítő fenyő vagy általánosabban a minimális költségű gyökeresen k -élösszefüggő részgráf keresése. Természetes cél lehet olyan (minimális költségű) részgráf megkonstruálására törekedni, amely tartalmaz k élidegen feszítő fát. Érdeklődhetünk egy részbenrendezett halmaz maximális olyan része iránt, amelyben nincs túl nagy

láncc vagy túl nagy antiláncc. A részgráf problémák között gyakori az NP-teljes: közülük az egyik legnevezetesebb az, amikor egy gráfnak keresünk olyan összefüggő részgráfját, amelynek minden pontban kettő a foka (Hamilton kör probléma). Szintén NP-teljes az a rokon probléma, amely egy digráf minimális élszámú erősen összefüggő részgráfjának megkeresését célozza. Még egy egyszerűen hangzó NP-teljes probléma a két élidegen út feladata: keressünk egy digráfban P_1 és P_2 élidegen utakat úgy, hogy P_i s_i -ből t_i -be vezet ($i = 1, 2$).

2. Növelési problémák. Ez a részgráf problémának mintegy az ellentéte: arra vagyunk kíváncsiak, hogy a kiindulási (di)gráfhhoz legkevesebb hány új élt kell hozzávennünk, hogy valamely összefüggőségi tulajdonság létrejöjjön. Például hány él hozzávételével lehet egy digráft erősen összefüggővé tenni? Meglepő, hogy az idevonatkozó részgráf problémától eltérően, erre a kérdésre kerek, nem is túl nehéz válasz adható (Eswaran és Tarjan tétele). Sokkal nehezebb a kérdés, ha például a megnövelt gráf k -élösszefüggőségét tűzzük ki célul, de amint látni fogjuk, még ez is szépen kezelhető.

3. Irányítási problémák. Itt egy irányítatlan gráf éleit kell megirányítani úgy, hogy bizonyos előírt összefüggőségi tulajdonságok fennálljanak. Például kereshetünk egy gráfnak erősen összefüggő irányítását vagy foksám-előírt irányítását. Célnk lehet egy irányított gráf minimális számú (költségű) élének átirányítása, hogy pl. erősen összefüggő digráft kapjunk.

4. Pakolási, fedési és színezési problémák. A pakolási feladatban megadott objektumokat kell diszjunkt módon elhelyezni. Egy (di)gráfban például mikor létezik k él- (vagy pont-)idegen út s -ből t -be? Mikor létezik egy gráfban k élidegen feszítő fa, vagy egy digráfban k élidegen feszítő fenyő? Mennyi egy digráfban a diszjunkt egyirányú vágások maximális száma? A fedési feladatban adott objektumokkal akarjuk az alaphalmazt fedni. Hogyan lehet egy gráf éleit k fával lefedni? Mikor lehet egy aciklikus digráf éleinek egy F részhalmazát k irányított úttal lefedni? Végül a színezési feladatban az alaphalmazt partíciónálni szeretnénk megadott objektumokra. Mikor lehet például egy páros gráf élhalmazát k darab párosításra bontani? Mikor lehet egy részbenrendezett halmazt k láncra vagy k antilánccra felbontani?

5. Konstruktív előállítások. Valamely tulajdonság meglétére szolgáló bizonyítékok. Például egy gráf pontosan akkor összefüggő, ha egy pontjából kiindulva fel lehet építeni élek egymás utáni hozzáadásával úgy, hogy minden új élnek legalább az egyik végpontja meglévő pont. Ennél egy fokkal bonyolultabbak az ún. fölfelbontási tételek, melyek erősen összefüggő digráfok és 2-szer él- vagy pontösszefüggő gráfok előállítását adják meg.

Ezen felosztás inkább csak tájékoztató jellegű és nem jelenti a problémák diszjunkt partícióját. Előfordulhat, hogy egy probléma valamely szempontból az egyik osztályba tartozik, míg egy ekvivalens megfogalmazása a másikba. Például egy gráf maximális párosítási feladata éppúgy felfogható részgráf problémaként, mint pakolási feladatként. Vagy, egy irányítási probléma tekinthető részgráf problémának: a

kiindulási G irányítatlan gráf minden élét két ellentétesen irányított párhuzamos éllel helyettesítve az így létrejött digráfban az élpárok egyik elemét kell eltörölnünk. Megfordítva, egy részgráf probléma is gyakran megfogalmazható irányítási feladatként. Az 5. szakaszban megmutatjuk, hogy a növelési és a részgráf problémák is szoros kapcsolatban állnak egymással.

A dolgozat két részből áll. A mostani első részben konkrét, főleg gráfokra vonatkozó eredmények áttekintésére kerül sor. A második rész célja megmutatni azokat az általános elveket, amelyek az eredmények háttérében állnak és a dolgokat működtetik. Itt megismerkedhetünk a szubmoduláris függvények, matroidok szerepével, valamint a poliéderes kombinatorika eszközeivel. Ezek szépen példázzák a matematikának azt a vonását, hogy jól eltalált fogalmak bevezetésével gyakran nehezebb tételekre is rövid, áttekinthető bizonyítás adható.

Nem foglalkozhat a dolgozat a kombinatorikus optimalizálás olyan más, jól kezelhető (azaz $\mathbf{NP} \cap \text{co-}\mathbf{NP}$ -ben lévő) és nem kevésbé fontos részeivel, mint amilyen a perfekt gráfok világa vagy azon problémák osztálya, amelyekben a paritás játszik központi szerepet: irányítatlan gráfok párosításai, útpakolásai, T-kötések, matroid partner (parity) probléma. E területről Schrijver könyvét megelőzően L. Lovász és M. Plummer: Matching Theory című könyve [42] ad szép áttekintést.

A dolgozat írásakor több, gyakran egymásnak is ellentmondó célt próbáltam szem előtt tartani. Érzékeltetni akartam, hogy a kombinatorika idehaza régóta nagy hagyományokkal rendelkező klasszikus területei mellett a kombinatorikus optimalizálás is jelentős tudományággá vált, amelynek fejlődéséhez olyan hazai nevek járultak alapvetően hozzá, mint König Dénes, Egerváry Jenő, Gallai Tibor, Lovász László, Tardos Éva. Meg kívántam mutatni, hogy a kombinatorikus optimalizálás messze túllépett a többé-kevésbé hagyományos egyetemi tananyagban (mohó algoritmus, legrövidebb utak, folyamatok, Magyar módszer), és szeretném, ha az itt vázolt eredmények egy része utat találna az egyetemi oktatásba. Azt is remélem, hogy az írás kiinduló pontot jelenthet a területtel részletesebben megismerkedni szándékozók számára. Ezért vettem be az eredmények pusztán ismertetésén túl egy-két egyszerűbb, de jellegzetes bizonyítást is, illetve néhány helyen (például a 3. vagy az 5. fejezet elején) a tömörebb tárgyalásmódot részletezőbb leírással váltottam fel.

A cikkben használt jelölések és fogalmak az első rész végén lévő 6. fejezetben összegyűjtve szerepelnek.

1. Optimális részgráfok

Ebben a fejezetben röviden áttekintjük a kombinatorikus optimalizálás olyan ismert kiindulási problémáit, mint a legolcsóbb út, a maximális súlyú feszítő fa, a maximális párosítás vagy a maximális folyam feladata.

1.1. Legrövidebb utak

1.1.1. Elérhetőség

Egy s -ből t -be vezető utat st -útnak hívunk. Ha a $D = (V, A)$ digráfban létezik s -ből t -be séta, akkor létezik út is. Ilyenkor azt mondjuk, hogy t elérhető s -ből. Algoritmikusan ez azt jelenti, hogy egy st -utat kell konstruálnunk, ha ilyen létezik, illetve egy könnyen ellenőrizhető bizonyítékot arra, ha nem. E célból nem csupán a t csúcs s -ből való elérhetőségét, hanem rögtön az összes csúcsét egyszerre érdemes vizsgálni. Erre szolgálnak az olyan jólismert bejárési technikák, mint a mélységi (DFS) és a szélességi (BFS) keresés. DFS-sel például lineáris időben meg lehet keresni egy aciklikus digráf csúcsainak ún. topológikus sorrendjét (ahol csak előre megy él), míg a BFS használatára példa egy legkisebb élszámú st -út megkeresése.

Könnyen igazolható, hogy ha S jelöli az s -ből elérhető csúcsok halmazát, akkor S minden valódi, s -et tartalmazó S' részhalmazából vezet ki él, de S -ből nem, továbbá létezik S -t fészítő s -fenyő. Ebből látszik, hogy egy digráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha nem tartalmaz egyirányú vágást, azaz ha a csúcsok minden valódi nemüres részhalmazába lép be él.

1.1.2. Legolcsóbb séták és utak

Tegyük fel, minden csúcs elérhető s -ből. Legyen az éleken adott egy $c : A \rightarrow \mathbf{R}$ költség- (vagy másnéven súly-) függvény. Egy P út $c(P)$ -vel jelölt költségén az út éleinek költségösszegét értjük. A cél minimális költségű, másnéven legolcsóbb sv -utat találni. Ha a költség negatív is lehet, akkor a feladat már az azonosan -1 súlyozás esetén is **NP**-teljes, ugyanis ekkor a legolcsóbb út feladata magában foglalja a Hamilton út problémájának az előírt végpontú változatát, ami a tetszőleges végpontú Hamilton út problémához hasonlóan **NP**-teljes.

Egy s gyökerű (nem feltétlenül fészítő) F fenyőről azt mondjuk, hogy **legolcsóbb-út fenyő**, ha az F minden v pontjára az F -ben az s -ből v -be vezető egyértelmű út egy D -beli legolcsóbb út s -ből v -be. Jelölje ezen út költségét $\pi_F(v)$.

1.1.1. állítás. *Legyen $c \geq 0$. Amennyiben F legolcsóbb-út fenyő és uv olyan $V(F)$ -ből $V - V(F)$ -be vezető él, amely minimalizálja az ilyen élek fölött a $\pi_F(v) + c(uv)$ értéket, akkor az $F + uv$ fenyő is legolcsóbb-út fenyő.*

Ezen alapul Dijkstra algoritmus, amely s -ből kiindulva, élek egyenkénti hozzávételével építi fel a legolcsóbb utaknak egy s -fenyőjét. Az algoritmus bonyolultsága $O(|V|^2)$.

Aciklikus digráfban még egyszerűbb a helyzet, és ráadásul tetszőleges c költségfüggvényre építhetünk egy legolcsóbb-út fenyőt, mert a pontoknak a fenyőbe kerülési sorrendje nem csak menetközben derül ki, hanem azt a DFS-sel előre kiszámított topológikus sorrend adja. Mivel c lehet negatív is, aciklikus digráfban az s -ből t -be vezető maximális súlyú út is kiszámítható.

A két speciális eset közös általánosítását kapjuk, ha a digráf tetszőleges, de nem létezik negatív összköltségű irányított kör (röviden negatív kör), másszóval a

költségfüggvény **konzervatív**. Számos más alkalmazásban is alapvető, hogy egy élsúlyozásról el tudjuk dönteni, konzervatív-e vagy sem. Egy $\pi : V \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt **megengedett potenciálnak** hívunk, ha

$$(1.1) \quad \pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) \text{ fennáll minden } uv \text{ élre.}$$

Jelölje $\pi_j(v)$ a v -ben végződő legfeljebb j élű séták költségének a minimumát. Tetszőleges c esetén $j = 0, 1, 2, \dots, n$ -re könnyű kiszámítani a $\pi_j(v)$ értékeket (és az őket realizáló sétákat) a $\pi_0(v) \equiv 0$ és $\pi_{i+1}(v) = \min \left\{ \pi_i(v), \min_{uv \in E} (\pi_i(u) + c(uv)) \right\}$ rekurzió segítségével. Adódik, hogy minden uv élre $\pi_j(v) \leq \pi_{j-1}(u) + c(uv)$. Így ha c konzervatív, akkor $\pi_n(v) = \pi_{n-1}(v)$ minden csúcsra (ahol n a pontszám) és π_n megengedett potenciál. Ha c nem konzervatív, akkor valamely v -re $\pi_n(v) < \pi_{n-1}(v)$ és ekkor a $\pi_n(v)$ -t realizáló n élű séta feszít negatív kört.

1.1.2. tétel (Gallai, 1958). *A $D = (V, A)$ digráf c élsúlyozása akkor és csak akkor konzervatív, ha létezik π megengedett potenciál. Ha ráadásul c egészértékű, akkor π is választható annak. Konkrétan, ha c konzervatív, úgy π_n megengedett potenciál.*

Ha a $\pi_n(v)$ megengedett potenciál már rendelkezésre áll, akkor Dijkstra algoritmusát alkalmazhatjuk minimális költségű P út megkeresésére a $\bar{c}(uv) := c(uv) - \pi_n(v) + \pi_n(u)$ (nemnegatív!) költség-függvényre nézve. Ekkor P automatikusan minimális c -költségű út lesz, hiszen bármely s -ből t -be vezető út c -költségének és $\bar{c}$ -költségének az eltérése ugyanaz az úttól független $\pi_n(t) - \pi_n(s)$ szám.

1.1.3. tétel (Duffin, 1962). *D digráfban konzervatív c költségfüggvény esetén az s -ből t -be vezető legolcsóbb út költsége egyenlő a $\max \{ \pi(t) - \pi(s) : \pi \text{ megengedett potenciál} \}$ értékkel. Ha ráadásul c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.*

Későbbi általánosítás céljából érdemes a tételt ekvivalens alakban megfogalmazni. Egy $z : 2^{V-s} \rightarrow \mathbf{R}_+$ halmazfüggvényt **c -megengedettnak** nevezünk, ha $t \notin X$ esetén $z(X) = 0$ és

$$(1.2) \quad c(e) \geq \sum [z(X) : e \text{ belép } X\text{-be}] \text{ minden } e \in E \text{ élre.}$$

1.1.4. tétel. *D digráfban konzervatív c költségfüggvény esetén az s -ből t -be vezető legolcsóbb út költsége egyenlő a $\max \left\{ \sum [z(X) : t \in X \subseteq V - s] : z \text{ } c\text{-megengedett} \right\}$ értékkel. Ráadásul, ha c egészértékű, akkor az optimális z is választható egészértékűnek. Van olyan optimális z , amelyre az $\{X : z(X) > 0\}$ halmazrendszer lánc.*

1.2. Minimális költségű fák és fenyők

1.2.1. Fák

A gráf optimalizálási feladatok közül a legkorábbi egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráf minimális költségű feszítő részgráf megkeresését célozza valamely $c : E \rightarrow \mathbf{R}$ költségfüggvényre nézve.

Ez a mohó algoritmus különféle változataival történhet, melyek helyességének igazolása az alábbi megfigyeléssel könnyű.

1.2.1. állítás. Jelölje T_1 és T_2 két V -t feszítő fa élhalmazát. Ekkor bármely $e \in T_1$ élre van olyan $f \in T_2$ él, amelyre mind $T_1 - e + f$, mind $T_2 - f + e$ fa.

1.2.2. tétel. Az eljárás végére kapott feszítő fa minimális költségű, ha [Kruskal mohó algoritmus:] egymás után mindig a legolcsóbb élt választjuk csak arra ügyelve, hogy a kiválasztott élek ne feszítsenek kört, vagy ha [Prim algoritmus:] egy s pontból kiindulva az aktuálisan meglévő részfához mindig az abból kilépő legolcsóbb élt választjuk. [Óvatos vagy duális mohó algoritmus:] Ha egymás után mindig a legdrágább élt töröljük ki csak arra ügyelve, hogy a maradék gráf továbbra is összefüggő legyen, úgy a végül megmaradó feszítő fa minimális költségű lesz.

Az 1.2.1. állításnak érdekes következménye az alábbi optimalitási feltétel, ami durván azt mondja ki, hogy egy fa pontosan akkor optimális, ha a „közelében” nincs olcsóbb fa.

1.2.3. tétel. Egy élsúlyozott gráfban egy F feszítő fa akkor és csak akkor minimális súlyú, ha minden e nem-fa él súlya legalább akkora, mint az $F + e$ alapköréből vett bármely él súlya.

Egy alkalmazás

A mohó algoritmust néha meglepő körülmények között lehet alkalmazni. Segítségével például eldönthető, hogy egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf vajon részfa hipergráf-e, azaz létezik-e egy (V, F) fa úgy, hogy minden hiperél F egy részfáját feszíti. Ennek érdekében minden (u, v) párra legyen $c(uv)$ azon $\mathcal{E}$ -beli hiperélek száma, melyek mind u -t, mind v -t tartalmazzák. Legyen F maximális súlyú feszítő fa a V csúcshalmazú teljes gráfban. Igazolható, hogy H pontosan akkor részfa hipergráf, ha minden hiperéle ezen F fának egy részfáját feszíti.

1.2.2. Fenyők

Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf, amelynek egy adott s pontjából minden más pontja elérhető irányított úton, azaz D tartalmaz feszítő s -fenyőt. (A következőkben s -fenyőn mindig feszítő fenyőt értünk.) Adott az éleken egy $c : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ nem-negatív költségfüggvény. Keressünk minimális összköltségű (legolcsóbb) s -fenyőt. Ez a probléma azért is érdekes, mert könnyen kimutathatóan mind a legolcsóbb utak, mind a legolcsóbb fák problémáját magában foglalja.

Az első megoldó algoritmus Chu és Liu [4] eredménye 1965-ből. Feltehetjük, nincs s -be lépő él, mert egy ilyen él soha sincs s -fenyőben. Ha egy s -től különböző v pontba belépő valamennyi él költségét ugyanazzal az α számmal csökkentjük, akkor minden s -fenyő költsége α -val csökken. Emiatt feltehető, hogy minden s -től különböző pontba lép be 0 költségű él, röviden 0-él. Ha a 0-élek D_0 részgráfja tartalmaz s -fenyőt, akkor ennek 0 összköltsége c nemnegativitása folytán nyilván minimális. A megoldandó eset tehát az, amikor D_0 nem tartalmaz s -fenyőt. A kulcs megfigyelés a következő.

1.2.4. állítás. D_0 tartalmaz C irányított kört. A C 0-költségű kört egy ponttá összehúzva az s -fenyők költségének minimuma nem változik.

Ez alapján elegendő meghatározni az összehúzott D' digráfnak egy minimális költségű s -fenyőjét, és e megfontolásokat rekurzívan alkalmazva D egy minimális költségű s -fenyője polinom időben kiszámítható.

Természetesen vetődik fel, hogy létezik-e a minimális költségű fenyőkre vonatkozó olyan jellegű min-max tétel, mint amilyen Duffin tétele a legolcsóbb utakról? A választ Fulkerson [26] alábbi tétele adja meg, melynek bizonyítása az 1.2.4. állítás felhasználásával könnyen megadható.

1.2.5. tétel (Fulkerson, 1974). *Az s -fenyők minimális költsége egyenlő a*

$$\max \left\{ \sum [z(X) : X \subseteq V - s] : z \text{ c-megengedett} \right\}$$

értékkel. Ráadásul, ha c egészértékű, akkor az optimális z is választható egészértékűnek. Van olyan optimális z , amelyre az $\{X : z(X) > 0\}$ halmazrendszer lamináris.

1.3. Páros gráfok maximális párosításai

Mikor létezik egy páros gráfban teljes párosítás, illetve, ha nem létezik, mekkora a legnagyobb? Az élsúlyozott esetben maximális súlyú teljes párosítás megkeresésére törekszünk (ez a hozzárendelési feladat), de egyéb változatok is érdekesek: érdeklődhetünk maximális súlyú párosítás vagy maximális súlyú k élű párosítás megkeresése iránt.

1.3.1. Maximális elemszámú párosítások

A súlyozatlan eset kiindulási eredménye Kőnig Dénes alapvető tétele.

1.3.1. tétel (Kőnig, 1931). *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.*

Definiáljuk egy $X \subseteq S$ halmaz **hiányát** a $h(X) := |X| - |\Gamma(X)|$ értékkel, ahol $\Gamma(X)$ jelöli az X szomszédainak halmazát, vagyis $\Gamma(X) := \{v \in T : \text{létezik } uv \in E \text{ él, melyre } u \in X\}$.

1.3.2. tétel (Kőnig–Ore). A $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy párosítás által fedetlenül hagyott S -beli pontok minimális száma egyenlő az S részhalmazainak maximális hiányával. **(Kőnig–Hall)** Speciálisan, akkor és csak akkor létezik S -t fedő párosítás, ha nincs hiányos halmaz, azaz teljesül a Hall-féle feltétel:

$$(1.3) \quad |\Gamma(X)| \geq |X| \text{ minden } X \subseteq S \text{ részhalmazra.} \blacksquare$$

A Kőnig-tételből egyszerű konstrukció segítségével levezethető Dilworth [7] klasszikus eredménye.

1.3.3. tétel (Dilworth, 1955). Egy részbenrendezett halmazban az elemeket fedő láncok minimális száma egyenlő a legnagyobb antilánc elemszámával.

1.3.2. Maximális súlyú párosítások

A $G = (S, T; E)$ páros gráf élein legyen adott egy c nemnegatív, egészértékű súlyfüggvény. Tegyük fel, hogy G -nek létezik teljes párosítása, és vizsgáljuk meg a maximális súlyú teljes párosítás megkeresésének kérdését. Az élek lefogásának általánosításaként nevezzünk egy pontokon értelmezett π függvényt **súlyozott lefogásnak**, ha minden uv élre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$. A π súlyozott lefogás $\pi(V)$ **összértékén** a $\sum [\pi(v) : v \in V]$ összeget értjük, ahol $V = S \cup T$.

1.3.4. tétel (Egerváry, 1931). A $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c \geq 0$ egészértékű súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás ν_c súlya egyenlő az egészértékű súlyozott lefogások minimális τ_c összértékével. Amennyiben G teljes páros gráf, úgy az optimális súlyozott lefogás választható nemnegatívnak is.

Ebből egyszerű fogással levezethető a maximális súlyú (nem feltétlenül teljes) párosításra vonatkozó tétel.

1.3.5. tétel. Egy $G' = (S', T'; E')$ páros gráfban nemnegatív, egészértékű c súlyfüggvény esetén a párosítások maximális ν'_c súlya egyenlő a nemnegatív (!) egészértékű súlyozott lefogások minimális τ'_c értékével.

1.4. Diszjunkt utak, k -összefüggés

(Di)gráfok magasabb összefüggőségével kapcsolatos alapvető kérdés, hogy mikor létezik k élidegen (pont-idegen) st -út. A $H = (V, F)$ (di)gráfban jelölje a (páronként) élidegen utak st -utak maximális számát $\lambda(s, t) = \lambda(s, t; H)$, míg a belsőleg pontidegen utakét $\kappa(s, t) = \kappa(s, t; H)$. Ezekre vonatkozik Menger tétele, amelynek különféle változatai ismeretesek, annak megfelelően, hogy élidegen vagy pontidegen utakat keresünk irányított vagy irányítatlan gráfban. Az irányítatlan pont-változat származik Mengertől, a többi először Gallai fogalmazta meg és igazolta. Az irányított él-változatból a többi verzió könnyen adódik.

1.4.1. tétel (él-Menger). Egy irányított (irányítatlan) gráfban akkor és csak akkor vezet s -ből t -be $k \geq 1$ élidegen út, ha minden S $\bar{s}$ -halmaz kifoka (foka) legalább k .

