1. Fejezet

LINEÁRIS ALGEBRA ÉS POLIÉDEREK

1.1 VEKTORTÉR, ALTÉR, LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG

Azt mondjuk, hogy $x \geq y$, ha x minden komponense nagyobb vagy egyenlő y megfelelő komponensénél. Amennyiben $x \leq y$ és $x \neq y$, úgy az $x < y$ jelölést használjuk. Amikor x minden komponense szigorúan kisebb az y megfelelő komponensénél, az $x \ll y$ jelölést használjuk.

Adott $x_1, \ldots, x_k$ vektorok és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számok esetén a $b := \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ vektort az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok egy **lineáris kombinációjának** nevezzük. Ha a λ_i számok összege 1, **affin kombinációról** beszélünk, ha valamennyi λ_i nem-negatív, úgy **nem-negatív kombinációról** van szó. Egy nem-negatív, affin kombinációt **konvex kombinációnak** mondunk. Amennyiben a $b \neq 0$ elem előáll az $x_1, \ldots, x_k$ elemek lineáris kombinációjaként, úgy azt mondjuk, hogy b **lineárisan függ** az $x_1, \ldots, x_k$ elemektől. Ha b-nek nincs ilyen előállítása, akkor b **lineárisan független** az $x_1