1.4.2. tétel (pont-Menger). Egy (irányított) gráfban, amelyben nincs él s -ből t -be, akkor és csak akkor létezik s -ből t -be k belsőleg diszjunkt (irányított) út, ha az (irányított) st -utakat nem lehet k -nál kevesebb $V - \{s, t\}$ -beli ponttal lefogni.

A Menger tételek megfelelő változatából viszonylag könnyen adódnak az alábbi jellemzések.

1.4.3. tétel. (a) Egy $H = (V, F)$ irányított vagy irányítatlan gráf akkor és csak akkor k -élösszefüggő, ha bármely pontjából bármely másikba vezet k élidegen út, azaz $\lambda(u, v) \geq k$ minden $u, v \in V$ -re. (b) H akkor és csak akkor k -összefüggő, ha $|V| \geq k + 1$ és $\kappa(u, v) \geq k$ minden $u, v \in V$ -re. (c) A $D = (V, A)$ digráf egy kijelölt s csúcsára nézve akkor és csak akkor gyökeresen k -élösszefüggő (gyökeresen k -pontösszefüggő), ha $\lambda(s, v) \geq k$ (illetve $\kappa(s, v) \geq k$) minden $v \in V$ -re.

Kérdés, hogy algoritmikusan miként lehet a $D = (V, A)$ digráfban s -ből t -be k élidegen utat találni, illetve ha nincs megoldás, miként határozható meg az él-Menger tétel által biztosított k -nál kisebb kifokú S halmaz.

A megoldás ötlete az, hogy D -ben a k élidegen utat nem közvetlenül próbáljuk megtalálni, hanem egy olyan $D' = (V, A')$ részgráf megkeresésére törekszünk, amelyben minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsra $(*) \quad \varrho'(v) = \delta'(v)$, továbbá $\delta'(s) = k$ és $\delta'(t) = 0$. Nyilván k élidegen st -út egyesítése ilyen részgráfot alkot, és megfordítva, egy ilyen részgráfban mindig létezik k élidegen st -út. Valóban, induljunk ki s -ből, és amíg csak lehetséges haladjunk tovább addig még nem használt élek mentén. A fokszámokra tett feltételek miatt csak t -ben akadunk el. Így megtalálunk egy st -sétát, amelyből az esetleges köröket kihagyva egy P_1 st -utat nyerünk. Mivel a P_1 éleinek elhagyásával keletkező digráfra $(*)$ továbbra is fennáll, az eljárást $k = \delta(s)$ -szer ismételve megkapjuk a keresett k élidegen st -utat.

Az olyan A' részgráfot (és az incidencia vektorát is, amelyben egy e élre $x(e)$ annak megfelelően 1 vagy 0, hogy e benne van-e A' -ben), amely felbomlik k élidegen st -útra és körök uniójára a jelen munkában **k -fonat**nak fogjuk nevezni. Ennek általánosítása a folyam.

1.5. Folyamok és áramok

Legyen a $D = (V, A)$ digráfnak kijelölve egy s forráspontja és egy t nyelőpontja, melyekre $\varrho_D(s) = \delta_D(t) = 0$. **Folyam**on egy olyan nemnegatív $x : A \rightarrow \mathbf{R}_+$ vektort értünk, amely minden, s -től és t -től különböző pontra teljesíti a **megmaradási szabályt**, azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden $v \in V - \{s, t\}$ csúcsra. Amennyiben még az $x \leq g$ feltétel is teljesül egy nemnegatív $g : A \rightarrow \mathbf{R}_+$ kapacitásfüggvényre nézve, úgy **megengedett folyam**ról beszélünk. A $\delta_x(s)$ értéket nevezzük az x folyam **nagyság**ának. Alkalmazásokban gyakran felbukkanó rokon fogalom az áramé, ahol nincsenek kitüntetett csúcsok. Egy $x : A \rightarrow \mathbf{R}$ függvényt **áram**nak (circulation) nevezünk, ha minden csúcsban teljesül a megmaradási szabály.

1.5.1. Maximális folyamok

Az $x(uv)$ szám a folyam **értéke** az $uv \in A$ élen. A fő kérdés, hogy miként lehet

meghatározni a maximális nagyságú (röviden maximális) egészértékű folyamot. A k élidegen st -út megkeresésének feladata tehát egy egészértékű k nagyságú, a $g \equiv 1$ kapacitásfüggvényre nézve megengedett folyam megkeresésével ekvivalens.

Alapvető az alábbi, L. R. Fordtól és D. R. Fulkersontól származó Maximális-Folyam Minimális-Vágás tétel (Max-Flow Min-Cut; MFMC), amely az irányított él-Menger tétel általánosításának tekinthető.

1.5.1. tétel (Maximális-Folyam Minimális-Vágás). *A $D = (V, A)$ irányított gráfban akkor és csak akkor létezik a g kapacitásra vonatkozó k nagyságú megengedett folyam, ha minden S $\bar{s}$ -halmazra $\delta_g(S) \geq k$. Ha e feltétel teljesül, g egészértékű és k egész, úgy a folyam is választható egészértékűnek.*

A tételt néha az alábbi ekvivalens alakban említik.

1.5.2. tétel. *A megengedett st -folyamok maximális nagysága egyenlő a $\delta_g(S)$ értékek minimumával, ahol a minimum az összes $\bar{s}$ -halmazra megy. Ha g egészértékű, úgy a maximum egészértékű folyamon is felvétetik.*

A tétel konstruktív bizonyítása a jól ismert Ford–Fulkerson féle javító utas módszerrel történik, legalábbis amikor g egészértékű vagy racionális. Az általános esetben legrövidebb javító utak használatával érhetünk célt, amint ezt Edmonds és Karp, illetve Dinits kimutatták. Ez erősen polinomiális futásidejű algoritmust szolgáltat.

1.5.2. Megengedett áramok

Valamely $c : A \rightarrow \mathbf{R}$ költségfüggvényre vonatkozólag az x áram költségén a cx skalárszorzatot értjük.

Legyen $f : A \rightarrow \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : A \rightarrow \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Azt mondjuk hogy az x áram **megengedett**, ha $f \leq x \leq g$. Kérdés, hogy mikor létezik (egészértékű) megengedett áram, és ha létezik, miképp lehet meghatározni egy minimális költségűt. Ennek segítségével oldható meg például az ún. irányított kínai postás probléma, amelyben egy erősen összefüggő irányított gráf éleit kell minimális költséggel úgy bejárni, hogy minden élen legalább egyszer végighaladunk. Ha $z(e)$ jelöli egy ilyen bejárásban azt, hogy az e élen hányszor megyünk végig, akkor z teljesíti a megmaradási szabályt, hiszen minden csúcsba ugyanannyiszor lépünk be, mint ahányszor onnan ki. A feladat tehát a legolcsóbb (egészértékű) áram meghatározásával ekvivalens, amely minden élen legalább egy. Megfogalmazzuk az áramokra vonatkozó két alaptételt: az egyik a megengedett áramok létezéséről szól, a másik pedig a legolcsóbb megengedett áram költségéről.

1.5.3. tétel (Hoffman, 1960). *A $D = (V, A)$ digráfban adott $f \leq g$ kapacitásfüggvényekre vonatkozólag akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$(1.4) \quad \varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (1.4) fennáll, úgy létezik egészértékű megengedett áram is.

A minimális költségű megengedett áramra vonatkozó tételt csak a ciklusokra vonatkozó speciális esetben mondjuk ki (amelyből az általános eset is kiolvasható). **Cikluson** egy Euler-féle részgráfot, illetve annak karakterisztikus vektorát értünk, röviden egy $0 - 1$ értékű áramot. A ciklusok pontosan az élidegen körök egyesítéseként előálló részgráfok.

1.5.4. tétel. A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $c : A \rightarrow \mathbf{R}$ költségfüggvény. A legolcsóbb ciklus költsége egyenlő a

$$(1.5) \quad \sum [c_\pi(uv) : uv \in A, c_\pi(uv) < 0]$$

érték maximumával, ahol $c_\pi(uv) := c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$ és a maximum az összes $\pi : V \rightarrow \mathbf{R}$ potenciálra megy. Amennyiben c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek. Egy $F \subseteq A$ ciklus akkor és csak akkor minimális költségű, ha létezik olyan π potenciál, amelyre $c_\pi(e) < 0$ esetén $e \in F$, míg $c_\pi(e) > 0$ esetén $e \in A - F$.

A maximális folyam, illetve minimális vágás meghatározására szolgáló algoritmus segítségével el lehet dönteni, hogy teljesül-e (1.4), és ha igen, akkor tudunk találni megengedett áramot. Hasonlóképp, a minimális költségű folyam feladatra vonatkozó algoritmus segítségével megoldható a minimális költségű megengedett áram problémája is. Speciálisan, a k -fonatokra vonatkozó algoritmusra támaszkodva rendelkezésre áll egy erősen polinomiális algoritmus legolcsóbb ciklus kiszámítására. Az általános kapacitásokra esetén a minimális költségű áram vagy folyam problémára az első erősen polinomiális algoritmus Tardos Éva [50] nevéhez fűződik. Ez az eljárás jóval összetettebb, mint Ford és Fulkerson most következő algoritmus, amely azonosan 1 kapacitások esetén ugyan polinomiális, de az általános esetben nem.

1.5.3. Minimális költségű folyamok és fonatok

Folyamok segítségével tehát hatékonyan lehet egy $D = (V, A)$ digráfban k élidegen st -utat azaz egy k -fonatot keresni, míg Dijkstra algoritmus, egyetlen legolcsóbb st -út kiszámítására nyújt lehetőséget. Megannyi gyakorlati feladatban bukkan fel az igény a kétféle probléma ötvöztetésére. Vagyis, adott $c : A \rightarrow \mathbf{R}_+$ költségfüggvény esetén hogyan lehet meghatározni k élidegen st -utat, melyek összköltsége minimális? Ehhez nemnegatív költségfüggvény esetén egy minimális költségű k -fonatot kell kiszámolnunk, azaz egy k nagyságú megengedett egészértékű folyamot a $g \equiv 1$ kapacitásfüggvényre vonatkozóan. Valójában az alábbi algoritmus általános g kapacitásfüggvényre is kiterjeszthető, de egyszerűség kedvéért, és amiatt, hogy az élidegen utakhoz amúgy is csak erre a speciális esetre van szükség feltesszük, hogy $g \equiv 1$. Az algoritmus, amely a Magyar Módszer kiterjesztésének tekinthető további általánosítások kiinduló pontja. Nemes eleganciája lenyűgöző.

Minden 0 és M közé eső k egészre szeretnénk találni egy olyan k -fonatot, melynek költsége a k -fonatok közt minimális. Egy z fonat **költségét** a $cz = \sum [c(e)z(e) : e \in A]$ skaláris szorzattal definiáljuk. Van egy speciális költségfüggvény osztály,

amelyre a feladat egyszerűen megválaszolható, és ez segít az általános eset megértéséhez is. Legyen $\pi : V \rightarrow \mathbf{Z}_+$ olyan függvény a V -n, amelyre $\pi(s) = 0 \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ minden $v \in V$ -re. Egy ilyen függvényt **potenciálnak** hívunk. Defináljuk a $\Delta_\pi : A \rightarrow \mathbf{R}$ költségfüggvényt a következőképpen

$$(1.6) \quad \Delta_\pi(uv) := \pi(v) - \pi(u),$$

és nevezzük Δ_π -t **pontindukált** költségfüggvénynek. Ennek lehetnek ugyan negatív értékei is, de az bizonyos, hogy konzervatív, hiszen minden kör költsége nulla. Miután egy st -út Δ_π -költsége $\pi(t) - \pi(s) = \pi(t)$, kapjuk, hogy a Δ_π pontindukált költségfüggvényre vonatkozólag minden k -fonatnak ugyanaz a költsége, éspe dig $k\pi(t)$. Emiatt egy pontindukált költségfüggvénnyel eltolva c -t, az eredetivel ekvivalens feladathoz jutunk, más szóval az $uv \in A$ élekre a

$$(1.7) \quad c_\pi(uv) := c(uv) - \Delta_\pi(uv)$$

jelölést használva azt kapjuk, hogy a legolcsóbb k -fonat meghatározása szempontjából c és c_π ekvivalens. A következő tétel az általános esetre vonatkozik.

1.5.5. tétel (Ford és Fulkerson). *A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $c : A \rightarrow \mathbf{R}_+$ költségfüggvény. A k -fonatok minimális költsége (vagyis k élidegen st -út összköltségének a minimuma) egyenlő a*

$$(1.8) \quad k\pi(t) + \sum [c_\pi(uv) : uv \in A, c_\pi(uv) < 0]$$

érték maximumával, ahol a maximum az összes $\pi : V \rightarrow \mathbf{R}_+$ potenciálra megy. Egy z k -fonat akkor és csak akkor minimális költségű a k -fonatok között, ha létezik olyan π potenciál, amelyre fennállnak a következő optimalitási feltételek:

$$(i) \quad c_\pi(uv) > 0 \Rightarrow z(uv) = 0,$$

$$(ii) \quad c_\pi(uv) < 0 \Rightarrow z(uv) = 1.$$

Amennyiben c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.

Bizonyítás. Potenciálok segítségével egy z fonat cz költségére az alábbi alsó korlátot nyerhetjük.

$$\begin{aligned} \sum c(uv)z(uv) &= \sum \Delta_\pi(uv)z(uv) + \sum c_\pi(uv)z(uv) = \\ &= k\pi(t) + \sum [c_\pi(uv)z(uv) : c_\pi(uv) > 0] + \sum [c_\pi(uv)z(uv) : c_\pi(uv) < 0] \geq \\ &\geq k\pi(t) + 0 + \sum [c_\pi(uv) : c_\pi(uv) < 0]. \end{aligned}$$

Ebből egyrészt következik a $\min \geq \max$ egyenlőtlenség, másrészt az, hogy egy k -fonat bizonyosan minimális költségű a k -fonatok között, ha létezik hozzá olyan

π potenciál, amelyre a fenti becslésben minden egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, ami viszont pont azzal ekvivalens, hogy fennállnak a tételben megadott (i) és (ii) optimalitási feltételek. Emiatt a tétel mindkét része következik, ha kimutatjuk, hogy minden lehetséges egész k értékre létezik egy k -fonat és egy ehhez tartozó π potenciál (amely egészértékű, ha c az), melyek kielégítik az optimalitási feltételeket. Ezeket konstruálja meg Ford és Fulkerson minimál-költséges folyam algoritmus, amely a maximális nagyságú folyam kiszámítására vonatkozó növelő utas eljárás finomítása.

Az eljárás a $z \equiv 0$ 0-fonattal és az azonosan nulla π potenciállal indul. Ezután a folyam nagyságát növeljük egyenként, illetve menetközben néha a potenciált növeljük úgy, hogy az optimalitási feltételek végig fennállnak. Az algoritmus akkor ér véget, amikor maximális nagyságú folyamat, illetve egy minimális vágást kaptunk. Az algoritmus végig megőrzi az aktuális folyam egészértékűségét és amennyiben c egészértékű, úgy az aktuális potenciálét is.

ITERATÍV LÉPÉS. Az általános helyzetben adott a z fonat és a π potenciál, és ezek kielégítik az (i) és (ii) feltételeket. Megkonstruálunk egy $D' = (V, A')$ segédgráfot a következőképpen. D' -nek kétféle éle van: előre és hátra. Egy $uv \in A'$ él **előre-él**, ha $uv \in A$, $c_\pi(uv) = 0$ és $z(uv) = 0$. Egy $uv \in A'$ él **hátra-él**, ha $vu \in A$, $c_\pi(vu) = 0$ és $z(vu) = 1$. Legyen S az s -ből D' -ben irányított úton elérhető pontok halmaza. Két eset lehetséges.

1. Eset. $t \notin S$, azaz t nem elérhető s -ből.

Legyen

$$\varepsilon_1 = \min \{c_\pi(uv) : uv \in A, u \in S, v \in V - S, z(uv) = 0\}$$

és

$$\varepsilon_2 = \min \{-c_\pi(uv) : uv \in A, u \in V - S, v \in S, z(uv) = 1\},$$

ahol az üres halmazon vett minimumot ∞ -nek definiáljuk. Legyen $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Az optimalitási feltételek és az S definíciója miatt ε pozitív.

Amennyiben $\varepsilon = \infty$, akkor az algoritmus végetér. Ebben az esetben az S -ből kilépő eredeti élek mind telítettek, míg az S -be belépő eredeti élek mindegyikén a folyam nulla. Így $\delta(S) = \delta_z(S) - \varrho_z(S) = \delta_z(s)$, vagyis az aktuális z folyam maximális nagyságú és az S -ből kilépő élek halmaza minimális vágást határoz meg.

Legyen most $\varepsilon < \infty$, és módosítsuk π -t úgy, hogy minden $v \in V - S$ -re növeljük $\pi(v)$ -t ε -nal. Az S és az ε definíciójából rögtön kapjuk:

1.5.6. állítás. *A módosított potenciál és a változatlanul hagyott fonat kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Készítsük el az új segédgráfot és ismételjük meg az eljárást. Figyeljük meg, hogy a segédgráfban a (régi) S által feszített élek változatlanok maradnak és legalább egy S -ből kilépő új él keletkezik az ε választása folytán. Emiatt az új

segédgráfban az s -ből elért pontok halmaza szigorúan bővebb lesz, mint S . Ezért az 1. eset legfeljebb $(|V| - 1)$ -szeri előfordulását követően bizonyosan vagy az $\varepsilon = \infty$ következik be, vagy pedig az alábbi 2. eset.

2. Eset. $t \in S$, vagyis t elérhető s -ből. Legyen P a D' -ben egy s -ből t -be vezető irányított út. Módosítsuk z -t a következőképpen. Legyen $z'(uv) = 1$, ha uv a P -nek előre-éle és legyen $z'(uv) = 0$, ha vu a P -nek hátra-éle.

A módosításból adódik:

1.5.7. állítás. *A módosított fonat és a változatlanul hagyott potenciál kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Az algoritmus leírását befejeztük, és ezzel a tétel bizonyítása is teljes, hiszen az eljárás véges sok lépés után minden lehetséges k -ra megad egy k -fonatot és egy potenciált, melyek teljesítik az optimalitási feltételeket. Miután összesen $M \leq |A|$ folyamtnövelésre kerül sor és két folyamtnövelés között legfeljebb $|V| - 1$ potenciál változtatásra, a fenti algoritmus polinomiális futásidejű. ■

1.5.4. Részbenrendezett halmazok láncai és antiláncai

Az 1.3.1. szakaszban már említettük, hogy Dilworth tétele könnyen levezethető a König tételből, aminek az az előnye is megvan, hogy az alternáló utas módszer algoritmust ad a minimális láncfelbontás és a legnagyobb antilánc meghatározására. A fenti Ford–Fulkerson algoritmus szép alkalmazásaként a Dilworth tétel alábbi, nagymérvű általánosítása is algoritmikusan kezelhetővé válik.

Legyen $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz. Egy lánc elemszámát néha a lánc **hosszá**nak nevezik. A leghosszabb lánc hossza a részbenrendezett halmaz **magassága**. A legnagyobb antilánc elemszáma részbenrendezett halmaz **szélessége**. Ezekre vonatkozik a Dilworth tétel [7] és a Dilworth tétel polárisa.

1.5.8. tétel (Dilworth, 1955). *A P -t fedő láncok minimális $a = a(P)$ száma egyenlő a legnagyobb antilánc elemszámával, vagyis P szélességével.*

1.5.9. tétel (poláris Dilworth). *A P -t fedő antiláncok minimális $c = c(P)$ száma egyenlő a leghosszabb lánc hosszával, vagyis P magasságával.*

A Dilworth tétel kitejesztéseként megvizsgáljuk, hogy $\alpha \geq 1$ antilánc egyesítése maximum milyen nagy lehet, a polár Dilworth tétel kitejesztéseként pedig azt, hogy $\gamma \geq 1$ lánc egyesítése maximum milyen nagy lehet. Valamely $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ családra használjuk az $\cup \mathcal{B} = \cup \{B_i : i = 1, \dots, k\}$ jelölést. A $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \dots, C_\gamma\}$ **lánc-családon** γ darab diszjunkt nemüres láncból álló halmazt értünk. Jelölje $\mathbf{C}_\gamma$ a γ láncból álló lánc-családok halmazát, míg $\mathbf{C}$ az összes lánc-családot magába foglaló halmazt. Legyen $c_\gamma = \max \{|\cup \mathcal{C}_\gamma| : \mathcal{C} \in \mathbf{C}_\gamma\}$, vagyis c_γ a legnagyobb részhalmaz elemszáma, amely előáll γ lánc egyesítésekből (azaz a Dilworth tétel alapján nem tartalmaz γ -nál nagyobb elemszámú antiláncot).

Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$ **antilánc-család**on α darab diszjunkt nemüres antiláncból álló halmazt értünk. Jelölje $\mathbf{A}_\alpha$ az α antiláncból álló antilánc-családok halmazát, míg $\mathbf{A}$ az összes antilánc-családot magában foglaló halmazt. Legyen $a_\alpha = \max \{|\cup \mathcal{A}_\alpha| : \mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha\}$, vagyis a_α a legnagyobb olyan halmaz elemszáma, amely előáll α antilánc egyesítésekként (azaz a poláris Dilworth tétel alapján nem tartalmaz α -nál nagyobb elemszámú láncot).

Dilworth tétele szerint $c_a = n$, a poláris Dilworth tétel szerint $a_c = n$. Mi mondható c_γ -ről ($1 \leq \gamma \leq a$) és a_α -ról ($1 \leq \alpha \leq c$)?

1.5.10. tétel (Greene és Kleitman, 1976). $a_\alpha = \min \{q\alpha + |P - \cup \mathcal{C}_q| : \mathcal{C}_q \in \mathbf{C}\}$.

1.5.11. tétel (Greene, 1976). $c_\gamma = \min \{q\gamma + |P - \cup \mathcal{A}_q| : \mathcal{A}_q \in \mathbf{A}\}$.

Miután egy láncnak és egy antiláncnak legfeljebb egy közös eleme lehet, a_α és c_γ legfeljebb akkora, mint a szóbanforgó minimum.

Definíció. Az $\mathcal{A}_\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_\alpha\}$ antilánc-család és a $\mathcal{C}_\gamma = \{C_1, C_2, \dots, C_\gamma\}$ lánc-család **ortogonális**, ha

$$(1.9) \quad P = (\cup \mathcal{A}_\alpha) \cup (\cup \mathcal{C}_\gamma)$$

és

$$(1.10) \quad A_i \cap C_j \neq \emptyset \quad \text{hacsak} \quad 1 \leq i \leq \alpha, 1 \leq j \leq \gamma,$$

azaz a lánc-család és az antilánc-család együttesen lefedi P -t és mindegyik A_i antilánc metszi az összes C_j láncot.

Az 1.5.10. és 1.5.11. tételek nemtriviális részeit átfogalmazhatjuk az alábbiak szerint.

1.5.12. tétel. Minden α -ra, $1 \leq \alpha \leq c$, létezik $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}_\alpha$ és valamely $\gamma \geq 1$ egészre $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}$, amelyek ortogonálisak.

1.5.13. tétel. Minden γ -ra, $1 \leq \gamma \leq a$, létezik $\mathcal{C}_\gamma \in \mathbf{C}_\gamma$ és valamely $\alpha \geq 1$ egészre $\mathcal{A}_\alpha \in \mathbf{A}$, melyek ortogonálisak.

Az 1.5.12 és 1.5.13. tételeknek létezik egy közös általánosítása, amelynek külön érdekességet ad, hogy a bizonyítása a fentebb vázolt Ford–Fulkerson féle minimális költségű folyam algoritmus futásának elemzésén alapult.

1.5.14. tétel [18]. A $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ részbenrendezett halmaz szélessége legyen $a = a(P)$, magassága $c = c(P)$. Létezik egy olyan $\mathcal{C}_a \mid \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{i_1} \mid \mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \dots, \mathcal{C}_{a-j_1} \mid \mathcal{A}_{i_1+1}, \dots, \mathcal{A}_{i_2} \mid \mathcal{C}_{a-j_1-1}, \dots, \mathcal{C}_{a-j_2} \mid \dots$ sorozat, amely a $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_{a-1}, \dots, \mathcal{C}_1$ és az $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_c$ sorozatok összefésülésével keletkezik, ahol $\mathcal{C}_j \in \mathbf{C}_j$ és $\mathcal{A}_i \in \mathbf{A}_i$, és a sorozat bármely tagjára (akár $\mathcal{C}_j$, akár $\mathcal{A}_i$) fennáll, hogy ortogonális az utolsó öt megelőző ellentétes típusú tagra. (Vagyis, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_{i_1}$ ortogonális $\mathcal{C}_a$ -ra, $\mathcal{C}_{a-1}, \mathcal{C}_{a-2}, \dots, \mathcal{C}_{a-j_1}$ mindegyike ortogonális $\mathcal{A}_{i_1}$ -re, stb.)

A tételből kiolvasható az alábbi érdekes következmény, amelynek megfogalmazásához egy maximális (azaz a elemszámú) antiláncot **D-antiláncnak** nevezzük.

1.5.15. következmény. *A diszjunkt D-antiláncok maximális száma egyenlő a D-antiláncokat lefoglaló elemek minimális számával.*

2. Leemelés és kikeresztezés

Átmenetként a kombinatorikus optimalizálás újabb keletű részei felé, bemutatunk két olyan alapvető bizonyítási technikát, melyek megannyi alkalmazásban megkerülhetetlennek bizonyulnak. Mindkét idea Lovász Lászlótól származik.

2.1. Leemelés (di)gráfokban

Legyen $H = (U, F)$ irányítatlan gráfnak $e = zu$ és $f = zv$ két szomszédos éle. Azt mondjuk, hogy a $H^{ef} = (U, F - \{e, f\} + uv)$ gráf a H -ból az e és f élek leemelésével keletkezett. Analóg módon definiálhatjuk a leemelést egy $H = (U, F)$ irányított gráfban is: legyenek $e = uz$ és $f = zv$ irányított élek, ekkor definíció szerint $H^{ef} = (U, F - \{e, f\} + uv)$. Könnyen látszik, hogy mind az irányított, mind az irányítatlan esetben $\lambda(x, y; H) \geq \lambda(x, y; H^{ef})$ minden x, y pontpárra fennáll, (ahol $\lambda(x, y)$ az irányítatlan esetben az x és y között vezető éliden utak maximális számát jelöli, míg az irányítottban az x -ből y -ba vezetőket). Leemeléssel tehát az élösszefüggőség biztosan nem nő. Kérdés, hogy mikor nem csökken. Természetesen a z pontnál a foksám csökken, így csak a (di)gráf z -tól különböző pontjai közötti élösszefüggés fenntartása lehet a célunk.

2.1.1. Irányítatlan leemelés

Irányítatlan gráfokra a választ Lovásznak [39] (6.53 feladat) következő alapvető eredménye adja meg.

2.1.1. lemma (Lovász leemelési lemmája, 1979). *A $G = (V + z, E)$ irányítatlan gráfban a kijelölt z pont $d(z)$ foka legyen pozitív és páros. Legyen $k \geq 2$ egész és tegyük fel, hogy*

$$(2.1) \quad \lambda(x, y; G) \geq k \quad \text{minden } x, y \in V \text{ pontpárra.}$$

Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = zv$ él, amelyekre $\lambda(x, y; G^{ef}) \geq k$ minden $x, y \in V$ pontpárra.

Bizonyítás. Menger tétele alapján a (2.1) feltevés azzal ekvivalens, hogy

$$(2.2) \quad d(X) \geq k \quad \text{minden } \emptyset \neq X \subset V \text{ részhalmazra,}$$

ahol $d(X)$ jelöli az X halmaz foksámát. Ha leemeléskor egy halmaznak csökken a foksáma, akkor 2-vel csökken. Egy $X \subset V$ részhalmazt nevezzünk **veszélyesnek**, ha $d(X) \leq k + 1$.

Legyen S az z szomszédainak halmaza. Egy $f = zv$ él akkor nem emelhető le az adott $e = zt$ éllel, ha v benne van egy t pontot tartalmazó veszélyes halmazban. Indirekt tegyük fel, hogy S lefedhető t -t tartalmazó veszélyes halmazokkal, és legyen $\mathcal{F}$ a t pontot tartalmazó maximális (azaz nem bővíthető) veszélyes halmazoknak egy S -t fedő rendszere, melyre $|\mathcal{F}|$ minimális.

$\mathcal{F}$ nem lehet egytagú, mert ha X olyan veszélyes halmaz, melyre $S \supset X$, akkor $d(V - X) = d(X) - d(z) \leq (k + 1) - 2 = k - 1$, ami ellentmondana (2.2)-nek.

Az sem lehet, hogy $\mathcal{F} = \{X, Y\}$. Ekkor ugyanis $k + 1 + k + 1 \geq d(X) + d(Y) = d(X - Y) + d(Y - X) + 2\bar{d}(X, Y) \geq k + k + 2$, amiből az adódik, hogy z -ből egyetlen él megy $X \cap Y$ -ba. Az $\alpha := d(z, X - Y)$ és $\beta := d(z, Y - X)$ jelölést használva azt kapjuk, hogy $d(z) = 1 + \alpha + \beta$. Miután $d(z)$ páros, $\alpha \neq \beta$. Legyen mondjuk $\alpha > \beta$. De ekkor $d(V - X) = d(X + z) = d(X) - (\alpha + 1) + \beta \leq d(X) - 2 \leq (k + 1) - 2 \leq k - 1$, vagyis $V - X$ megsérti (2.2)-t.

Végül Lovász hármas egyenlőtlensége segítségével kimutatjuk, hogy $|\mathcal{F}| \geq 3$ sem lehetséges.

2.1.2. állítás. *Egy irányítatlan gráfban, melynek ponthalmaza U , bármely $A, B, C \subseteq U$ halmazra fennáll a következő egyenlőtlenség:*

$$\begin{aligned} & d(A) + d(B) + d(C) \geq \\ & \geq d(A \cap B \cap C) + d(A - (B \cup C)) + d(B - (A \cup C)) + d(C - (A \cup B)) + \\ & + 2d(A \cap B \cap C, U - (A \cup B \cup C)). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az egyenlőtlenséget elég egyéltű gráfokra igazolni. Ilyenekre pedig az egyenlőtlenség az él elhelyezkedésétől függő egyszerű esetszétválasztással ellenőrizhető. ■

Legyen tehát A, B, C az $\mathcal{F}$ három tagja. Az állítás alapján $3(k + 1) \geq d(A) + d(B) + d(C) \geq d(A \cap B \cap C) + d(A - (B \cup C)) + d(B - (A \cup C)) + d(C - (A \cup B)) + 2d(A \cap B \cap C, U - (A \cup B \cup C)) \geq k + k + k + k + 2$, ami ellentmond a $k \geq 2$ feltevésnek. ■ ■

A négyéltű csillag $(K_{4,1})$ mutatja, hogy a leemelési lemma $k = 1$ -re nem érvényes. A teljes négyes (K_4) pedig arra példa, hogy a $d(z)$ párosságára tett kikötés sem hagyható ki. A 2.1.1. tétel ismételt alkalmazásával rögtön következik az alábbi.

2.1.3. tétel (Lovász, 1979). *Legyen a $G = (V + z, E)$ irányítatlan gráfban a z pont $d(z)$ foka pozitív és páros, és tegyük fel, hogy $k \geq 2$ egészre (2.1) fennáll. Ekkor a z -vel szomszédos élek párba állíthatók úgy, hogy a párok egyszerre történő leemelésével kapott $G' = (V, E')$ gráf k -élösszefüggő. ■*

2.1.2. Irányított leemelés

A Lovász-féle leemelési tétel irányított ellenpárja W. Madertől származik [44]. Használni fogjuk az alábbi azonosságokat.

$$(2.3) \quad \varrho(X) + \varrho(Y) = \varrho(X \cap Y) + \varrho(X \cup Y) + d(X, Y).$$

$$(2.4) \quad \varrho(X) + \varrho(Y) = \varrho(X - Y) + \varrho(Y - X) + \bar{d}(X, Y) + \varrho(X \cap Y) - \delta(X \cap Y).$$

Azt mondjuk, hogy egy $D = (V, A)$ digráf csúcsainak egy U' részhalmazában **k -élösszefüggő**, ha bármely U' -beli pontból bármely másik U' -beli pontba vezet k élidegen út. Ez Menger tétele alapján azzal ekvivalens, hogy

$$(2.5) \quad \varrho(X) \geq k, \delta(X) \geq k \text{ minden } U'\text{-t elválasztó } X \subseteq V \text{ részhalmazra,}$$

ahol egy X halmazról akkor mondjuk, hogy **elválasztja** U' -t, ha $U' \cap X \neq \emptyset$, $U' - X \neq \emptyset$. (Természetesen az U' halmaz k -élösszefüggősége nem egyenértékű azzal, hogy az U' által feszített digráf k -élösszefüggő.) Az alábbiakban egy olyan $D = (U + z, A)$ digráffal fogunk dolgozni, amelynek z kitüntetett pontja.

2.1.4. lemma (Mader leemelési lemmája, 1982). *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráf U -ban k -élösszefüggő ($k \geq 1$), és tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor minden $e = zt$ élhez létezik olyan $f = uz$ él, amelyre az $\{e, f\}$ élpár leemelésével kapott D^{ef} digráf is U -ban k -élösszefüggő.*

Bizonyítás. Egy $X \subset U$ részhalmazt nevezzünk **be-pontosnak**, ha $\varrho(X) = k$ és **ki-pontosnak**, ha $\delta(X) = k$. Az X **pontos**, ha ki-pontos vagy be-pontos.

2.1.5. állítás. *Legyen X és Y két pontos halmaz, melyek tartalmazzák a t pontot. Ekkor $X \cup Y$ is pontos.*

Bizonyítás. Készen vagyunk, ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$, így feltehető, hogy nem ez a helyzet. Nem lehet, hogy az egyik halmaz ki-pontos, a másik pedig be-pontos, mert ha például $\varrho(X) = k$ és $\delta(Y) = k$, akkor az $\bar{Y} := U + z - Y$ és az X halmazra $2k = \varrho(X) + \varrho(\bar{Y}) = \varrho(X \cup \bar{Y}) + \varrho(X \cap \bar{Y}) + d(X, \bar{Y}) \geq 2k + 1$ adódna.

Tegyük fel most, hogy X, Y ki-pontosak. (A bizonyítás analóg abban az esetben, ha X, Y be-pontosak). Nem lehet, hogy $X \cup Y = U$, mert különben $\bar{X} \cap \bar{Y} = \{z\}$, és ekkor felhasználva, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$, (2.4) alapján azt kapnánk, hogy $2k = \varrho(\bar{X}) + \varrho(\bar{Y}) = \varrho(\bar{X} - \bar{Y}) + \varrho(\bar{Y} - \bar{X}) + \bar{d}(\bar{X}, \bar{Y}) \geq k + k + 1$. Ha viszont $X \cup Y \subset U$, akkor (2.5) miatt $2k = \delta(X) + \delta(Y) \geq \delta(X \cap Y) + \delta(X \cup Y) \geq k + k$, amiből a lemma következik. ■

Ha egyáltalán nincs t -t tartalmazó pontos halmaz, akkor $e = zt$ -vel bármely $f = uz$ leemelhető. Ha van ilyen pontos halmaz, akkor a lemma alapján létezik egy M egyértelmű maximális t -t tartalmazó pontos halmaz. Nem lehet, hogy minden z -be lépő él M -ből jön. Ha ugyanis $\varrho(M) = k$, akkor $\delta(U - M) = \varrho(M + z) \leq \varrho(M) - 1 = k - 1$, ellentétben az (2.5) feltevéssel, ha viszont $\delta(M) = k$, akkor $\varrho(U - M) = \delta(M + z) \leq \delta(M) - \varrho(z) + \delta(z) - 1 \leq k - 1$, ismét ellentétben (2.5)-gyel. Létezik tehát olyan $f = uz$ él, amelyre $u \in U - M$ és ez e -vel leemelhető. ■ ■

Példán megmutatható, hogy a $\varrho(z) = \delta(z)$ kikötés nélkül a tétel már $k = 1$ -re sem igaz. A 2.1.4. tétel ismételt alkalmazásával rögtön következik az alábbi.

2.1.6. tétel (Mader, 1982). *Legyen a $D = (U + z, A)$ digráf U -ban k -élösszefüggő ($k \geq 1$), és tegyük fel, hogy $\varrho(z) = \delta(z)$. Ekkor a z -be belépő és z -ből kilépő élek párba állíthatók egymással úgy, hogy a párokat egyszerre leemelve k -élösszefüggő digráfot kapunk az U csúcshalmazon.*

2.2. Kikeresztkezés

Szemben a leemelési művelettel, amely algoritmikus szempontból is használható, a kikeresztkezési eljárás egy tipikusan nem konstruktív bizonyítási technika. A módszer a C. Lucchesi és D. Younger nevezetes tételének Lovásztól származó bizonyításával szemléltetjük.

Nevezzük a $D = (V, A)$ digráf éleinek egy F részhalmazát **irányított kötésnek** vagy röviden **kötésnek**, ha F elemeit fordítva is behúзва (és az eredetieket meghagyva) erősen összefüggő digráfot kapunk. Ez azzal ekvivalens, hogy F elemeit összehúзва erősen összefüggő digráfot kapunk, vagy még azzal is, hogy F minden egyirányú vágásnak tartalmazza legalább egy elemét. Csúcsoknak egy nemüres X részhalmazát nevezzük **magnak**, ha nem lép ki belőle él. Az X -be belépő élek halmaza egyirányú vágást alkot, amelynek X a magja.

Keresztkezés-mentes hipergráfok

Keresztkezés-mentes hipergráfra egyszerű példát kapunk, ha veszünk egy F irányított fát és ennek minden e éléhez tekintjük azt a V_e halmazt, amely a fának az e elhagyásával keletkező azon komponensét jelöli, amelybe e belép. Az így keletkezett hipergráf keresztkezés-mentes. Érvényes egyfajta megfordítás, melynek bizonyítása egyszerű indukcióval történhet.

2.2.1. állítás. *A V részhalmazából álló tetszőleges $\mathcal{F}$ keresztkezés-mentes rendszerhez létezik egy $H = (U, F)$ irányított fa valamint V pontjainak egy φ leképezése U -ba úgy, hogy $\mathcal{F}$ tagjai és a fa élei 1-1 értelműen megfelelnek egymásnak, éspedig oly módon, hogy tetszőleges e élre $\varphi^{-1}(U_e)$ az e -nek megfelelő halmaz $\mathcal{F}$ -ben.*

Egyszerű mohó algoritmus segítségével igazolható, hogy egy irányított fa éleit meg lehet k színnel úgy színezni, hogy a fa minden legfeljebb k élű irányított útjában a színek különbözők. Ebből és az előbbi állításból kiolvasható az alábbi lemma.

2.2.2. lemma. *Legyen $D = (V, A)$ irányított gráf és $H = (V, \mathcal{H})$ egy keresztkezés-mentes magokból álló hipergráf. Ha D minden éle legfeljebb k magba lép be, akkor $\mathcal{H}$ -ból kiválasztható legalább $\lceil |\mathcal{H}|/k \rceil$ darab mag úgy, hogy a digráf mindegyik éle legfeljebb egybe lép be közülük.*

Lucchesi és Younger tétele

2.2.3. tétel (Lucchesi és Younger, 1978). Legyen $D = (V, A)$ (irányítatlanul összefüggő) irányított gráf. A minimális kötés $\tau = \tau(D)$ elemszáma egyenlő az élidegen egyirányú vágások maximális $\nu = \nu(D)$ számával.

Bizonyítás. (Lovász [40]). A $\nu \leq \tau$ egyenlőtlenség világos, így csak a fordított irány bizonyításával foglalkozunk. ν szerinti indukciót alkalmazunk. Ha ez a szám nulla, akkor nincs egyirányú vágás D -ben (D erősen összefüggő), és így τ is nulla. Tegyük most fel, hogy $\nu(D) > 0$. Mivel a tétel egyelű digráfra nyilvánvalóan fennáll, azt is feltehetjük, hogy $|A| > 1$.

1. Eset. Létezik a digráfnak olyan e éle, amelyre $\nu(D_e) < \nu(D)$, ahol $\nu(D_e)$ az e összehúzásával keletkező digráfot jelöli. Az indukciós feltevést $\nu(D_e)$ -re felhasználva és a triviális $\tau(D) \leq \tau(D_e) + 1$ egyenlőtlenséget megfigyelve nyerjük, hogy $\tau(D) \leq \tau(D_e) + 1 = \nu(D_e) + 1 \leq \nu(D) \leq \tau(D)$, amiből a kívánt $\tau(D) = \nu(D)$ egyenlőség adódik.

2. Eset. A digráf minden e élére $\nu(D_e) = \nu(D)$. Azaz létezik D -ben élidegen egyirányú vágásoknak egy olyan $\nu(D)$ elemszámú $\mathcal{I}_e$ részrendszere, amely tagjainak egyikében sincs benne az e él. Legyen ezen halmazrendszerek egyesítése $\mathcal{J}'$ (úgy értve, hogy egy X vágás annyi példányban fordul elő $\mathcal{J}'$ -ben, ahány olyan e él van D -ben, amelyre $X \in \mathcal{I}_e$). Ekkor $\mathcal{J}'$ -nek $|A|\nu(D)$ tagja van és

(*) D minden éle legfeljebb $k := |A| - 1$ tagban van benne.

Alkalmazzuk a következő kikeresztezési eljárást. Ha $\mathcal{J}'$ -nek van két keresztező tagja, akkor helyettesítsük őket a magjaik metszetéhez és uniójához tartozó egyirányú vágásokkal. Egy ilyen cserénél (*) érvényes marad. Miután egy kikeresztezés során a magok elemszámának négyzetösszege nő, legfeljebb véges sok lépés után egy olyan keresztezés-mentes $\mathcal{J}$ rendszert kapunk, amely $|A|\nu(D)$ (nem feltétlenül különböző) egyirányú vágásból áll és amelyre (*) fennáll. A 2.2.2 lemma szerint $\mathcal{J}$ tartalmaz $\lceil |\mathcal{J}|/k \rceil = \lceil |A|\nu(D)/(|A| - 1) \rceil > \nu(D)$ élidegen egyirányú vágást, ellentmondásban $\nu(D)$ jelentésével. A 2. eset tehát nem fordulhat elő. ■

Az élköltséges esetben a Lucchesi–Younger tétel kiterjeszthető egy legolcsóbb kötésre vonatkozó min-max relációvá. A fenti bizonyítási technika számos más helyen is sikerrel alkalmazható. Hátránya viszont, hogy nem alakítható át algoritmussá. Mindazonáltal a legolcsóbb kötés kiszámítására létezik erősen polinomiális algoritmus [19], bár ehhez már szükség van a II. részben bemutatásra kerülő szubmoduláris függvények alkalmazására.

3. Gráfok irányításai

3.1. Elemi gráfrányítási problémák

Mikor lehet egy város utcáit egyirányúvá tenni úgy, hogy (a) minden pontból el lehessen jutni minden másikba, (b) e tulajdonság még akkor is megmaradjon, ha akármely utcát le kell zárni? Nemnegatív egész számok egy sorozata mikor lehet egy pingpong körmérkőzés végeredménye? Egy bajnokság közepén miként lehet megállapítani, hogy egy csapatnak van-e még matematikai esélye az első helyen végezni? Ilyen jellegű kérdések modellezésére szolgál a gráfrányítási probléma.

Azt mondjuk, hogy az u és v csúcsokat összekötő irányítatlan $e = uv$ élt megirányítjuk, ha e -t helyettesítjük egy u -ból v -be menő vagy egy v -ből u -ba menő irányított éllel. Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráf irányításán azt értjük, hogy minden élt megirányítjuk. Néha beszélünk majd vegyes gráfok irányításáról. Egy gráfot akkor neveznek **vegyesnek**, ha irányított és irányítatlan éleket is tartalmazhat. Ennek irányításán azt értjük, hogy az irányítatlan éleit megirányítjuk az irányított élek változatlanul hagyása mellett.

A **gráfrányítási** problémában a kérdés az, hogy mikor létezik G -nek bizonyos előre adott tulajdonságokat kielégítő irányítása. A dolgozatban szereplő valamennyi előírás olyan típusú, hogy bizonyos csúcshalmazok befokára teszünk megköteket. Természetesen a kifokokról is beszélhetnénk, de az $X \subseteq V$ halmaz $\delta(X)$ kifokára tett előírások megfogalmazhatók a komplementer halmaz $\rho(V - X)$ befokának nyelvéen, hiszen a $\delta(X) + \rho(V - X) = d_G(X)$ érték csak a megirányítandó gráftól függ. Összetettebb kérdés az **átirányítási probléma**, amelyben egy irányított gráfról kérdezzük, hogy legkevesebb hány élének megfordításával kapunk egy előírt tulajdonságú irányítást (vagy általánosabban, ha az élek átírányításának adott költsége van, mennyi a keresett átírányítás minimális összköltsége). Az átírányítási probléma gyakran sokkal nehezebb az irányításnál.

Egyszerű esetnek tűnik, amikor adott a gráf csúcsainak egy $\mathcal{F}$ részhalmaz rendszere és olyan irányítást szeretnénk, amelyben az $\mathcal{F}$ tagjainak befoka legalább 1. Könnyen kimutatható azonban, hogy a hipergráfok jó 2-színezhetőségének közismerten NP-teljes feladata, ahol tehát *a pontthalmaz elemeit kell két színnel úgy színezni, hogy ne legyen egyszínű hiperél* megfogalmazható ezen az irányítási nyelven, és ezért az irányítási problémának már ez a speciális alakja is NP-teljes. Valóban, legyen $H = (U, \mathcal{H})$ az a hipergráf, amelynek jó 2-színezhetőségét el akarjuk dönteni. Készítsük el a H -nak egy izomorf $(U', \mathcal{H}')$ példányát, ahol U' diszjunkt U -tól. Legyen $V = U \cup U'$ és álljon a $G = (V, E)$ gráf az uu' élekből, ahol $u \in U$ és $u' \in U'$ egymásnak megfelelő elemek. (Vagyis G nem más, mint egy teljes párosítás.) Legyen $\mathcal{F} := \mathcal{H} \cup \mathcal{H}'$. Mármost könnyen látszik, hogy egy-egy értelmű kapcsolat van a H hipergráf jó 2-színezései valamint G olyan irányításai között, amelyben minden $\mathcal{F}$ -beli halmaz befoka legalább 1.

Ilyen értelemben tehát a gráfrányítási probléma túl általános. Jelen célunk olyan irányítási problémákat feltérképezni, melyekre jó karakterizáció adható. A legegyszerűbbekkel kezdjük, melyek motivációt jelentenek a sokkal általánosabbakhoz.

3.1.1. Erősen összefüggő irányítások

1939-ben H. E. Robbins [48] vetette fel a kérdést, hogy egy város utcáit mikor lehet egyirányúsítani (másszóval megirányítani) úgy, hogy bármely pontból el lehessen jutni irányított úton bármely másik pontba? Itt implicit feltesszük, hogy eredetileg semelyik utca sem volt egyirányú (és egy következő kérdés foglalkozik majd azzal, ha már a kiinduláskor is léteznek egyirányú utcák, melyek irányát nem változtathatjuk). Gráfnyelven a kérdés az, hogy egy irányítatlan gráf éleit mikor lehet úgy megirányítani, hogy erősen összefüggő digráfot kapjunk, ahol az erősen összefüggőség definíció szerint azt jelenti, hogy a digráf bármely pontjából bármely másik pontjába vezet irányított út. Ez a tulajdonság azzal ekvivalens, hogy a digráf pontjainak minden valódi nemüres Z részhalmazából lép ki él. (Természetesen Robbins irányítási problémája pontosan annyira „gyakorlati” feladat, mint amennyire például a páros gráfok teljes párosításának létezését szemléltető házasság probléma.)

Ha Z valódi nemüres részhalmazból nem lép ki él, akkor a Z -be belépő élek halmazát **egyirányú vágásnak** nevezzük. Az erősen összefüggőség azzal ekvivalens, hogy a digráfban nincs egyirányú vágás.

Az erősen összefüggővé irányításhoz a gráfnak mindenesetre összefüggőnek kell lennie, sőt 2-élösszefüggőnek is abban az értelemben, hogy bármely él kihagyása sem rontja el az összefüggőséget. Ha ugyanis az $e = uv$ élt kihagyva a gráf már nem összefüggő, akkor e -t mondjuk v felé irányítva u biztosan nem lesz elérhető v -ből.

3.1.1. tétel (Robbins, 1939). *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak akkor és csak akkor létezik erősen összefüggő irányítása, ha G 2-élösszefüggő, azaz ha G bármely élének elhagyása után is összefüggő marad.*

Mai szemmel nézve ez egy egyszerű kis tétel. A feltétel elegendőségének igazolásához a gráf valamely s pontjából kiindulva mélységi kereséssel határozzunk meg egy F mélységi fát. Ennek éleit irányítsuk s -től el felé. A mélységi fa ismert tulajdonsága, hogy a gráf minden $e = uv$ nem-fa élének két végpontja között az F -ben vezető egyértelmű út irányított út. Irányítsuk e -t v felé, ha v van közelebb s -hez. Könnyű igazolni, hogy így erősen összefüggő irányítást kapunk.

Egy alternatív bizonyítás a fülfelbontási lemmán alapul, amely szerint egy gráf akkor és csak akkor 2-élösszefüggő, ha előállítható egyetlen pontból kiindulva két meglévő pont közötti új él hozzáadásával és egy meglévő él új ponttal történő felosztásával.

Az első bizonyítás előnye, hogy lineáris futásidejű algoritmust szolgáltat, a második pedig, hogy szépen általánosítható Nash-Williams sokkal mélyebb irányítási tételének bizonyítására (lásd a 3.4. szakaszt). Valójában érvényes a Robbins tétel vegyes gráfokra vonatkozó általánosítása is. ([15, 3], [39] 6.11b feladat.)

3.1.2. tétel. *Egy $H = (V, A + E)$ vegyes gráf akkor és csak akkor irányítható erősen összefüggővé, ha nincs benne egyirányú vágás és irányítatlan értelemben 2-élösszefüggő. ■*

Bizonyítás. Az irányítatlan élek $|E|$ száma szerinti indukció. Legyen $e = uv \in E$ irányítatlan él. Amennyiben az u -ból v felé történő irányítás egyirányú vágást hozna létre, úgy létezik egy olyan X $v\bar{u}$ -halmaz, amelyre az e -től eltekintve az X és $V - X$ közötti valamennyi él irányított (eleme A -nak) és pedig $V - X$ -től X -felé. Hasonlóképp, amennyiben e -nek a v -ból u -felé történő irányítása hozna létre egyirányú vágást, akkor létezne egy olyan Y $u\bar{v}$ -halmaz, amelyre e -től eltekintve az Y és $V - Y$ közötti valamennyi él irányított Y -től $V - Y$ -felé. Ekkor viszont az $X \cap Y$ halmazból nem lép ki sem irányított, sem irányítatlan él, és ugyanez áll az $X \cup Y$ halmazra is. Mivel a feltevés szerint nincsen egyirányú vágás, ezért szükségképpen $X \cap Y = \emptyset$ és $X \cup Y = V$, azaz $Y = V - X$. Így az X és $V - X$ között egyedül az e él vezethet, ellentétben a feltevással, hogy nincs elvágó él. ■ ■

Gyökeres összefüggés

Akkor mondjuk, hogy egy digráf **gyökeresen összefüggő**, ha egy kijelölt s gyökérpontjából minden más csúcsa irányított úton elérhető, ami azzal ekvivalens, hogy létezik s gyökerű feszítő fenyő, vagy még azzal, hogy a csúcsoknak minden s -et tartalmazó nemüres részhalmazába lép be él. A Robbins tétel nyomán felvethető, hogy egy G irányítatlan gráfnak mikor létezik gyökeresen összefüggő irányítása? Azonnal látszik a válasz: pontosan akkor, ha G összefüggő. Valóban, e feltétel nyilván szükséges, de elegendő is, hiszen G egy feszítő fáját az s -től „el felé” irányítva egy s -gyökerű fenyőt kapunk, és akkor a többi élt már tetszőlegesen irányíthatjuk. Ez is triviális, de jó kiindulási alapul szolgál érdekesebb problémákhoz: például, ha nem létezik gyökeresen összefüggő irányítás, legkevesebb hány új él hozzáadásával lehet elérni, hogy létezzék? Természetes kérdés, hogy egy vegyes gráfnak mikor létezik gyökeresen összefüggő irányítása, vagy az, hogy egy digráfnak legkevesebb hány élt kell megfordítani, hogy gyökeresen összefüggővé váljék?

3.1.2. Fokszám-előírt irányítások

Nézzük most meg a gráfrányítási problémák egy másik forrását. Egy ping-pong körmérkőzésen n játékos vesz részt és mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést játszik, azaz összesen $n(n-1)/2$ játszmára kerül sor. Az első helyezett m_1 játszmát nyert, a második m_2 -t, az utolsó m_n -t, vagyis $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$. Mikképp lehet jellemezni az így előálló monoton csökkenő sorozatokat, azaz egy előre megadott nemnegatív egészekből álló $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$ sorozatnak milyen tulajdonságokat kell teljesítenie ahhoz, hogy egy körmérkőzés végeredménye legyen? Röviden szólva nemnegatív egész számok egy sorozata mikor realizálható turnamenttel (körmérkőzéssel)?

Természetesen az m_i számok összege éppen a lejátszott játszmák száma, vagyis a

$$(3.1) \quad \sum_{i=1}^n m_i = n(n-1)/2$$

feltétel szükséges. Az 5, 4, 4, 1, 1, 0 hattagú sorozat ezt a feltételt teljesíti, de mégsem lehet egy körmérkőzés végeredménye, hiszen az utolsó három helyezett összesen

$1 + 1 + 0 = 2$ győzelmet aratott, holott az egymás elleni három meccsen három győzelem születik.

Ezt a megfontolást általánosíthatjuk. Bármely h játékos egymással összesen $h(h-1)/2$ mérkőzést játszik, ezért az elért győzelmeik össz-száma legalább ennyi. Vagyis a realizálhatóságnak szükséges feltétele, hogy minden $h = 1, 2, \dots, n$ -re a sorozat h legkisebb tagjának az összege legalább $h(h-1)/2$ legyen:

$$(3.2) \quad \sum_{i=n-h+1}^n m_i \geq h(h-1)/2 \quad \text{minden } h = 1, 2, \dots, n\text{-re.}$$

Kérdés persze, hogy ez a könnyen ellenőrizhető n darab egyenlőtlenség már biztosítja-e az $m_1 \geq \dots \geq m_n$ sorozat turnamenttel való realizálhatóságát vagy esetleg felléphetnek további strukturális bajok, amelyek a realizálhatóságot megakadályozzák. H. G. Landau [37] alábbi tétele szerint további akadályok már nem léteznek.

Egy n pontú irányított gráf **befok sorozatán** (másképp **befok vektorán**) a csúcsok befokaiból álló n tagú sorozatot értjük. Egy körmérkőzést egy turnamenttel kényelmes megadni: azt, hogy ha a v játékos legyőzte u -t úgy jelöljük, hogy u -ból v -be húzunk egy irányított élt.

3.1.3. tétel (Landau, 1953). *Az $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$ sorozat akkor és csak akkor egy turnament befok sorozata, ha (3.1) és (3.2) fennáll.*

Természetesen a problémának egyéb variációi is felvethetők. Például egy sakk körmérkőzésen egy parti győztese 1 pontot kap, a vesztes 0-t, míg döntetlen esetén mindketten 1/2-t. Vagy hogy ne kelljen félegészekkel bajmolódnunk, sorozzunk fel kettővel, azaz a győzelemre járjon két pont, míg döntetlennél 1. Egy $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n$ sorozat mikor lehet egy ilyen sakk körmérkőzés végső pontszámsorozata? Legyen G az az n pontú gráf, amelyben minden két pont között pontosan kettő párhuzamos él vezet. Ha a v játékos legyőzi u -t, akkor mindkét párhuzamos élt közöttük irányítsuk v -felé. Ha döntetlenül játszanak, akkor a két párhuzamos élt egyikét irányítsuk u felé, a másikat v felé. Így a v pont befoka éppen a v játékos megszerzett pontjainak a száma lesz, tehát a kérdés azzal ekvivalens, hogy G -nek mikor létezik fokszám előírt irányítása.

3.1.4. tétel. *Egy nemnegatív egészekből álló $m_1 \geq \dots \geq m_n$ sorozat akkor és csak akkor egy körmérkőzés végeredménye (ahol a győzelemért két pont jár, a döntetlenért egy), ha $\sum_1^n m_i = n(n-1)$ és $\sum_{i=n-h+1}^n m_i \leq h(h-1)$ ($h = 1, \dots, n$).*

Rokon kérdéshez jutunk, ha a játékosok páronként nem egy, hanem két (általánosabban k) mérkőzést játszanak. Vizsgálhatjuk, hogy egy számsorozat mikor lehet egy bajnokság végeredménye, ha bizonyos mérkőzéseket már lejátszottak. Az ilyen típusú feladatok nagy része **fokszám-előírt irányítási** probléma, amelyben az a kérdés, hogy mikor lehet egy irányítatlan gráf éleit úgy megirányítani, hogy a keletkező digráf minden csúcsának a befoka előre megadott szám.

Irányítás és párosítás

A kérdés legalább olyan nehéz, mint a teljes párosítás létezésének kérdése páros gráfban (Hall tétel). Valóban, ha $G = (A, B; E)$ páros gráf, amelyben $|A| = |B|$, akkor egy adott teljes párosítás éleit B -felé a többi élt A -felé irányítva G -nek olyan irányítását kapjuk, amelyben minden B -beli pont befoka 1, míg egy A -beli v pont befoka $d_G(v) - 1$. Megfordítva, ha van egy ezen befokszám előírásoknak megfelelő irányítása G -nek, akkor a B felé irányított élek szükségképpen egy teljes párosítást alkotnak. Analóg konstrukcióval látható, hogy foksám-előírt irányítások segítségével általánosabban egy páros gráf tetszőleges foksám előírt részgráfjának a problémája is megfogalmazható. Azonban nemcsak a teljes párosítás problémája vezethető vissza a foksám-előírt irányítás kérdésére, hanem megfordítva is, egy egyszerű elemi konstrukció segítségével a foksám-előírt irányítás problémája is megfogalmazható páros gráf teljes párosításának feladatáaként. (Először G minden élt osszuk fel egy új ponttal, majd az így létrejövő páros gráfban minden eredeti v csúcsot helyettesítsünk $m(v)$ egybevágó példánnyal. Ekkor tehát egy eredeti uv élt felosztó új csúcs $m(u) + m(v)$ csúccsal lesz szomszédos). Az irányítási probléma ebben az értelemben tehát ekvivalens a párosítási feladattal, de a messzemenő általánosítási lehetőségek miatt érdemes közvetlenül irányításokkal foglalkozni.

A talán legegyszerűbb foksám-előírt irányítási feladatban egy G gráf Euler-irányítását keressük (amelyben minden pont befoka egyenlő a kifokával). Könnyen látszik, hogy ilyen pontosan akkor létezik, ha G Euler-gráf (azaz minden pont foka páros), hiszen egy irányítatlan Euler-gráf felbomlik élidegen körök uniójára. Nehezebb egy vegyes gráf Euler-irányíthatóságának kérdése és a választ a következő általános eredmény szolgáltatja majd.

Az irányítási lemma

Egyszerűsége ellenére is alapvető az alábbi eredmény, amelyet kicsit általánosabb alakban fogunk igazolni.

3.1.5. lemma (Irányítási lemma, Hakimi [31]). *Adott $G = (V, E)$ gráfra és $m : V \rightarrow \mathbf{Z}$ függvényre a következők ekvivalensek.*

$$(3.3) \quad G \text{ irányítható úgy, hogy minden } v \text{ csúcra } \varrho(v) = m(v),$$

$$(3.4) \quad e(X) \geq m(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re és } m(V) = |E|,$$

$$(3.5) \quad i(Y) \leq m(Y) \text{ minden } Y \subseteq V\text{-re és } m(V) = |E|.$$

Az irányítási lemmából rögtön következik Landau 3.1.3. tétele, hiszen teljes gráfban $i(X)$ minden h elemű X halmazra $h(h-1)/2$, ezért $i(X) \leq m(X)$ elegendő csak a h darab legkisebb m_i értékre megkövetelni. Hasonlóan adódik a 3.1.4. tétel is, ha az irányítási lemmát arra a gráfra alkalmazzuk, amely a teljás gráfból keletkezik minden élének párhuzamos megduplázásával. Megjegyzendő ugyanakkor, hogy mindmáig nem ismeretes a válasz Iványi Antal szép kérdésére, amely a futballbajnokság lehetséges végeredményeit akarja karakterizálni, ha a győzelemért 3 pont jár, míg a döntetlenért 1.

Egy másik következmény vegyes gráfok Euler irányíthatóságára ad választ.

3.1.6. következmény (Ford és Fulkerson). *Adott egy $M = (V, A + E)$ vegyes gráf, amely a $G = (V, E)$ irányítatlan és $D = (V, A)$ irányított gráfok összetételével keletkezett. Akkor és csak akkor lehet úgy irányítani az E elemeit, hogy az előálló irányított gráf Euler-féle legyen (azaz minden pont befoka megegyezzen a kifokával), ha M -ben minden pont páros sok (irányított és irányítatlan) éllel szomszédos azaz*

$$(3.6) \quad \delta_D(v) + \varrho_D(v) + d_G(v) \text{ páros}$$

és

$$(3.7) \quad d_G(X) \geq \varrho_D(X) - \delta_D(X) \text{ teljesül minden } X \subseteq V\text{-re.}$$

3.1.3. Fokszám-korlátos irányítások

S. L. Hakimi 1965-ben [31] azt a kicsit általánosabb feladatot nézte, amikor pontos befok előírás helyett alsó korlát van adva. Ez ekvivalens azzal a variációval, amikor alsó helyett felső korlát adott a keresett irányítás befokaira. Most a kettőt összekapcsoljuk és azt az irányítási feladatot adjuk meg, amelynél a keresendő digráf minden csúcsának a befoka előre megadott korlátok közé esik. Konkrétabban, legyen $f : V \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f \leq g$. Az alábbi tétel bizonyításában használjuk az útátfordítós technikát, amely a König tételre vonatkozó alternáló utas bizonyítás megfelelője.

3.1.7. tétel. *A $G = (V, E)$ gráfnak akkor és csak létezik olyan irányítása,*

(i) *amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$(3.8) \quad e(X) \geq f(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re,}$$

(ii) *amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$(3.9) \quad i(X) \leq g(X) \text{ minden } X \subseteq V\text{-re,}$$

(iii) *amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind (3.8), mind (3.9) fennáll.*

Bizonyítás. (3.8) szükségessége. Tegyük fel, hogy létezik jó irányítás. Ekkor $f(X) \leq \sum [\varrho(v) : v \in X] \leq e(X)$.

(3.8) elegendősége. G egy irányításában nevezzünk egy s pontot **hibásnak**, ha $\varrho(s) < f(s)$. Válasszunk G -nek egy olyan irányítását, amelynek a $\sum [f(v) - \varrho(v) : v \text{ hibás}]$ összeggel definiált hibája minimális. Ha ez a hiba 0, vagyis ha nincs hibás csúcs, akkor készen vagyunk.

Legyen most az s csúcs hibás és jelöljük X -szel a megadott irányításban azon pontok halmazát, amelyek s -ből elérhetők. Ekkor X -ből nem lép ki él, és így $\sum [\varrho(v) : v \in X] = e(X)$. Most X szükségképpen tartalmaz egy olyan t pontot, amelyre $\varrho(t) > f(t)$, mert ha nem létezne ilyen pont, akkor $f(X) > \sum [\varrho(v) : v \in X] = e(X)$ volna ellentmondásban (3.8)-gyel. Egy s -ből t -be vezető út éleinek

irányítását megfordítva G -nek egy olyan irányítását kapjuk, amelynek hibája kisebb, mint a meglévő irányításé. A módszer ismételt alkalmazásával legfeljebb $f(V)$ út megfordításával egy jó irányítást kapunk.

Analóg módon igazolható a tétel második része (azzal az eltéréssel, hogy most egy t pont akkor hibás, ha a meglévő irányításban $\varrho(t) > g(t)$ és X -szel azon pontok halmazát jelöljük, amelyekből t elérhető). Valójában a második rész formailag is ekvivalens az első azon változatával, amikor olyan irányítást keresünk, amelyben minden v pont kifoka legalább $f(v) := d_G(v) - g(v)$.

Végül a harmadik rész igazolásához induljunk ki egy olyan irányításból, amelyre $(*) \quad \varrho(v) \leq g(v)$ teljesül minden v pontra. Alkalmazzuk az első rész algoritmusát és figyeljük meg, hogy ennek során egy pontnak a befoka csak akkor nő, ha $\varrho(s) < f(s) \leq g(s)$, vagyis $(*)$ automatikusan érvényben marad. ■

Érdekes megfigyelni, hogy ha a fenti bizonyítást a páros gráf teljes párosításával ekvivalens (fentebb megfogalmazott) irányítási feladatra használjuk, akkor épp az alternáló utas módszert kapjuk vissza. A tételből az irányítási lemma könnyen kiolvasható.

3.1.8. következmény. *Tegyük fel, hogy a G gráfnak van olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra és van olyan irányítása, amelyre $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra, akkor olyan is van, amely egyszerre elégíti ki mindkét kívánságot.*

Az itt megfogalmazott tulajdonságot **lánctulajdonságnak** (linking property) nevezzük.

3.2. Erősen összefüggő foksám-korlátos irányítások

Az eddigi két irányítási probléma összevonásaként megvizsgáljuk, hogy mikor létezik foksám-korlátokat kielégítő erősen összefüggő irányítás. A válaszhoz szükségünk lesz a $\sigma_G(X)$ vagy röviden $\sigma(X)$ függvényre, amely egy $X \subseteq V$ nemüres halmazra elhagyásával keletkező gráf komponenseinek számát jelöli.

Egy erősen összefüggő irányításában minden nemüres $X \subseteq V$ halmaz kifoka (és befoka) legalább $\sigma(X)$, hiszen $G - X$ minden komponensébe lép be él, így X -ből legalább $\sigma(X)$ él lép ki. A következő tételnek [24] idézem a teljes eredeti bizonyítást, mert szépen mutatja az útfordítás technikát kissé bonyolultabb körülmények között.

3.2.1. tétel (Frank és Gyárfás, 1976). *Legyen a $G = (V, E)$ 2-élösszefüggő irányítatlan gráf csúcsain adva az $f : V \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ függvény, melyekre $f \leq g \leq d_G$. G -nek akkor és csak létezik olyan erősen összefüggő irányítása,*

(i) *amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha*

$$(3.10) \quad f(X) \leq e(X) - \sigma(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re,}$$

(ii) amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha

$$(3.11) \quad g(X) \geq i(X) + \sigma(X) \quad \text{minden } \emptyset \subset X \subseteq V\text{-re,}$$

(iii) amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind (3.10), mind (3.11) fennáll.

Bizonyítás. (i) Ha létezik olyan erősen összefüggő irányítás, amelyre $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsban fennáll, akkor X -ből legalább $\sigma(X)$ él kilép, így $f(X) \leq \sum [\varrho(v) : v \in X] = e(X) - \delta(X) \leq e(X) - \sigma(X)$, azaz (3.10) következik.

Tegyük most fel, hogy (3.10) teljesül. Induljunk ki G -nek egy olyan erősen összefüggő irányításából, amelyre a $H := \sum [(f(v) - \varrho(v))^+ : v \in V]$ „hibaösszeg” minimális. (Itt $x^+ := \max\{0, x\}$.) Amennyiben $H = 0$, azaz $\varrho(v) \geq f(v)$ teljesül minden pontra, úgy készen vagyunk, így tegyük fel, hogy $H > 0$, azaz van olyan s pont, amelyre $\varrho(s) < f(s)$.

Ha X és Y két metsző, 1 befokú részhalmaza $V - s$ -nek, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is 1 befokú (ugyanis $1 + 1 = \varrho(X) + \varrho(Y) \geq \varrho(X \cup Y) + \varrho(X \cap Y) \geq 1 + 1$ -ből $\varrho(X \cup Y) = 1 = \varrho(X \cap Y)$ adódik). Így az s -t nem tartalmazó maximális $C_1, \dots, C_l$ 1-befokú halmazok páronként diszjunktak. Igaz továbbá, hogy két ilyen C_i között nem vezethet él, mert ha mondjuk C_1 -ből vezetne C_2 -be, akkor $C_1 \cup C_2$ is 1 befokú volna, ellentétben a maximalitással. Legyen $X = V - \cup_i C_i$ (illetve $X = V$, ha nem létezik s -t nem tartalmazó 1 befokú halmaz.) Kapjuk, hogy $\delta(X) \leq l \leq \sigma(X) \leq \delta(X)$, amiből $\delta(X) = \sigma(X)$.

Állítjuk, hogy X -nek van „túltelített” t pontja, azaz olyan, amelyre $\varrho(t) > f(t)$. Ha ugyanis nem létezne, akkor $f(X) > \sum [\varrho(v) : v \in X] = e(X) - \delta(X) = e(X) - \sigma(X)$, ellentétben a (3.10) feltevessel.

Legyen P tetszőleges s -ből t -be vezető út. Állítjuk, hogy ennek irányítását megfordítva erősen összefüggő irányítást kapunk. Valóban, ha az átirányítás után egy Z halmazba nem lépne be él, akkor szükségképpen $t \in Z$, $s \notin Z$, továbbá a P út egyetlen egyszer lép Z -be és nincs is más Z -be lépő él, azaz $\varrho(Z) = 1$. Ilyen Z halmaz létezése azonban ellentmondana a C_i halmazok maximális választásának.

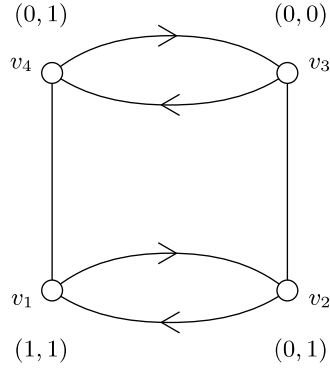
A P út megfordítása ráadásul olyan erősen összefüggő irányítást eredményez, amelynek a hibája eggyel kisebb, mint a kiindulási irányításé, ellentmondásban annak minimális hibájú választásával, amivel az (i) rész bizonyítása teljes.

A második rész analóg módon bizonyítható.

A harmadik részhez induljunk ki G -nek egy olyan erősen összefüggő irányításából, amelyben v minden pont befoka legfeljebb $g(v)$ és erre alkalmazzuk az első rész bizonyítását. Azt kell csupán megfigyelni, hogy ott egy s pont befoka csak akkor nőhet, ha $\varrho(s) < f(s)$. Így az $f \leq g$ feltevés miatt a $\varrho(v) \leq g(v)$ tulajdonság nem tud elromolni. ■

A 3.2.1. tétel egy újabb megnyilvánulása a lánctulajdonságnak. Mivel a tétel a Robbins tétel foksám-korlátos kiterjesztésének tekinthető, megkérdezhetjük, hogy a 3.1.2. következménynek is van-e hasonló foksám-korlátos alakja. Meglepő módon

a lánc tulajdonság itt már érvényét veszti, azaz a következő állítás **nem érvényes**:
Ha egy vegyes gráfnak van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v pont befoka legalább $f(v)$, és van olyan erősen összefüggő irányítása, amelyben minden v pont befoka legfeljebb $g(v)$, akkor létezik olyan erősen összefüggő irányítása is, amelyben minden pont befoka legalább $f(v)$ és legfeljebb $g(v)$. Az állítást cáfoló vegyes gráf négy pontból áll, v_1v_4 és v_2v_3 irányítatlan élek, v_3 és v_4 között van két ellentétesen irányított párhuzamos él, és v_1 és v_2 között van két ellentétesen irányított párhuzamos él. Az f alsó korlát a négy ponton rendre 1, 0, 0, 0, míg a g felső korlát rendre 1, 1, 0, 1. (Lásd az 1. ábrát.)



1. ábra

A 3.2.1. tétel bizonyítási módszere könnyen átvihető a gyökeresen összefüggő foksám-korlátos irányításokra. Ugyanakkor a kiadódó tételben van egy érdekes különbség: a 3.2.1. tételben az alsó korlátokra vonatkozó (i), illetve a felső korlátokra vonatkozó (ii) jellemzések szimmetrikus megfogalmazásúak, sőt valójában egymással ekvivalensek, hiszen a befokokra vonatkozó alsó korlát ekvivalens a kifokokra vonatkozó felső korláttal, és egy erősen összefüggő digráf minden élet megfordítva erősen összefüggő digráfot kapunk. Gyökeresen összefüggő gráfoknál ezen utóbbi állítás megfelelője nem érvényes, és ezért van az, hogy az alábbi tételben az (i) és (ii) rész nem szimmetrikus: a felső korlátokra vonatkozó (ii) jellemzésben a $\sigma(X)$ függvény egyáltalán nem játszik szerepet.

3.2.2. tétel [24]. Legyen a $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfnak s kijelölt gyökérpontja, és jelölje ε_1 azt a halmazfüggvényt, amelyre $\varepsilon_1(X)$ ($\emptyset \subset X \subset V$) annak megfelelően 0 vagy 1, hogy X tartalmazza s -t vagy sem. Adott továbbá az $f : V \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ függvény, melyekre $f \leq g \leq d_G$. Akkor és csak akkor létezik G -nek olyan gyökeresen élösszefüggő irányítása,

(i) amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha

$$(3.12) \quad f(X) \leq e(X) - \sigma(X) + \varepsilon_1(X)$$

teljesül V minden nemüres X részhalmazára,

(ii) amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha

$$(3.13) \quad g(X) \geq i(X) + \varepsilon_1(X) \quad \text{minden } \emptyset \subset X \subseteq V\text{-re,}$$

(iii) amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind (3.12), mind (3.13) fennáll.

3.2.1. Alkalmazás: foksám-korlátos fák

A 3.2.2. irányítási tételt alkalmazhatjuk egy érdekes részgráf probléma megoldására. Egy összefüggő gráfban szeretnénk olyan feszítő fát keresni, amely a csúcsokon foksám-korlátoknak tesz eleget. Ez így túl általános, hiszen ha minden pontban a foksámra felső korlátként 2-t adunk meg, akkor a feladat a Hamilton út létezésének problémájával ekvivalens, ami NP-teljes. Ha azonban a csúcsoknak csak egy stabil részhalmazán vannak korlátok, akkor az alábbi jó karakterizáció adható.

3.2.3. tétel. Legyen G összefüggő irányítatlan gráf és $S \subset V$ a G pontjainak egy stabil részhalmaza. Legyen továbbá $f_S : S \rightarrow \mathbf{Z}_+$ és $g_S : S \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ két függvény, melyekre $f_S \leq g_S$. Akkor és csak akkor létezik G -nek olyan F feszítő fája,

(i) amelyre $d_F(v) \geq f_S(v)$ minden $v \in S$ -re, ha

$$(3.14) \quad f_S(X) \leq |X| + |\Gamma(X)| - 1 \quad \text{minden } \emptyset \subset X \subseteq S \text{ halmazra,}$$

(ii) amelyre $d_F(v) \leq g_S(v)$ minden $v \in S$ -re, ha

$$(3.15) \quad g_S(X) \geq |X| + \sigma(X) - 1 \quad \text{minden } \emptyset \subset X \subseteq S \text{ halmazra,}$$

(iii) amelyre $f_S(v) \leq d_F(v) \leq g_S(v)$ minden $v \in S$ -re, ha mind (3.14), mind (3.15) teljesül.

Ki fog derülni, hogy a 3.2.3. tétel egy általánosabb, matroidokra vonatkozó eredmény speciális esete (lásd a II. részt).

A bizonyítás az irányítások és a foksám előírt fák közötti kapcsolaton múlik.

3.2.4. lemma. A $G = (S, T; E)$ páros gráfban legyen $m : S \rightarrow \mathbf{Z}^+$ olyan függvény, amelyben $m(S) = |V| - 1$. Legyen $s \in V - S$ tetszőleges pont. G -nek akkor és csak akkor létezik olyan F feszítő fája, amelyre $d_F(v) = m(v)$ minden $v \in S$ csúcsra, ha G -nek létezik olyan irányítása, amelyben s -ből G -nek minden csúcsa elérhető és minden S -beli v csúcs befoka $d(v) - m(v) + 1$.

Legyen $g(v) := \infty$, ha $v \in V - S$ és $g(v) := d(v) - f_S(v) + 1$, ha $v \in S$. Legyen $f(v) := \{-\infty\}$, ha $v \in V - S$ és $f(v) := d(v) - g_S(v) + 1$, ha $v \in S$. Figyeljük meg, hogy (3.14) ekvivalens a (3.13) feltétellel, (3.15) pedig a (3.12) feltétellel. Így a 3.2.2. tétel alkalmazható.

3.3. Optimális átirányítások

Vizsgáljuk meg a foksám-előírt valamint az erősen összefüggő irányításokra vonatkozó optimális átirányítási problémát.

3.3.1. Fokszám-előírt átirányítások

Tegyük fel, hogy adott m befokszám előírásra teljesülnek az irányítási lemma feltételei, és így a G gráfnak létezik olyan irányítása, amelyben $\varrho(v) = m(v)$ minden v csúcsra. Az átirányítási problémában a G -nek egy meglévő D irányításából indulunk ki és minimális számú (vagy általánosabban minimális összköltségű) él irányításának a megfordításával szeretnénk egy fokszám-előírt irányítást megkapni. Ehhez legyen adott egy $c : A \rightarrow \mathbf{R}_+$ költségfüggvény, amelyre $c(a)$ azt jelzi, hogy az a él megfordítása mennyibe kerül.

Megmutatjuk, hogy ez minimális költségű áram feladatként megfogalmazható, így az erre vonatkozó ismert polinomiális algoritmus használható. A $D = (V, A)$ digráf bizonyos éleinek átirányítását egy $z : A \rightarrow \{0, 1\}$ vektor segítségével írjuk le, éspedig úgy, hogy $z(a) = 1$, ha a -t megfordítjuk, és $z(a) = 0$, ha nem. Ekkor egy v pont új befoka $\varrho_D(v) - \varrho_z(v) + \delta_z(v)$, így ennek kell az előírt $m(v)$ értékkel megegyeznie, vagyis a z -re a kívánság $\varrho_z(v) - \delta_z(v) = b(v)$, ahol $b(v) := \varrho_D(v) - m(v)$.

Adjunk D -hez egy új s pontot és minden $v \in V$ csúcsból egy vs élt. A megnövelt D^+ digráf élhalmazán definiáljuk az f és g korlátokat úgy, hogy minden eredeti a élen legyen $f(a) := 0$, $g(a) := 1$, míg az új éleken $f(vs) := g(vs) := b(v)$. A c költségfüggvényhez rendeljük hozzá a c^+ kiterjesztését, amely eredeti éleken megegyezik c -vel, míg az újakon $c^+(vs) = 0$. Adott $z : A \rightarrow \{0, 1\}$ vektorhoz rendeljük hozzá a z^+ kiterjesztését, amely eredeti éleken megegyezik z -vel, míg az újakon $z^+(vs) = b(s)$.

A konstrukcióból kiolvasható, hogy egy $z : 0 - 1$ -vektor pontosan akkor definiálja D -nek egy m befok vektorú átirányítását, ha z^+ megengedett egészértékű áram D^+ -ban. Így a minimális költségű fokszám-előírt átirányítási probléma valóban egy minimális költségű megengedett áram problémával ekvivalens.

3.3.2. Gyökeresen összefüggő átirányítások

Az átirányítási feladat más előírásokra is megfogalmazható. Nézzük például meg, hogy egy $D = (V, A)$ digráfnak minimálisan hány élt kell megfordítani ahhoz, hogy az s pontjából minden más pont elérhető legyen. Rögtön az általánosabb költség feladatot tekintjük, amikor adott az élhalmazon egy $c : A \rightarrow \mathbf{R}_+$ költségfüggvény. A feladatot visszavezetjük a minimális költségű fenyő feladatára, amelyre az 1.2. részben láttunk megoldást.

Ennek érdekében adjuk a digráfhoz minden e élének az $\bar{e}$ megfordítottját. A keletkező D' digráfban legyen $c'(e) = 0$ és $c'(\bar{e}) = c(e)$.

3.3.1. állítás. *A minimális c' -költségű s -fenyő költsége éppen a gyökeres összefüggés érdekében megfordítandó élek minimális c -költsége.*

Bizonyítás. D' tetszőleges F feszítő s -fenyőjének a $c'(F)$ költsége egyenlő a benne szereplő megfordított élek költségével, tehát D legfeljebb $c'(F)$ összköltségű élének megfordításával gyökeresen összefüggővé tehető. Megfordítva, ha J a D éleinek egy minimális c -költségű halmaza, melyet átirányítva már létezik egy F feszítő s -fenyő, akkor J minimalitása folytán F tartalmazza az összes J -beli él megfordítottját, és ezért D' -ben van $c(J)$ költségű s -fenyő. ■

Az állítás nyomán Chu és Liu minimális költségű fenyőt meghatározó algoritmusának segítségével meghatározhatjuk a keresett optimális átirányítást. Fulkerson 1.2.5. tételéből kiolvasható az átirányítás minimális költsége, amelyet most a $c \equiv 1$ speciális esetben megadunk.

3.3.2. tétel. *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban a gyökeresen összefüggővé tevéshez átirányítandó élek minimális száma egyenlő a gyökér felé mutató élidegen egyirányú vágások maximális számával.*

3.3.3. Erősen összefüggő átirányítások

Robbins nyomán tudjuk, hogy egy 2-élösszefüggő gráfnak mindig van erősen összefüggő átirányítása. Ennél sokkal nehezebb az átirányítási kérdés, amely arra vonatkozik, hogy egy digráfot legkevesebb hány élének átfordításával tehetünk erősen összefüggővé. Mindenesetre a Robbins-tétel 3. bizonyításból kiolvasható az alábbi megfigyelés.

3.3.3. állítás. *Egy elvágó él mentes digráfban egy tartalmazásra nézve minimális kötés éleinek átirányítását megfordítva erősen összefüggő digráfot kapunk.*

Emiatt az átirányítási kérdésre a választ Lucchesi és Younger 2.2.3. tétele adja meg: a minimum az élidegen egyirányú vágások maximális számával egyenlő. Élek soros többszörözésével rögtön megkapjuk a Lucchesi–Younger tétel költséges változatát, amely a legolcsóbb erősen összefüggő átirányítás kérdésére is választ jelent.

3.3.4. tétel. *Legyen a $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $c : A \rightarrow \mathbf{Z}_+$ nemnegatív egészértékű költségfüggvény. A minimális költségű kötés τ_c költsége egyenlő a (nem feltétlenül különböző) c -független egyirányú vágások maximális ν_c számával, ahol a c -függetlenség azt jelenti, hogy a digráf bármely f élét a szóbanforgó vágások közül legfeljebb $c(f)$ tartalmazza. ■*

A [19] dolgozatban (magyarul a [38] könyv függelékében) e tételre egy olyan konstruktív bizonyítás szerepel, amely erősen polinomiális algoritmust szolgáltat a minimális költségű kötés valamint a szóbanforgó maximális vágáspakolás meghatározására.

Kis kitérőként megemlítjük, hogy a 3.3.3. állításból adódik, hogy egy minimális kötés komplementere is kötés. Emiatt ha minden egyirányú vágásban van legalább két él, akkor van két diszjunkt kötés. Érdekes, hogy e könnyű tétel következő kézenfekvőnek látszó általánosítása mind a mai napig nyitott, már $k = 3$ -ra és síkgráfokra is:

3.3.5. sejtés (Woodall [54], 1978). *Ha egy digráfban minden egyirányú vágás legalább k élt tartalmaz, akkor létezik k diszjunkt kötés.*

3.4. Magasabb élösszefüggőségek

Következő célunk az, hogy Lovász leemelési tételének segítségével levezessük Robbins tételének Nash-Williams féle általánosítását. Utána megfogalmazzuk ennek gyökeres k -élösszefüggőségre vonatkozó ellenpárját, majd felvetjük egy lehetséges közös általánosítás kérdését is.

3.4.1. k -élösszefüggő irányítás

Természetesen vetődik fel a Robbins tétel következő általánosításának kérdése. Tegyük fel, hogy a városi közlekedés irányítói tartanak attól, hogy valamely út váratlan lezárása után már nem biztosított az erősen összefüggőség. Magyarán, egy olyan erősen összefüggő irányítást szeretnénk, amely akármely él elhagyása után is erősen összefüggő marad. Még általánosabban: a megirányított gráf akármely $k - 1$ élének elhagyása után is maradjon erősen összefüggő. A kérdés tehát az, hogy egy irányítatlan gráfnak mikor létezik k -élösszefüggő irányítása.

$2k$ -élösszefüggő gráfok előállítása

Robbins tételének második bizonyítása a 2 -élösszefüggő gráfok fűlfelbontásán alapult. Hogyan lehetne a $(2k)$ -élösszefüggő gráfokat előállítani? Lovász 2.1.3 teljes leemelési tétele szerint $K \geq 2$ -re egy K -élösszefüggő gráf bármely páros fokú csúcsánál van olyan teljes leemelés, amely K -élösszefüggő gráfot eredményez. A teljes leemelés inverz művelete a következő: válasszunk ki tetszőlegesen j meglévő élt, mindegyiket osszuk fel egy ponttal, és egyesítsük a j osztás-pontot egyetlen új ponttá. E műveletre úgy hivatkozunk, hogy **összecsípjünk** j élt (egy új ponttal).

Könnyű igazolni, hogy egy $2k$ -élösszefüggő gráf bármely k élének összecsínpése $2k$ -élösszefüggő gráfot eredményez. Eszerint $2k$ -élösszefüggő gráfoknak egy lehetséges gyártási módja, hogy egy pontból kiindulva egymás után a meglévő gráfhoz élt adunk hozzá vagy k élt összecsípjük. Valójában minden $2k$ -élösszefüggő gráf így előállítható, amint ez Lovász 2.1.3 leemelési tételéből és abból az egyszerűen igazolható megfigyelésből könnyen kiolvasható, hogy minden legalább két pontú, él-elhagyásra nézve minimális K -élösszefüggő gráfnak van K -ad fokú pontja ($K \geq 1$).

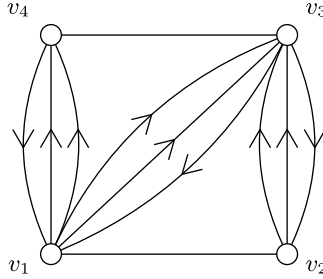
3.4.1. tétel (Lovász, 1979). *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf akkor és csak akkor $2k$ -élösszefüggő, ha egy pontból kiindulva felépíthető az alábbi két művelet egymás utáni ismételt alkalmazásával.*

- (A) *Két létező pontot kössünk össze új éllel.*
- (B) *Csípjünk össze k meglévő élt egy új ponttal.*

Miután az összecsípzési művelet egy irányított gráf k -élösszefüggőségét is megőrzi, rögtön kiadódik Nash-Williams irányítási tétele.

3.4.2. tétel (Nash-Williams gyenge irányítási tétele, 1960). *A G irányítatlan gráf éleit akkor és csak akkor lehet úgy irányítani, hogy a kapott irányított gráf k -élösszefüggő legyen, ha G $2k$ -élösszefüggő.*

A Nash-Williams féle irányítási tétel és a 3.1.2. tétel természetesen kínálkozó közös általánosítása $k \geq 2$ -re **nem érvényes**: Egy $D = (V, A)$ irányított és $G = (V, E)$ irányítatlan gráfból álló $H = (V, A + E)$ vegyes gráfban az E elemei akkor és csak akkor irányíthatók úgy, hogy k -élösszefüggő digráfot kapjunk, ha minden $X \subset V$ halmazra $d_G(X) \geq (k - \varrho_D(X))^+ + (k - \delta_D(X))^+$ (ahol egy x számra x^+ az x és a 0 maximumát jelöli). Ellenpéldaként tekintsük a $k = 2$ esetben azt a $H = (V, A + E)$ vegyes gráfot, ahol $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{v_1v_2, v_3v_4\}$, míg A -ban 9 irányított él van: két párhuzamos v_1v_4 él, egy v_4v_1 él, két párhuzamos v_1v_3 él, egy v_3v_1 él, végül két párhuzamos v_2v_3 él, egy v_3v_2 él. egyszerű esetszétválasztás mutatja, hogy a két irányítatlan v_1v_2, v_3v_4 élnek nem lehet úgy irányítást adni, hogy 2-élösszefüggő digráfot kapjunk, bár az állításban szereplő feltétel teljesül. Ráadásul, a példából nem is igen olvasható ki az irányíthatósághoz szükséges további feltétel. (Lásd a 2. ábrát.)



2. ábra

Megfogalmazható tehát a kérdés, hogy mi egy vegyes gráf k -élösszefüggő irányításának a feltétele. A választ a dolgozat II. részére halasztjuk, mert a szubmoduláris áramok elméletét igényli. Hasonlóképp, tekinthetjük a k -élösszefüggőségre vonatkozó optimális átírási problémát. Ezt a $k = 1$ esetben már említettük, az általános esetben itt is a szubmoduláris áramok segítenek majd.

3.4.2. Fokszám-korlátos k -élösszefüggő irányítások

Nem csak a Robbins tétel, hanem a fokszám-korlátos erősen összefüggő irányításra vonatkozó 3.2.1. tétel is kiterjeszthető k -élösszefüggő irányításokra. Valójában ez az eredmény egy jóval általánosabb tétel következményeként adódik.

3.4.3. tétel. Legyen adott $f : V \rightarrow \mathbf{Z}_+$ és $g : V \rightarrow \mathbf{Z}_+$ két függvény, melyekre feltesszük, hogy minden v csúcsra $k \leq f(v) \leq g(v) \leq d_G(v)$. Legyen a $G = (V, E)$ gráf $2k$ -élösszefüggő. G -nek akkor és csak akkor létezik olyan k -élösszefüggő irányítása, (i) amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha V minden $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \dots, V_r\}$ partíciójára

$$(3.16) \quad i(V_0) + e(\mathcal{P}) \geq f(V_0) + kr,$$

(ii) amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha V minden $\mathcal{P} = \{V_0, V_1, \dots, V_r\}$ partíciójára

$$(3.17) \quad e(V_0) - e(\mathcal{P}) \leq g(V_0) - kr,$$

(iii) amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind (3.16), mind (3.17) fennáll.

3.4.3. Gyökeresen k -élösszefüggő irányítás

Mikor létezik egy gráfnak gyökeresen k -élösszefüggő irányítása, azaz olyan, amelyben egy megadott s gyökérpontból minden pontba vezet k élidegen út? A természetes szükséges feltétel, hogy a gráf maga k -élösszefüggő legyen csak a $k = 1$ esetben elegendő, mert például $k = 2$ -re egy háromszögnek nincs olyan irányítása, amelyben az egyik pontjából mindkét másikba vezet 2 élidegen út. Egy gyökeresen k -élösszefüggő irányítás esetén a gyökértől eltekintve minden csúcs befoka legalább k vagyis egy ilyen gráfnak legalább $k(n - 1)$ éle van. Azonban ezen két szükséges feltétel még együtt sem elegendő. Meg kell ugyanis követelnünk a csúcsok minden t -részes nemüres halmazokba történő $\mathcal{F}$ partíciójára, hogy a különböző részeket összekötő ún. keresztélek száma is legalább $k(t - 1)$ legyen. Egy ilyen gráfot **k -partíció összefüggő**nek nevezünk.

3.4.4. tétel [16]. Legyen a $G = (V, E)$ irányítatlan gráfnak s egy kijelölt pontja. Akkor és csak létezik G -nek gyökeresen k -élösszefüggő irányítása, ha G k -partíció-összefüggő, azaz

$$(3.18) \quad e(\mathcal{F}) \geq k(t - 1)$$

teljesül V minden $\mathcal{F} := \{V_1, \dots, V_t\}$ partíciójára, ahol $e(\mathcal{F})$ a keresztélek száma.

A bizonyítás érdekessége, hogy a foksám-korlátozott irányításoknál már jól bevált útfordítási technikát használja, némileg bonyolultabb körülmények között. Ugyanezzel a módszerrel igazolható a foksám-korlátot és a gyökeres k -élösszefüggőségi előírást ötvöző irányítási tétel, melynek megfogalmazásához használjuk a V ponthalmaz X részhalmazain értelmezett ε_k függvényt:

$$\varepsilon_k(X) = k, \text{ ha } s \notin X, \text{ míg } \varepsilon_k(X) = 0, \text{ ha } s \in X.$$

3.4.5. tétel. A $G = (V, E)$ gráfnak legyen s egy kitüntetett gyökérpontja. Legyen továbbá $f : V \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{-\infty\}$ és $g : V \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ két függvény, melyekre $0 \leq f(v) \leq g(v) \leq d_G(v)$ minden $v \in V$ pontra. G -nek akkor és csak létezik olyan gyökeresen k -élösszefüggő irányítása,

(i) amelyben $\varrho(v) \geq f(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha

$$(3.19) \quad e(\mathcal{F}) \geq f(V_0) + \sum_{i=1}^t \varepsilon_k(V_i)$$

teljesül V minden olyan $\mathcal{F} := \{V_0, V_1, \dots, V_t\}$ partíciójára, ahol egyedül a V_0 rész lehet üres.

(ii) amelyben $\varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha G k -partíció-összefüggő és

$$(3.20) \quad g(X) \geq i(X) + \varepsilon_k(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.}$$

(iii) amelyben $f(v) \leq \varrho(v) \leq g(v)$ minden v csúcsra fennáll, ha mind (3.19), mind (3.20) fennáll. ■

Megjegyzendő azonban, hogy [16]-ban a 3.4.4. tétel egy általánosabb, vegyes gráfokra vonatkozó alakja szerepelt, amelynek bizonyítása az útfordítós módszernél összetettebb technikát igényel. Ezt az alakot a II. részben fogalmazzuk majd meg.

3.4.4. Közös általánosítás?

Nem lehetne-e a Nash-Williams féle 3.4.2 és a 3.4.4 irányítási tételeknek közös általánosítását találni? Legyen $0 \leq l \leq k$ két egész. Azt mondjuk, hogy egy irányított gráf (k, l) -**élösszefüggő**, ha valamelyik s pontja olyan, hogy onnan minden más pontba vezet k élidegen út és minden más pontból s -be vezet l élidegen út. Az $l = 0$ speciális esetben visszajutunk a gyökeresen k -élösszefüggő digráf fogalmához, míg $k = l$ eset a k -élösszefüggőségnek felel meg. Kérdés, hogy mikor létezik egy gráfnak (k, l) -élösszefüggő irányítása?

Megjegyzendő, hogy ha egy s -re nézve (k, l) -élösszefüggő irányításban veszünk $(k - l)$ élidegen ss' -utat és ezek irányítását megfordítjuk, akkor egy s' -re nézve (k, l) -élösszefüggő irányítást kapunk. Így az s pont kiválasztásának nincs szerepe. A 3.4.4. tételben szereplő partíciós feltétel kézenfekvő általánosításaként megállapítható szükséges feltétel, hogy a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf pontjainak minden $t \geq 2$ részes partíciójára a kerestélek száma legalább $k(t - 1) + l$, hiszen a G egy (k, l) -élösszefüggő irányítása esetén az s -t tartalmazó partíció részbe legalább l él lép be, míg a többi $t - 1$ -be legalább k . Nevezzünk egy ilyen irányítatlan gráfot (k, l) -**partíció összefüggőnek**.

A II. részben meg fogjuk vizsgálni, hogy egy gráf (k, l) -partíció összefüggősége vajon már elegendő-e a (k, l) -élösszefüggő irányítás létezéséhez.

4. Pakolás és fedés fenyőkkel és fákkal

A Menger tétel élváltozata arra adott választ, hogy mikor lehet egy gráf vagy digráf élhalmazát k részre bontani úgy, hogy mindegyik rész tartalmazzon st -utat, magyarul, hogy mikor létezik k élidegen st -út. Természetes ugyanezt a kérdést más összefüggőségi fogalmakkal kapcsolatban is feltehetjük: egy G irányítatlan gráf élhalmaza például mikor bontható fel k darab összefüggő (V -t feszítő) részre, más szóval mikor létezik G -ben k élidegen feszítő fa? Vagy egy digráfban mikor létezik k élidegen feszítő fenyő? A pakolási probléma ellenpárja a fedési feladat. Például, mikor fedhető le egy gráf élhalmaza k fával?

Ebben a fejezetben e két kapcsolódó kérdéskört vizsgáljuk meg.

4.1. Gyökeresen k -élösszefüggő digráfok előállítása

Nash-Williams irányítási tételének bizonyítása azon múlt, hogy Lovász 2.1.3 irányítatlan leemelési tétele segítségével meg lehetett adni a $2k$ -élösszefüggő gráfok előállítását. Hasonló jó szolgálatokat tesz Mader irányított 2.1.6 leemelési tétele gyökeresen k -élösszefüggő digráfok előállítására.

Ha egy $D = (V, A)$ digráf minden pontja irányított úton elérhető egy kijelölt s gyökérpontjából, akkor D tartalmaz s gyökerű feszítő fenyőt és így D felépíthető

s -ből kiindulva élek egymás utáni hozzávételével úgy, hogy minden új élnek a töve meglévő csúcs. Hogyan építhetők fel a gyökeresen k -élösszefüggő digráfok? Emlékeztetünk, hogy egy digráf akkor gyökeresen k -élösszefüggő, ha

$$(4.1) \quad \varrho(X) \geq k \text{ minden nemüres } X \subseteq V - s \text{ halmazra,}$$

ami Menger tétel alapján azzal ekvivalens, hogy s -ből minden csúcsba vezet k élidegen út. Hasznosnak bizonyul a következő egyszerű megfigyelés.

4.1.1. állítás. *Tegyük fel, hogy egy $D = (V, A)$ digráfban $(*)$ egy s gyökérből egy $U \subseteq V - s$ halmaz minden pontjába vezet k élidegen út. Ha valamely $t \in U$ csúcsra $\varrho(t) > k$, akkor az egyik t -be lépő él kihagyható a $(*)$ tulajdonság elrontása nélkül.*

Mader irányított leemelésekre vonatkozó 2.1.6. tétele felhasználható gyökeres k -élösszefüggést megőrző leemelésre is.

4.1.2. tétel. *Legyen $D = (U + z, A)$ olyan digráf, amelynek egy kijelölt $s \in U$ gyökércsúcsából U minden pontjába vezet k élidegen út, és tegyük fel, hogy $\varrho_D(z) \geq \delta_D(z)$. Ekkor a z -ből kilépő éleket párba lehet alkalmas $\delta_D(z)$ darab z -be belépő éllel úgy, hogy e párokat egyszerre leemelve és a fennmaradó $\varrho_D(z) - \delta_D(z)$ z -be lépő élt pedig kihagyva gyökeresen k -élösszefüggő digráftól kapunk az U csúcshalmazon.*

Ezeket összetéve megkapjuk a keresett előállítást:

4.1.3. tétel. *Egy D digráf akkor és csak akkor gyökeresen k -élösszefüggő s -re nézve ($k \geq 1$), ha előállítható az s -ből kiindulva az alábbi három művelet egymás utáni ismételt alkalmazásával.*

- (B1) *Két létező pontot kössünk össze egy irányított éllel.*
- (B2) *Adjunk a digráfhoz egy új pontot és vezessünk bele k (esetleg párhuzamos) új élt.*
- (B3) *Csípjünk össze j meglévő élt ($0 < j < k$) egy új z ponttal, és adjunk a digráfhoz $k - j$ darab z -be vezető (esetleg párhuzamos) új élt.*

4.2. Fenyők pakolása

4.2.1. Közös gyökerű fenyők pakolása

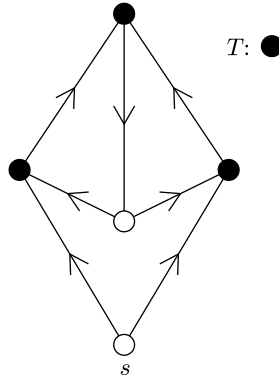
Nevezzünk egy $D = (V, A)$ digráftól k -**fenyő-összefüggő**nek valamely $s \in V$ gyökérpontjára nézve, ha D tartalmaz k élidegen s -gyökerű feszítő fenyőt. Egyszerű megfontolással adódik az alábbi megfigyelés.

4.2.1. állítás. *A 4.1.3. tételben szereplő (B1), (B2), (B3) műveletek megőrzik egy digráf k -fenyő-összefüggőségét.*

Az 4.1.3. tételből az állítás segítségével rögtön megkapjuk Edmonds alapvető tételét.

4.2.2. tétel (Edmonds: gyenge alak, 1973). *Ha egy $D = (U, A)$ digráf valamely s gyökére nézve k -élösszefüggő, úgy tartalmaz k élidegen s -gyökerű feszítő fenyőt.*

Mi történik, ha egy adott $T \subseteq V - s$ terminál halmazhoz keresünk k élidegen s -fenyőt, melyek mindegyike tartalmazza T minden pontját? Ehhez a $\varrho(X) \geq k$ egyenlőtlenséget nyilván minden T -t metsző $X \subseteq V - s$ halmazra meg kell követelni, és ez a feltétel a két szélső esetben, amikor $|T| = 1$, illetve $T = V - s$ elegendő is Menger, illetve Edmonds tételei alapján. Lovász példája mutatja, hogy általános T -re a vágás feltétel már $k = 2$ -re sem elegendő (3. ábra).



3. ábra

Ez persze nem meglepő annak fényében, hogy két élidegen, T -t fedő s -fenyő létezésének kérdése NP -teljes, ugyanis a két élidegen út NP -teljes problémája egyszerűen visszavezethető rá. A 4.2.2. tétel fenti (leemelős) bizonyítási gondolatmenetének továbbfejlesztésével [2]-ben az Edmonds alábbi kiterjesztése mégiscsak lehetővé vált.

4.2.3. tétel (Bang-Jensen, Frank, Jackson, 1995). *Tegyük fel, hogy egy $D = (V, A)$ digráf valamely s gyökérpontjára és csúcsainak egy s -t nem tartalmazó $T \subset V$ részhalmazára nézve k -szor (s, T) -élösszefüggő, azaz létezik s -ből T minden pontjába k -élidegen út. Tegyük fel, hogy minden $v \in V - T - s$ csúcsra $\varrho(v) \geq \delta(v)$. Ekkor létezik k élidegen s -gyökerű fenyő, melyek mindegyike tartalmazza az egész T -t.*

Részpakolások folytatása

Edmonds valójában azt az általánosabb kérdést vizsgálta, amelyben a digráf csúcsainak adott k nemüres részhalmazáról kívánjuk eldönteni, hogy vajon k élidegen feszítő fenyves gyökér-halmaza-e. (Egy irányított erdőt akkor neveztünk fenyvesnek, ha minden pont befoka legfeljebb egy, azaz ha az erdő minden komponense fenyő. A 0 befokú pontok halmazát a fenyves **gyökér-halmazának** nevezzük. Egy $D = (V, A)$ irányított gráf **feszítő fenyvesén** olyan fenyvest értünk, amelynek pontthalmaza V , míg élhalmaza az A -nak része.)

Amikor mind a k halmaz az egypontú $\{s\}$, akkor kapjuk vissza a közös gyökerű feszítő fenyők problémáját. Kicsit szemléletesebb azonban ezt a fenyves-pakolási kérdést abban az ekvivalens alakban megfogalmazni, amelyben k darab előre adott élidegen s -gyökerű részfenyőt élidegen feszítő s -fenyökké kiegészíteni. Ezt válaszolja meg az Edmonds tétel erős alakja.

4.2.4. tétel (Edmonds: erős alak, 1973). *A $D = (V, A)$ irányított gráfnak legyen s kijelölt gyökérpontja. Adott $F_1, \dots, F_k$ élidegen s -gyökerű D -beli fenyőt (melyek élhalmaza lehet üres, de mindegyikük ponthalmaza tartalmazza s -t) akkor és csak akkor lehet D -ben k páronként élidegen s -gyökerű feszítő fenyővé kiegészíteni, ha*

$$(4.2) \quad \varrho'(X) \geq p(X) \text{ teljesül minden } \emptyset \neq X \subseteq V - s \text{ halmazra,}$$

ahol $\varrho'(X)$ jelöli az X -be lépő, az F_i -k által nem használt élek számát, míg $p(X)$ jelöli azon F_i fenyők számát, amelyekre $V(F_i) \cap X = \emptyset$.

A tételre Lovász [40] adott rövid, egyszerű bizonyítást, amely ráadásul, egy maximális folyamat kiszámító algoritmusra támaszkodva polinomiális algoritmussá alakítható. Edmonds az erős alakot valójában az alábbi ekvivalens formában igazolta.

4.2.5. tétel. *A $D = (V, A)$ irányított gráfban legyen $R_1, \dots, R_k$ a pontoknak k (nem feltétlenül diszjunkt, vagy különböző) részhalmaza. Akkor és csak akkor létezik D -nek k élidegen feszítő fenyvese, melyek gyökér-halmaza rendre $R_1, \dots, R_k$, ha bármely $\emptyset \neq Z \subseteq V$ részhalmazra a $\varrho(Z)$ befok legalább azon R_i halmazok száma, melyek diszjunktak Z -től.*

Mi történik, ha nem részfenyőket akarunk élidegen módon feszítő s -fenyökké kiterjeszteni, hanem fenyveseket? A legegyszerűbb, $k = 1$ esetben könnyen belátható a következő tétel.

4.2.6. tétel. *Tegyük fel, hogy a $D = (V, A)$ digráfban van s gyökerű feszítő fenyő és s -be nem lép él. A digráf egy (V, B) fenyvese akkor és csak akkor egészíthető ki s gyökerű feszítő fenyővé, ha nincsen olyan $Z \subseteq V - s$ részhalmaz, amelybe egyrészt B -beli él nem lép be, másrészt minden Z -be lépő uv élre v -be lép B -beli él.*

Egyetlen fenyves kiegészítése fenyővé tehát könnyű feladat. Ha azonban egy helyett kettő fenyvest akarunk élidegen módon egy-egy s gyökerű feszítő fenyővé kiegészíteni, akkor a probléma NP-teljessé válik már abban az igen egyszerűen hangzó speciális esetben is, amikor az egyik fenyvesnek egyáltalán nincs éle és a másiknak is csak kettő van. Ennek segítségével ugyanis meg lehet oldani az irányított gráfra vonatkozó két élidegen út problémáját, amiről ismeretes, hogy NP-teljes, és ami abból áll, hogy egy digráfban s_i -ből t_i -be keresünk egy-egy élidegen utat ($i = 1, 2$). A visszavezetés érdekében adjunk a digráfhoz egy új s pontot, egy új t pontot, s -ből s_i -be egy élt, t_i -ből t -be egy élt ($i = 1, 2$), végül t -ből minden pontba két párhuzamos élt. Álljon F_1 az ss_1, t_1t élekből, míg F_2 -nek nincs éle és egyetlen pontja s . Könnyen ellenőrizhető, hogy a kibővített digráfban akkor és csak akkor

van két olyan élidegen s -gyökerű feszítő fenyő, melyek egyike tartalmazza F_1 -t, másika pedig F_2 -t, ha az eredeti digráfban létezik egy-egy élidegen út s_1 -ből t_1 -be, illetve s_2 -ből t_2 -be. Vagyis ha a fenyves kiegészítési problémát meg tudnánk polinom időben oldani, akkor a két élidegen út NP-teljes problémáját is.

Alkalmazás: élidegen utak

Edmonds tételéből rögtön kiolvasható az alábbi:

4.2.7. következmény. *Legyenek $\{s_i, t_i\}$ pontpárok egy k -élösszefüggő D digráfban. Ekkor léteznek élidegen $s_i t_i$ -utak ($i = 1, 2, \dots, k$).*

Megjegyzendő, hogy a Következmény nem jön ki Menger tételéből.

4.2.2. Diszjunkt fák irányítatlan gráfban

A 3.4.4 irányítási tételt Edmonds 4.2.2. tételével összerakva, rögtön megkapjuk Tutte nevezetes tételét diszjunkt fák létezéséről.

4.2.8. tétel (Tutte, 1961). *Egy irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fa, ha G k -partíció-összefüggő, azaz $e(\mathcal{F}) \geq k(t-1)$ teljesül V minden $\mathcal{F} := \{V_1, \dots, V_t\}$ partíciójára. ■*

Megjegyezzük, hogy e tétel maga után vonja a 3.4.4 irányítási tételt, hiszen a k fát külön-külön könnyen megirányíthatjuk gyökeres fenyővé. Ugyanakkor Tutte tételének eredeti bizonyítása nehezebb, mint a fenti megközelítés, amely a fordított utat járta be: sem Edmonds diszjunkt fenyő tétele, sem pedig a 3.4.4 irányítási tétel bizonyítása nem különösképp nehéz. Miután mindkét tétel bizonyítása algoritmikus, ez a megközelítés egyúttal algoritmust is jelent a k élidegen feszítő fa, illetve az ezek nem-létezését igazoló hiányos partíció megkonstruálására.

Az a feladat, hogy miként lehet egy olyan minimális költségű részgráfot megtalálni, amely tartalmaz k élidegen feszítő fát, már matroidokat igényel, melyek segítségével ráadásul a következő még általánosabb probléma is kezelhetővé válik. Ha a gráf élhalmazán adottak a $c_1, \dots, c_k$ költségfüggvény, hogyan lehet $F_1, \dots, F_k$ élidegen feszítő fákat megkeresni úgy, hogy a $\sum c_i(F_i)$ össz-költség minimális legyen?

4.2.3. Szabad gyökerű fenyők pakolása

Mi a helyzet, ha a fenyők gyökerei nincsenek előre rögzítve, azaz mikor létezik a digráfban k élidegen feszítő fenyő? A kérdést általánosabb formában a [16] dolgozat válaszolta meg.

4.2.9. tétel. *Legyenek adottak $f : U \rightarrow \mathbf{Z}_+$ alsó és $g : U \rightarrow \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$ felső korlátok, melyekre $f \leq g$. Egy $D = (U, A)$ irányított gráfban akkor és csak akkor létezik*

k páronként élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs közülük legalább $f(v)$ -nek és legfeljebb $g(v)$ -nek a gyökere, ha

$$(4.3) \quad f(U) \leq k,$$

$$(4.4) \quad \sum_{i=1}^t \varrho_D(X_i) \geq k(t-1) + f(X_0)$$

fennáll U minden olyan $\{X_0, X_1, \dots, X_t\}$ partíciójára, amelyben csak X_0 lehet üres, és

$$(4.5) \quad g(X) \geq k - \varrho_D(X) \text{ minden } X\text{-re, } \emptyset \subset X \subseteq U.$$

4.2.10. következmény. Egy $D = (U, A)$ digráfban akkor és csak akkor létezik k élidegen feszítő fenyő, ha U minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ rész-partíciójára $\sum_{i=1}^t \varrho_D(X_i) \geq k(t-1)$. ■

A lánctulajdonság

A 4.2.9. tételből kiolvashatóan fenyőpakolásokra is érvényes a lánctulajdonság.

4.2.11. következmény. Ha a $D = (U, A)$ digráfban létezik k élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs legfeljebb $g(v)$ -nek gyökere, továbbá létezik k élidegen feszítő fenyő úgy, hogy mindegyik v csúcs legalább $f(v)$ -nek gyökere, akkor úgy is létezik k élidegen feszítő fenyő, hogy mindegyik v csúcs legalább $f(v)$ -nek és legfeljebb $g(v)$ -nek gyökere. ■

4.3. Fedések

Az Edmonds-tételből egyszerű konstrukció révén kapjuk a következőt.

4.3.1. tétel. A $D = (V, A)$ digráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k fenyvessel, ha (i) minden pont befoka legfeljebb k , és (ii) $i(X) \leq k(|X| - 1)$ teljesül minden $X \subseteq V$ halmazra, ahol $i(X)$ jelöli az X által feszített élek számát.

Érdekes az alábbi következmény.

4.3.2. következmény. Ha egy párhuzamos élt és hurkot nem tartalmazó digráfban minden pont befoka legfeljebb K , akkor az élhalmaz lefedhető $K + 1$ fenyvessel.

4.3.1. Fedés fákkal

Az irányítások hasznát jól szemlélteti az alábbi irányítatlan gráfokra vonatkozó nevezetes tétel bizonyítása.

4.3.3. tétel (Nash-Williams, 1964). Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf élhalmaza akkor és csak akkor fedhető le k erdővel, ha minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ részalmazra

$$(4.6) \quad i_G(X) \leq k(|X| - 1).$$

Bizonyítás. A 3.1.7. tétel szerint $G = (V, E)$ -nek akkor és csak akkor van olyan irányítása, amelyben minden pont befoka legfeljebb k , ha $i_G(X) \leq k|X|$ teljesül minden $X \subseteq V$ -re. Így a tétel feltételéből következik ilyen irányítás létezése, és ezért a 4.3.1. tételt alkalmazhatjuk. ■

Tehát Nash-Williams tételének bizonyításához szükségünk volt az 4.3.1. tételre, ami az Edmonds féle diszjunkt fenyő tétel közvetlen folyománya volt és a Hakimi féle irányítási tételre.

Érvényes a Nash-Williams-tétel alábbi általánosítása.

4.3.4. tétel. Egy $G = (V, E)$ összefüggő irányítatlan gráfban adott k darab részfa: $T_1 = (V_1, F_1), \dots, T_k = (V_k, F_k)$, melyek F_i élhalmaza lehet üres, de a V_i csúcshalmaz nem. Jelölje $F := \cup F_i$. A T_i fákat akkor és csak akkor lehet kiegészíteni $E - F$ éleiből olyan feszítő fákká, melyek uniója E , ha minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ részalmazra

$$(4.7) \quad i_{E-F}(X) \leq \sum b_i(X),$$

ahol $b_i(X) := |X - V_i|$, ha $X \cap V_i \neq \emptyset$ és $b_i(X) := |X| - 1$, ha $X \cap V_i = \emptyset$, vagyis a $b_i(X)$ szám azt mutatja, hogy a T_i fa egy kiegészítése maximum hány X által feszített $E - F$ -beli élt tartalmazhat.

4.3.2. Fedés fenyőkkel

Vizsgáljuk meg, mi a helyzet, ha fenyők pakolása helyett a fenyőkkel fedni szeretnénk az éleket. Egy $D = (V, A)$ digráf pontjainak bármely $X \subseteq V$ részalmazához jelölje $B(X) := \{v \in X: \text{létezik olyan } uv \in A \text{ él, amelyre } u \in V - X\}$ az X halmaz **bejáratát**. Ez tehát azon X -beli pontokból áll, melyekbe vezet X -en kívülről él. A következő eredmény, amely az Edmonds tétel egyfajta fedési ellenpárjának tekinthető, egyszerű konstrukció segítségével levezethető az Edmonds tételből.

4.3.5. tétel (Vidyasankar, 1978). Legyen s a $D = (V, A)$ digráf egy kijelölt pontja, amibe nem lép be él. D éleit akkor és csak akkor lehet k darab s -gyökerű feszítő fenyővel lefedni, ha (i) minden $v \in V - s$ pontra $\varrho(v) \leq k$, és (ii) minden $X \subseteq V - s$ halmazra

$$(4.8) \quad k - \varrho(X) \leq \sum [k - \varrho(v) : v \in B(X)],$$

ahol $B(X)$ az X bejáratát jelöli.

5. Összefüggőségi tulajdonságok kialakítása és megőrzése

5.1. Növelési és részgráf problémák kapcsolata

A részgráf problémában egy adott tulajdonságú (például összefüggő) gráf minimális ilyen részgrádját kerestük. A növelési problémában a kiindulási gráfnak nincs meg a kívánt tulajdonsága és bizonyos műveletek segítségével szeretnénk elérni, hogy meglegyen. Ez a művelet lehet egy új él (vagy csúcs, esetleg hiperél) hozzáadása, de egyéb műveletek is érdekesek: például élösszefüggőség esetén két csúcs összehúzása vagy egy irányított él irányának a megfordítása.

A növelési és részgráf problémák szoros kapcsolatban vannak egymással. Tegyük például fel, hogy a növelési problémában egy $G = (V, E)$ nem összefüggő gráfot szeretnénk azzá tenni minimális össz-költségű új él hozzávételével. Jelölje a lehetséges új élek grádját $H = (V, F)$ (amelyre $(V, E + F)$ összefüggő) és legyen $c : F \rightarrow \mathbf{R}$ a költségfüggvény. A megoldás egyszerű: terjesszük ki a c költségfüggvényt a $G + H$ gráfra úgy, hogy minden E -beli e élen $c(e) = 0$, majd a Kruskal algoritmussal keressünk $G + H$ -ban minimális költségű feszítő fát. Ennek H -beli élei definiálják a keresett minimális növelő élhalmazt.

Ez a fajta visszavezetés minden olyan esetben működik, amikor a minimális költségű részgráf probléma kezelhető. Így például az 1.5. szakaszban ismertetett Ford-Fulkerson féle költséges folyamalgoritmus segítségével algoritmikusan megoldható az a növelési probléma, amikor a digráfban nincsen k élidegen st -út, és minimális össz-költségű új él hozzávételével szeretnénk elérni, hogy legyen. (A speciális $k = 1$ esetben elég Dijkstra algoritmusa.) Analóg módon, az 1.2.2. szakaszban vázolt Chu és Liu féle algoritmus minimális költségű feszítő s -fenyő kiszámítására használható a minimális költségű növelés megoldására, ha a megnövelt digráfban minden csúcs s -ből való elérhetősége az elérendő cél.

Megfordítva is, amennyiben egy minimális költségű növelési probléma megoldható, akkor egy G gráf minimális költségű részgrádjának problémája is, hiszen ez utóbbi felfogható úgy, hogy az élmentes gráfot akarjuk növelni G éleinek felhasználásával.

Ez az ekvivalencia abban az értelemben áll fenn, hogy a részgráf feladat pontosan akkor oldható meg minden nemnegatív költségfüggvényre, amikor a megfelelő növelési feladat. Kiderül azonban, hogy vannak olyan tulajdonságok is, amikor az optimális részgráf probléma NP-teljes, míg a megfelelő növelési feladat szépen kezelhető, legalábbis szabad növelések esetén. Akkor beszélünk **szabad** növelésről, ha a kiindulási (di)gráfhoz a csúcshalmazának bármely két pontját összekötő él, akárhány példányban a (di)gráfhoz adható, továbbá minden él költsége egy.

5.2. Globális élösszefüggőség irányítatlan gráfban

Tekintsük azt a növelési problémát, amelyben a kiindulási $G = (V, E)$ gráfot k -élösszefüggővé akarjuk tenni ($k \geq 2$) egy $H = (V, F)$ gráfból választott minimális össz-költségű új él hozzávételével. Kezdjük a $k = 2$ speciális esettel.

5.2.1. 2-élösszefüggővé növelés

Igazolható, hogy a feladat NP-teljes már abban a speciális esetben is, amikor G fa és a költségfüggvény H élein azonosan 1, vagyis amikor egy (V, E) fát kell minimális számú H -beli él hozzáadásával 2-élösszefüggővé tenni. Ugyanakkor Eswaran és Tarjan [13] kimutatta, hogy szabad növelés esetén tetszőleges kiindulási gráfra a minimális élszámú 2-élösszefüggővé növelés problémája megoldható. A G gráf pontjainak egy nemüres U részhalmazát nevezzük **2-tömör**nek, ha U 2-élösszefüggő gráfot feszít és az U foka kisebb, mint 2. Könnyen ellenőrizhető, hogy a 2-tömör halmazok páronként diszjunktak. Ezek közül jelölje t_0 a 0-fokúak számát (vagyis ez G azon komponenseinek száma, melyek 2-élösszefüggők), míg t_1 legyen az 1 fokú 2-tömör halmazok száma.

5.2.1. tétel (Eswaran és Tarjan, 1976). *Egy $G = (V, E)$ nem 2-élösszefüggő irányítatlan gráf 2-élösszefüggővé növeléséhez szükséges új élek minimális γ száma $t_0 + \lceil t_1/2 \rceil$.*

Bizonyítás. Ha egy 2-tömör halmazt összehúzzunk egy ponttá, akkor sem a t_0, t_1 értékek, sem a minimális γ nem változik, így feltehetjük, hogy minden 2-tömör halmaz egypontú, azaz G erdő. Ekkor t_0 az erdő egypontú komponenseinek a számával egyenlő, míg t_1 az elsőfokú pontjainak számával.

Egy 2-élösszefüggő növelésben minden 0 fokú csúcs legalább 2 új éllel szomszédos és minden 1 fokú csúcs legalább 1-gyel, így legalább $t_0 + \lceil t_1/2 \rceil$ új élnek kell lennie.

Annak kimutatásához, hogy ennyi él elegendő is, tegyük fel először, hogy G nem összefüggő. Legyen u és v két legfeljebb első fokú pont, melyek nem egy komponensben vannak. Az uv élt a gráfhoz adva a megfelelő $t_0 + \lceil t_1/2 \rceil$ érték pontosan eggyel csökken, így indukcióval kész vagyunk.

Feltehetjük tehát, hogy G fa (és így $t_0 = 0$), melynek legalább 2 pontja van (és így $t_1 \geq 2$). Amennyiben $t_1 = 2$, úgy a fa egy út, melynek két végét egy új éllel összekötve 2-élösszefüggő gráfot kapunk. Ha $t_1 = 3$, úgy a fa egy pontból kiinduló 3 (amúgy diszjunkt) út, melyek $\{a, b, c\}$ végpontjai közé betéve az ab és ac új éleket 2-élösszefüggő gráfot kapunk.

Így tehát $t_1 \geq 4$. Ekkor a fában van olyan P út, amely két első fokú pontot köt össze és P -ből legalább két él lép ki (például egy legalább negyedfokú ponton átmenő maximális, vagy két harmadfokú ponton átmenő maximális út megteszi.) A fához adva az út két végpontját összekötő élt a t_0 érték továbbra is 0 marad, míg a t_1 érték kettővel csökken, hiszen a keletkező C kör biztosan nem lesz 2-tömör, mert P választása miatt a foka legalább 2. Vagyis a $t_0 + \lceil t_1/2 \rceil$ szám az él hozzáadásával eggyel csökken és indukcióval kész vagyunk. ■

5.2.2. k -élösszefüggővé növelés

Miként általánosítható a fenti eredmény, ha a növeléssel magasabb élösszefüggőség elérése a cél? Bár az 5.2.1. tétel bizonyítása igazán egyszerű, ahhoz azonban

némileg vacakolós, hogy az általános k -élösszefüggőségre növelést ezen az úton kezelni lehessen. Ezért egy gyökeresen különböző megközelítésre van szükség. A trükk az, hogy a minimális növelési feladat közvetlen megoldása elé egy segédfeladatot iktatunk be, amelyben a növelő gráfnak a fokszámaait írjuk elő, és csak ezt követően nézzük meg, hogy miként lehet egy minimális realizálható foksza-sorozatot találni.

Fokszám-előírt növelés

Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és a $G = (V, E)$ irányítatlan gráf nem k -élösszefüggő. Adott az $m : V \rightarrow \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírás és egy olyan $H = (V, F)$ gráfot keresünk, melyre $G + H$ k -élösszefüggő és $d_H(v) = m(v)$ minden v csúcsra. A következő eredmény [20] azon az egyszerű, de hatékonynak bizonyuló észrevételen múlik, hogy a fokszám-előírt növelési probléma valójában ekvivalens Lovász 2.1.3 leemelési tételével.

5.2.2. tétel. *Adott $G = (V, E)$ gráf, $k \geq 2$ egész, és $m : V \rightarrow \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírás. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre $d_H(v) = m(v)$ teljesül minden $v \in V$ pontra és $G + H$ k -élösszefüggő, ha $m(V)$ páros és*

$$(5.1) \quad m(X) \geq k - d_G(X)$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazra, ahol $m(X) := \sum [m(v) : v \in X]$.

Minimális növelés

A kérdésre, hogy minimum hány él hozzávételével tehető egy gráf k -élösszefüggővé a választ Watanabe és Nakamura [53] adta meg. Ennek eredeti bizonyítása igen hosszadalmas, de az 5.2.2. tétel közbeiktatásával a tétel néhány sorban levezethető [20]. Nemüres diszjunkt halmazoknak egy rendszerét részpartíciónak neveztük.

5.2.3. tétel (Watanabe és Nakamura, 1987). *Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k -élösszefüggővé ($k \geq 2$), ha a pontok minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ részpartíciójára*

$$(5.2) \quad 2\gamma \geq \sum_i [k - d(X_i)].$$

Másszóval, azon élek minimális száma, melyeknek G -hez adása k -élösszefüggő gráfot eredményez, egyenlő a $\max \left[\sum_i (k - d(X_i)/2) \right]$ értékkel, ahol a maximum a V összes részpartíciójára megy.

Megjegyzendő, hogy Watanabe és Nakamura tétele $k = 1$ -re nem érvényes. A tétel bizonyítása [20]-ben egyúttal polinomiális algoritmust is szolgáltat a minimális növelés megkeresésére.

A k -élösszefüggőség általánosításaként a 3.4. szakaszban bevezettük a (k, l) -partíció-összefüggőség fogalmát ($0 \leq l \leq k$), ahol minden t -részes partíció keresztlelei számának kellett legalább $k(t - 1) + l$ -nek lennie. A minimális költségű (k, l) -partíció-összefüggő részgráf keresésének problémája az $l = 0$ esettől eltekintve NP-teljes. A $(k, 0)$ -partíció összefüggőség Tutte tétele nyomán épp a k élidegen fa létezésével ekvivalens.

Természetesen adódik a kérdés, hogy az $1 \leq l \leq k$ esetben legkevesebb hány új él hozzáadásával tehető egy gráf (k, l) -partíció összefüggővé. A válaszhoz általánosabb eszközök szükségesek, így azt a II. részre hagyjuk.

5.3. Lokális összefüggőség irányítatlan gráfban

Lovász leemelési tétele a k -összefüggőség megőrzéséről szólt, míg a Watanabe-Nakamura tétel az összefüggőség minimális számú éllel való növeléséről. Ezen eredményeket általánosíthatjuk arra az esetre, amikor az egyes pontpárok közötti „lokális” összefüggőségre más és más előírásunk lehet.

5.3.1. A lokális összefüggőség megőrzése

Legyen $G = (V + z, E)$ irányítatlan összefüggő gráf, amelyben $\lambda(u, v) = \lambda(u, v; G)$ jelöli az u, v pontpárt elválasztó minimális vágás elemszámát, ami Menger tétele alapján az u -t és v -t összekötő élidegen utak maximális száma. E számot az u és v **lokális összefüggőségének** hívják. Egy élpárt **leemelhetőnek** mondunk, ha a két él közös vége a z pont és leemelésük minden $u, v \in V$ pontpár lokális összefüggőségét megőrzi.

Mader [45] megadta, hogy mikor létezik leemelhető élpár. Feltesszük, hogy V -nek legalább két pontja van és z szomszédjai között a lokális összefüggőség legalább 2. Ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy:

$$(5.3) \quad \text{nincs } z\text{-ből induló elvágó él.}$$

5.3.1. tétel (Mader, 1978). *Legyen $G = (V + z, E)$ összefüggő irányítatlan gráf, amelyben $d(z) \neq 3$ és (5.3) teljesül. Ekkor létezik leemelhető élpár.*

A tételnek a következő ekvivalens alakjára viszonylag egyszerű bizonyítás található [25]-ben.

5.3.2. tétel (Mader). *Legyen $G = (V + z, E)$ összefüggő irányítatlan gráf, amelyben $d(z)$ páros és (5.3) teljesül. Ekkor a z -ből kiinduló élek $d(z)/2$ párba állíthatók úgy, hogy e párokat egymás után leemelve a lokális összefüggőségek nem csökkennek.*

5.3.2. A lokális összefüggés növelése

Mader tétele felhasználható a lokális összefüggőség optimális növelésére. E célból legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, $r(x, y)$ ($x, y \in V$) nemnegatív egészértékű függvény, amely szimmetrikus, azaz $r(x, y) = r(y, x)$. Adott továbbá egy $m : V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ függvény, amelyre $m(V)$ páros. Feltesszük, hogy

$$(5.4) \quad G\text{-nek nincsen olyan } C \text{ komponense, amelyre } m(C) = 1.$$

A következő eredmény lényegében Mader tételének átfogalmazása.

5.3.3. tétel. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (V, F)$ gráf, amelyre

$$(5.5) \quad d_H(v) = m(v)$$

minden $v \in V$ -re fennáll és

$$(5.6) \quad \lambda(x, y; G^+) \geq r(x, y)$$

teljesül minden x, y pontpárra, ahol $G^+ = G + H = (V, E \cup F)$, ha

$$(5.7) \quad m(X) \geq R_r(X) - d_G(X)$$

érvényes minden $X \subseteq V$ részhalmazra, ahol $R_r(X) := \max \{r(x, y) : x \in X, y \in V - X\}$.

Ebből levezethető a minimális élszámú növelésre vonatkozó tétel. Azt mondjuk, hogy a G gráf valamely C komponense **marginális** (r -re nézve), ha $R_r(C) \leq 1$.

5.3.4. tétel [20]. Tegyük fel G -nek nincs marginális komponense. Akkor és csak akkor létezik olyan legfeljebb γ élű $H = (V, F)$ gráf, amelyre $\lambda(x, y; G^+) \geq r(x, y)$ teljesül minden x, y pontpárra, ahol $G^+ = G + H = (V, E \cup F)$, ha

$$(5.8) \quad \sum [R_r(X_i) - d_G(X_i)] \leq 2\gamma$$

teljesül V minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ rész-partíciójára.

A bizonyítás gondolatmenetét jelentősen továbbfejlesztve Jordán és Szigeti [33] Mader tételének nagymértvű általánosítását adta.

5.3.5. tétel (Jordán és Szigeti). Legyen $G = (V + z, E)$ 2-élösszefüggő gráf, amelyben z egy kijelölt pont. Legyenek $d_1, \dots, d_p$ egészek ($p \geq 2$), melyekre $d_i \geq 2$ és $\sum d_i = d_G(z)$. Adott továbbá egy szimmetrikus $r(u, v)$ függvény ($u, v \in V$) a pontpárokon. A z csúcs pontosan akkor szedhető szét p csúcsba úgy, hogy a p csúcs foka rendre $d_1, \dots, d_p$, és a keletkező G' gráfban minden $\{u, v\}$ csúcspár lokális élösszefüggőségre $\lambda(u, v; G') \geq r(u, v)$, ha $r(u, v) \leq \lambda(u, v; G)$ és $\lambda(u, v; G - z) \geq r(u, v) - \sum_{i=1}^p \lfloor d_i/2 \rfloor$ minden $\{u, v\}$ csúcspárra érvényes.

5.4. Irányított gráfok összefüggőségének növelése

5.4.1. Erősen összefüggővé növelés

A $D = (V, A)$ irányított gráfot szeretnénk erősen összefüggővé tenni minimális összköltségű új él hozzávételével. Jelölje $H = (V, F)$ a lehetséges új élek digráfját, amelyről feltesszük, hogy $D + H = (V, A + F)$ erősen összefüggő, és legyen $c : F \rightarrow \mathbf{R}$ a költségfüggvény. A feladat NP-teljes már abban a speciális esetben is, amikor D -nek egyáltalán nincs éle és c azonosan 1, ilyenkor ugyanis az optimum értéke pontosan akkor n (a csúcsok száma), ha H tartalmaz Hamilton kört.

Van azonban két fontos speciális eset, amikor a minimális élszámú növelésre kerek válasz adható. Az elsőben bármilyen új él használható, a másodikban pedig H -ban csak olyan uv élek fordulhatnak elő, melyekre v -ből u elérhető D -ben. Ezen utóbbi kérdésre valójában Lucchesi és Younger 2.2.3. tétele már meg is adta a választ.

Szabad növelés

Egy digráf erősen összefüggő komponenseit egy pontra húzzuk, aciklikus digráfot kapunk. Egy erősen összefüggő komponensre azt mondjuk, hogy **forrás-komponens**, ha nem lép bele él és **nyelő-komponens**, ha nem lép ki belőle él. Az előbbieket számát jelölje c_f , az utóbbiakét c_n .

5.4.1. tétel (Eswaran és Tarjan, 1976). *Egy $D = (V, A)$ nem erősen összefüggő irányított gráf erősen összefüggővé növeléséhez szükséges új élek minimális γ száma $\max\{c_f, c_n\}$.*

Bizonyítás. Mivel minden forrás-komponensbe kell új élnek belépnie és minden nyelő-komponensből kell új élnek kilépnie, ezért $\gamma \geq c_f$ és $\gamma \geq c_n$. Egy erősen összefüggő komponens egy pontra húzásával sem a min sem a max értéke nem változik, így elég a tételt aciklikus digráfokra igazolni. Feltehető, hogy nincs izolált pont. Valóban egy v izolált pontot szétnyithatunk egy élle azaz helyettesíthetjük egy vv' irányított éllel, ahol v' új pont. Ezáltal sem a min, sem a max értéke nem változik.

Ha egy t nyelőpont nem érhető el valamely s forráspontból, akkor a digráf az új ts él hozzáadásával aciklikus marad, és mivel a max értéke eggyel csökkent, indukcióval készen vagyunk. Feltehetjük tehát, hogy minden nyelőpont elérhető minden forráspontból. Egyszerűbb jelölés végett legyen $k := c_f$ és $l = c_n$. Legyenek a forráspontok $s_1, \dots, s_k$, míg a nyelőpontok $t_1, \dots, t_l$. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $k \leq l$. Ekkor a digráfhoz adva az összesen l darab $t_1s_1, \dots, t_ls_k$ valamint a $t_{k+1}s_1, t_{k+2}s_1, \dots, t_ls_1$ élt erősen összefüggő digráfot kapunk. ■

5.4.2. k -élösszefüggővé növelés

Az általános k -élösszefüggőség növelési feladatban egy $D = (U, A)$ irányított gráfot szeretnénk minimális számú új él hozzáadásával k -élösszefüggővé tenni. A megoldáshoz az irányítatlan gráfoknál megadott utat követjük.

Fokszám-előírt növelés

Az alapészrevétel [20] az az egyszerű megfigyelés, hogy a fokszám-előírt irányított növelés problémája ekvivalens Mader 2.1.6 irányított leemelési tételével.

5.4.2. tétel. *Adott $D = (U, A)$ digráf és $m_{be} : U \rightarrow \mathbf{Z}_+$, $m_{ki} : U \rightarrow \mathbf{Z}_+$ fokszám-előírások. Akkor és csak akkor létezik olyan $H = (U, F)$ digráf, amelyre $\varrho_H(v) = m_{be}(v)$ és $\delta_H(v) = m_{ki}(v)$ teljesül minden $v \in U$ pontra és $D + H$ k -élösszefüggő, ha $m_{be}(U) = m_{ki}(U)$,*

$$(5.9) \quad m_{be}(X) \geq k - \varrho_D(X)$$

és

$$(5.10) \quad m_{\text{ki}}(X) \geq k - \delta_D(X)$$

teljesül minden $\emptyset \neq X \subset U$ részhalmazra.

Erre támaszkodva levezethető a minimális növelésre vonatkozó tétel.

5.4.3. tétel [20]. Egy $D = (U, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k -élösszefüggővé, ha a pontok minden $\{X_1, \dots, X_t\}$ rész-partíciójára

$$(5.11) \quad \gamma \geq \sum_i [k - \varrho(X_i)]$$

és

$$(5.12) \quad \gamma \geq \sum_i [k - \delta(X_i)].$$

A k -élösszefüggőség általánosításaként a 3.4. szakaszban bevezettük a (k, l) -élösszefüggőség fogalmát. Egy digráf (k, l) -élösszefüggővé növelésének kérdésére a választ a II. részben ismertetendő „absztrakt” növelési eredmény tartalmazza.

5.4.3. Lokális élösszefüggőség digráfban

Az irányítatlan esetben a szabad növelési problémát akkor is meg tudtuk oldani, amikor különböző pontpárookra eltérő összefüggőségi elvárások voltak kitűzve. Irányított gráfoknál rosszabb a helyzet. Ha például a digráf pontjainak adott két nemüres, S és T részhalmaza, érdeklődhetünk olyan minimális növelés iránt, amelyben T minden pontja elérhető S minden pontjából. Ez általánosítja az erősen összefüggővé tevést ($S = T = V$). Sajnos túlságosan is, mert a probléma már akkor is NP-teljes, ha $S = T$ vagy ha $|S| = 1$. Ugyanakkor, ha a növeléshez csak ST -éleket engedünk meg, akkor a problémának még az ST k -élösszefüggőségre vonatkozó általánosítása is jellemezhető. Egy (nem hurok) élre akkor mondjuk, hogy ST -él, ha a töve S -ben a feje pedig T -ben van.

Egy digráft akkor nevezünk ST k -élösszefüggőnek, ha S minden pontjából vezet k élidegen út T minden pontjába. (Ez erősebb annál, mintha csak azt kívánánk, hogy az S halmazból vezessen k élidegen út a T -be).

Csúcsok egy X részhalmazát nevezzük **lényegesnek**, ha $X \cap T \neq \emptyset$ és $S - X \neq \emptyset$, ami azzal ekvivalens, hogy létezik X -be lépő ST -él. Halmazok egy $\mathcal{I}$ családja **ST -független**, ha bármely két X, Y tagjára az $X \cap Y \cap T$ és $S - (X \cup Y)$ halmazok közül legalább az egyik üres. Ez azzal ekvivalens, hogy nem létezik ST -él, amely mind X -be, mind Y -ba belép.

Menger tételéből következik, hogy egy D^+ digráf akkor és csak akkor ST k -élösszefüggő, ha minden lényeges halmaz befoka legalább k . A kiindulási $D = (V, A)$ digráfban definiáljuk egy $X \subseteq V$ részhalmaz $h(X)$ hiányát úgy, hogy $h(X) :=$

$(k - \varrho_D(X))^+$, ha X lényeges, és $h(X) := 0$ különben. Kapjuk, hogy ST -élek egy F halmazának a D -hez adása pontosan akkor eredményez ST k -összefüggő digráfot, ha $\varrho_F(X) \geq h(X)$ minden $X \subseteq V$ -re teljesül, röviden F **fedi** h -t. A kikeresztelési technikát használva kaphatjuk meg a következőt.

5.4.4. tétel [21]. *A $D = (V, A)$ digráfot ST k -összefüggővé tevő (vagyis a h -t fedő) új ST -élek minimális $\tau_h = \tau_h(D)$ száma egyenlő az ST -független halmazok maximális $\nu_h = \nu_h(D)$ h -összegével.*

Nem nehéz ellenőrizni, hogy az $S = T = V$ esetben ST -független halmazok egy tetszőleges rendszere vagy páronként diszjunkt vagy páronként ko-diszjunkt halmazokból áll, és ezért a 5.4.4. tétel valóban visszadja a 5.4.3. tételt. Ugyanakkor a 5.4.4. tétel bizonyítása nem algoritmikus szemben a 5.4.3. tételével.

5.4.4. Digráfok pontösszefüggőségének növelése

Az ST k -összefüggőség nemcsak azért hasznos, mert általánosítja a k -összefüggőséget, hanem mert segítségével az irányított gráfok pontösszefüggőségének növelési problémája is kezelhetővé válik, ami például az irányítatlan esetben mindmáig megoldatlan.

Legyen $H = (V, J)$ irányított gráf. Egy $X = (X_K, X_B)$ párt **párhalmaznak** hívunk, ha $\emptyset \subseteq X_B \subseteq X_K \subseteq V$, amely **nemtriviális**, ha $\emptyset \neq X_B$ és $X_K \neq V$. X_K a párhalmaz **külső** tagja, míg X_B a **belső**. A párhalmaz **egyirányú** (H -ra nézve), ha nincs H -nak X -t **fedő** éle, azaz olyan él, amely a párhalmaz mindkét tagjába belép. Éleknek egy F halmazára $\varrho_F(X)$ jelöli a X -t fedők számát. Két párhalmaz **független**, ha vagy a belsejük diszjunkt vagy a külsejük uniója V , vagyis ha egy éllel nem lehet mindkettőt fedni.

Egy $D^+ = (V, A^+)$ digráfot akkor neveztünk k -összefüggőnek, ha $|V| \geq k + 1$ és bárhol is kihagyva legfeljebb $k - 1$ pontot a maradék digráf erősen összefüggő. Ez azzal ekvivalens, hogy bármely nemtriviális egyirányú párhalmazra $|X_K| - |X_B| \geq k$.

Tegyük most fel, hogy a $D = (V, A)$ digráf nem k -összefüggő és új élek hozzáadásával szeretnénk azzá tenni. Egy $X = (X_K, X_B)$ nemtriviális egyirányú párhalmaz hiányát definiáljuk a

$$(5.13) \quad h_D(X) := (k - (|X_K| - |X_B|))^+$$

értékkel.

5.4.5. tétel (Frank és Jordán, 1995). *A $D = (V, A)$ irányított gráf akkor és csak akkor tehető legfeljebb γ új él hozzáadásával k -összefüggővé, ha*

$$\sum_{X \in \mathcal{F}} h_D(X) \leq \gamma$$

fennáll minden egyirányú független párhalmazokból álló $\mathcal{F}$ rendszerre.

6. Jelölések, definíciók

Legyen $H = (V, F)$ irányított vagy irányítatlan gráf, melynek V a csúcs- és F az élhalmaza. **Sétán** egy olyan $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ sorozatot értünk, amelyben felváltva következnek H -beli pontok és élek, és mindegyik e_i él a v_{i-1} pontból vezet a v_i pontba. A séta **zárt**, ha $v_0 = v_k$. A szereplő élek száma a séta **hossza**. A legkisebb élszámú H -beli st -út hossza a t pont **távolsága** s -től. Azt mondjuk, hogy v_0 a séta kezdőpontja, míg v_k a séta végpontja. A séta **kör**, ha $v_1 = v_k$, és más ismétlődés nincsen. Egy minden élt pontosan egyszer használó zárt séta neve **Euler-séta** vagy **Euler-bejárás**. Amennyiben a sétában nincs ismétlődés, **útról** beszélünk. (Digráf esetén a hangsúly kedvéért néha kitesszük az irányított jelzőt: irányított út, irányított kör, irányított Euler-séta). Egy digráf **aciklikus**, ha nem tartalmaz irányított kört. A teljes gráf éleinek megirányításával keletkező irányított gráf neve **turnament**.

Egy G irányítatlan gráf ponthalmazán az egy úton levés ekvivalencia reláció. Ennek osztályai által feszített részgráfok a gráf (összefüggő) **komponensei**. G **összefüggő**, ha bármely két pontja között vezet út, ami azzal ekvivalens, hogy G csúcsainak minden $X \subset V$ nemüres részalmazára X és $V - X$ között vezet él. A gráf **k -élösszefüggő**, ha G -nek bárhogy kihagyva legfeljebb $k - 1$ élet még mindig összefüggő gráfot kapunk, ami azzal egyenértékű, hogy minden $X \subset V$ nemüres halmazra X és $V - X$ között vezet legalább k él. **Párosításon** egy olyan gráfot értünk, amelyben minden pont foka legfeljebb egy, **teljes párosítás**nál pedig pontosan egy.

A H irányított vagy irányítatlan gráfról azt mondjuk, hogy **k -pontösszefüggő** vagy röviden **k -összefüggő**, ha legalább $k + 1$ csúcsa van és bárhogy kihagyva legfeljebb $k - 1$ csúcsot az irányított esetben erősen összefüggő digráfot, míg az irányítatlanban összefüggő gráfot kapunk.

Az irányított $D = (V, A)$ digráf **gyökeresen k -összefüggő** (s -re nézve), ha legalább $k + 1$ csúcsa van és bárhogy kihagyva legfeljebb $k - 1$ darab s -től különböző pontját gyökeresen összefüggő digráfot kapunk.

Könnnyen látható, hogy egy D digráf ponthalmazán a kölcsönös elérhetőség ekvivalencia reláció. Ennek osztályai által feszített részgráfok a digráf **erősen összefüggő komponensei**. Ezek mindegyikét egy-egy pontra összehúzza aciklikus digráfot kapunk. A digráfot akkor nevezik **erősen összefüggőnek**, ha bármely pontjából bármely másikba vezet út, és akkor **s -re nézve gyökeresen összefüggőnek**, ha valamely s csúcsából minden más csúcsba vezet út.

A digráf (**gyökeresen**) **k -élösszefüggő**, ha bárhogy kihagyva legfeljebb $k - 1$ élet a maradék (gyökeresen) erősen összefüggő, ami azzal ekvivalens, hogy minden $X \subset V$ (illetve a gyökeres esetben $X \subseteq V - s$) nemüres halmazra legalább k él vezet $V - X$ -ből X -be. Általánosabban, a D digráf csúcsainak valamely S és T részalmazára esetén azt mondjuk, hogy D **ST k -élösszefüggő**, ha minden olyan $X \subset V$ halmaz befoka legalább k , amelyre $S - X$ és $X \cap T$ nemüres. Egy irányított és irányítatlan élekből álló **vegyes gráfot** akkor nevezünk **k -élösszefüggőnek**, ha

minden irányítatlan élét két ellentétesen irányított párhuzamos élre cserélve k -élösszefüggő digráfot kapunk.

Egy $H = (V, F)$ irányított vagy irányítatlan gráfról azt mondjuk, hogy **k -pontösszefüggő** vagy röviden **k -összefüggő**, ha legalább $k + 1$ csúcsa van és minden csúcsából bármely másikba vezet k darab belsőleg (azaz végpontjaitól eltekintve) diszjunkt út. $D = (V, A)$ digráf **gyökeresen k -összefüggő** (s -re nézve), ha egy kijelölt s csúcsából mindegyik más csúcsba vezet k belsőleg diszjunkt út. A $H = (V, F)$ (di)gráfban jelölje az s -ből t -be vezető élidegen utak maximális számát $\lambda(s, t) = \lambda(s, t; H)$, míg a belsőleg pontidegen utakét $\kappa(s, t) = \kappa(s, t; H)$.

Egy körmentes gráf neve **erdő**, míg a **fa** egy összefüggő erdő. Látszik, hogy a fa élelhagyásra nézve minimális összefüggő gráf, továbbá hogy egy fa felépíthető egy pontjából kiindulva új élek egymás utáni hozzávételével úgy, hogy a soron következő él egyik végpontja már meglévő pont, míg a másik új. Egy olyan $F = (S, E)$ irányított fát, amelynek minden pontja elérhető irányított úton s -ből **s -fenyő**nek nevezünk. Azt mondjuk, hogy F feszíti S -t. Ha a fenyő részgráfja D -nek és az egész V halmazt tartalmazza, **feszítő s -fenyő**ről beszélünk. **Fenyves**nek hívunk egy olyan irányított erdőt, melynek komponensei fenyők. Ellenőrizhető, hogy irányított fa akkor és csak akkor s -fenyő, ha az $s \in S$ pont befoka nulla a többi ponté pedig egy. Hasonlóan könnyen látszik, hogy egy s -et tartalmazó digráf pontosan akkor s -fenyő, ha az s pontból kiindulva elő lehet irányított élek egyenkénti hozzávételével állítani úgy, hogy az aktuálisan hozzáadott él feje új pont, míg a töve már meglévő.

$G = (V, E)$ irányítatlan gráfban egy $X \subset V$ csúcshalmaz és $V - X$ komplementere között vezető élek halmazát **vágásnak** nevezik, mely **elemi**, ha mind X , mind $V - X$ összefüggő gráfot feszít. A vágásban lévő élek számát $d(X) = d_G(X) = d_E(X)$ valamelyikével jelöljük: $d(X)$ az X halmaz **foka**. Egy v csúcs $d(v)$ **foka** a v -ben végződő élek száma, ahol a v -n ülő hurokélek kétszer számítanak. Tehát $d(v)$ a vv hurokélek kétszeres számával nagyobb, mint $d(\{v\})$, de miután hurokélekre általában nincs szükségünk, nem okoz zavart, hogy nem teszünk különbséget az egyelemű halmaz és annak egyetlen eleme között. A G gráf **k -élösszefüggő**, ha minden vágása legalább k élű, más szóval legfeljebb k élének kihagyása után is összefüggő.

A vágás fogalmának általánosításaként a V egy $\mathcal{P}$ partíciójának **határán** a partíció-részek között vezető (ún. köztes vagy kereszt-) élek halmazát értjük. Ennek $e(\mathcal{P})$ elemszáma $\sum [d(Z)/2 : Z \in \mathcal{P}]$. A G gráfot **k -partíció összefüggő**nek nevezzük, ha csúcsainak minden t -részes partíciójának határa legalább $k(t - 1)$ elemű.

Az $X, Y \subseteq V$ halmazokra $d(X, Y)$ jelöli az $X - Y$ és $Y - X$ halmazok között vezető élek számát. $\Gamma(X) := \{v \in V : v \in V, uv \in E \text{ valamely } u \in X\}$ jelöli az $X \subseteq V$ szomszédjainak halmazát. Az $X \subseteq V$ halmaz által feszített élek számát $i_G(X)$ jelöli, míg $e_G(X)$ azon élek száma melyeknek legalább egyik végpontja X -ben van. Eszerint $i(X) + e(V - X) = |E|$. Az X pontthalmazt **stabilnak** nevezzük, ha nem feszít élt.

$D = (V, A)$ digráfban egy $X \subseteq V$ részhalmazára a $V - X$ -ből X -be belépő élek számát $\varrho(X) = \varrho_D(X) = \varrho_A(X)$ valamelyike jelöli, ez az X halmaz **befoka**, míg a kilépő élekét $\delta(X) = \delta_D(X) = \delta_A(X)$, ami az X **kifoka**. Egy v pont $\varrho(v)$ befoka a v fejű élek száma, így tehát $\varrho(v)$ a vv hurokélek számával nagyobb, mint $\varrho(\{v\})$. Hasonlóképp, a v csúcs $\delta(v)$ **kifoka** a v tövű élek száma. Egy $x : A \rightarrow \mathbf{R}$ függvényre legyen $\varrho_x(S) := \sum [x(uv) : uv \in A, uv \text{ belép } S\text{-be}]$ és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$.

$G = (V, E)$ irányított vagy irányítatlan gráfban $\sigma_G(X) = \sigma(X)$ ($\emptyset \subset X \subseteq V$) jelöli az X elhagyásával keletkező gráf (irányítatlan értelemben összefüggő) komponenseinek számát. Nem túl nehéz igazolni, hogy metsző X, Y halmazokra

$$(6.1) \quad \sigma(X) + \sigma(Y) \leq \sigma(X \cap Y) + \sigma(X \cup Y) + d(X, Y).$$

Egy gráfról azt mondjuk, hogy **Euler-gráf** vagy Euler-féle, ha minden pontjának a foka páros. Egy digráfról azt mondjuk, hogy **irányított Euler-gráf** vagy Euler-féle, ha minden pontjának a befoka egyenlő a kifokával. Mind az irányított, mind az irányítatlan esetben az Euler-gráfot néha **ciklusnak** nevezik. Könnyen igazolható, hogy egy G gráf akkor és csak akkor Euler-féle, ha élhalmaza felbontható élidegen körök uniójára, továbbá, hogy G -nek akkor és csak akkor létezik Euler-bejárása, ha összefüggő és Euler-féle. Hasonlóképp, egy D digráf akkor és csak akkor Euler-féle, ha élhalmaza felbontható élidegen irányított körök uniójára, továbbá, hogy D -nek akkor és csak akkor létezik irányított Euler-bejárása, ha erősen összefüggő és Euler-féle. Amennyiben egy digráfban $\emptyset \subset X \subset V$ és X -ből nem lép ki, azaz $\delta(X) = 0$, úgy az X -be belépő élek halmazát **egyirányú** vagy **irányított vágásnak** hívják.

Hipergráfon egy $(V, \mathcal{F})$ párt értünk, ahol V adott alaphalmaz, $\mathcal{F}$ pedig V részhalmazainak egy rendszere, amelyben ugyanaz a részhalmaz több példányban is szerepelhet. Az $\mathcal{F}$ tagjai a hipergráf **hiperélei**.

A V alaphalmaz X , és Y részhalmaza **ko-diszjunkt**, ha $X \cup Y = V$. X és Y **metsző**, ha $X \cap Y \neq \emptyset$. X és Y **átmetsző**, ha az $X - Y, Y - X, X \cap Y$ halmazok egyike sem üres. X és Y **keresztvező**, ha az $X - Y, Y - X, X \cap Y, V - (X \cup Y)$ halmazok egyike sem üres. X és Y **összehasonlítható**, ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$. V részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszerét **halmazláncnak** nevezzük, ha tagjai páronként összehasonlíthatóak. $\mathcal{F}$ **lamináris**, ha bármely két tagja vagy diszjunkt vagy összehasonlítható. $\mathcal{F}$ **keresztelés-mentes** (cross-free), ha nincs két keresztvező tagja.

Egy s -et tartalmazó, de t -t nem tartalmazó X halmazt nevezzünk **$s\bar{t}$ -halmaznak**.

Irodalom

- [1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall (1993).
- [2] J. Bang-Jensen, A. Frank, and B. Jackson, Preserving and increasing local edge-connectivity in mixed graph, *SIAM J. Discrete Math.*, Vol. **8**, No. 2 (May 1995), 155–178.
- [3] F. Boesch and R. Tindell, Robbins's theorem for mixed multigraphs, *Am. Math. Monthly*, **87** (1980), 716–719.
- [4] Y.-j. Chu and T.h. Liu, On the shortest arborescence of a directed graph, *Scientia Sinica [Peking]*, **14** (1965), 1396–1400.
- [5] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank, and A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, John Wiley and Sons, Inc. (1998).
- [6] W. H. Cunningham and A. Frank, A primal-dual algorithm for submodular flows, *Mathematics of Operations Research*, Vol. **10**, No. 2 (1985), 251–261.
- [7] R. P. Dilworth, A decomposition theorem for partially ordered sets, *Annals of Mathematics* (2), **51** (1950), 161–166.
- [8] R. J. Duffin, The extremal length of a network, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (1962), pp. 200–215.
- [9] J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm, *Math. Programming*, **1** (1971), 127–136.
- [10] J. Edmonds, Edge-disjoint branchings, in: *Combinatorial Algorithms* (B. Rustin, ed.), Acad. Press, New York (1973), 91–96.
- [11] Egerváry J., Matrixok kombinatorius tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok*, No. **38** (1931), 16–28.
- [12] Egerváry J., Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására, *A Matematikai Kutató Intézet Közleményei*, **IV.**/1 (1958), 15–28.
- [13] K. P. Eswaran and R. E. Tarjan, Augmentation problems, *SIAM J. Computing*, **5**, No. 4 (1976), 653–665.
- [14] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ. (1962).
- [15] Frank A., *Kombinatorikus algoritmusok, algoritmikus bizonyítások*, Egyetemi doktori értekezés, ELTE TTK, Budapest (1976).
- [16] A. Frank, On disjoint trees and arborescences, in: *Algebraic Methods in Graph Theory*, Colloquia Mathematica Soc. J. Bolyai, **25** (1978), 159–169. North-Holland.
- [17] A. Frank, On the orientation of graphs, *J. Combinatorial Theory, Ser. B.*, Vol. **28**, No. 3 (1980), 251–261.
- [18] A. Frank, On chain and antichain families of a partially ordered set, *J. Combinatorial Theory, Ser. B.*, Vol. **29**, No. 2 (1980), 176–184.
- [19] A. Frank, How to make a digraph strongly connected, *Combinatorica*, **1**, No. 2 (1981), 145–153.
- [20] A. Frank, Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements, *SIAM J. on Discrete Mathematics*, Vol. **5**, No. 1 (1992 February), pp. 22–53.

- [21] A. Frank and T. Jordán, Minimal edge-coverings of pairs of sets, *J. Combinatorial Theory*, Vol. **65**, No. 1 (1995, September), pp. 73–110.
- [22] Frank A., A Magyar Módszer és általánosításai, *Sigma*, **XXXIII**, 1–2 (2002), pp. 13–44.
- [23] A. Frank, On Kuhn’s Hungarian Method – a tribute from Hungary, *Naval Research Logistic*, Vol. **52** (2005), 2–5.
- [24] A. Frank and A. Gyárfás, How to orient the edges of a graph, in: *Combinatorics* (Keszthely, 1976), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, **18**, 353–364, North-Holland.
- [25] A. Frank, On a theorem of Mader, *Discrete Mathematics*, Vol. **101** (1992), 49–57.
- [26] D. R. Fulkerson, Packing rooted directed cuts in a weighted directed graph, *Math. Programming*, **6** (1974), 1–13.
- [27] T. Gallai, Maximum-Minimum Sätze über Graphen, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungariae*, Vol. **9** (1958), pp. 395–434.
- [28] A. V. Goldberg and E. R. Tarjan, A new approach to the maximum-flow problem, *J. Association for Computing Machinery*, **35** (1988), 921–940.
- [29] C. Greene, Some partitions associated with a partially ordered set, *J. Combinatorial Theory, Ser. A*, **20** (1976), 60–79.
- [30] E. Győri, A minimax theorem on intervals, *J. Combinatorial Theory, Ser. B.*, **37** (1984), 1–9.
- [31] S. L. Hakimi, On the degrees of the vertices of a directed graph, *J. Franklin Inst.*, **279**(4) (1965), 290–308.
- [32] P. Hall, On representatives of subsets, *J. London Math. Soc.*, Vol. **10** (1935), pp. 26–30.
- [33] T. Jordán and Z. Szigeti, Detachment preserving local edge-connectivity of graphs, *SIAM J. Discrete Mathematics*, Vol. 17, No. 1. (2003), pp. 72–87.
- [34] König D., Graphok és matrixok, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **38** (1931), 116–119.
- [35] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, Springer (2000).
- [36] H. W. Kuhn, The Hungarian Method for the assignment problem, *Naval Research Logistic Quarterly*, **2** (1955), pp. 83–97.
- [37] H. G. Landau, On dominance relations and the structure of animal societies III. The condition for the core structure, *Bull. Math. Biophys.*, **15** (1953), 143–148.
- [38] E. L. Lawler, *Kombinatorikus Optimalizálás: hálózatok és matroidok*, Műszaki Kiadó, 1982. (*Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart, and Winston, 1976).
- [39] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, North-Holland 1979. Magyarul: Lovász L., *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Typotex Kiadó, Budapest, 1999.
- [40] L. Lovász, On two minimax theorems in graph theory, *J. Combinatorial Theory (B).*, **21** (1976), 96–103.
- [41] Lovász, L., Gráfelmélet és diszkrét programozás, *Matematikai Lapok*, **27**, 1–2 (1976–1979), 69–86.
- [42] L. Lovász and M. Plummer: *Matching Theory*, North-Holland (1986).
- [43] C. L. Lucchesi and D. H. Younger, A minimax relation for directed graphs, *J. London Math. Soc. (2)*, **17** (1978), 369–374.

- [44] W. Mader, Konstruktion aller n -fach kantenzusammenhängenden Digraphen, *Europ. J. Combinatorics* (3), (1982), 63–67.
- [45] W. Mader, A reduction method for edge-connectivity in graphs, *Ann. Discrete Math.*, **3** (1978), 145–164.
- [46] C. St. J. A. Nash-Williams, On orientations, connectivity and odd vertex pairings in finite graphs, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 555–567.
- [47] C. St. J. A. Nash-Williams, Decomposition of finite graphs into forests, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 12.
- [48] H. E. Robbins, A theorem on graphs with an application to a problem of traffic control, *American Math. Monthly*, **46** (1939), 281–283.
- [49] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization: Polyhedra and efficiency*, Springer (2003). Vol. 24 of the series Algorithms and Combinatorics.
- [50] É. Tardos, A strongly polynomial mincost circulation algorithm, *Combinatorica*, (1985) 247–255.
- [51] W. T. Tutte, On the problem of decomposing a graph into n connected factors, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 221–230.
- [52] K. Vidyasankar, Covering the edge-set of a directed graph with trees, *Discrete Math.*, **24** (1978), 79–85.
- [53] T. Watanabe and A. Nakamura, Edge-connectivity augmentation problems, *Computer and System Sciences*, **35**, No. 1 (1987), 96–144.
- [54] D. R. Woodall, Minimax theorems in graph theory, in: *Selected Topics in Graph Theory* (eds. L. W. Beineke and R. J. Wilson), Academic Press (1978), pp. 237–269.

András Frank: Connections in Combinatorial Optimization

I. Optimization in Graphs

L. Lovász' paper entitled Graph Theory and Discrete Programming (in Hungarian) appeared 30 years ago. Here we summarize recent developments of the area with a special emphase on connectivity problems. The work consists of two parts. The present first one exhibits concrete results concerning paths, trees, cuts, and flows, while the forthcoming second part is going to explore deeper connections by outlining the basic techniques of polyhedral combinatorics and submodular optimization.

Frank András

Operációkutatási Tanszék és
MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Pázmány P. s. 1/c
Budapest H-1117
e-mail: frank@cs.elte.hu.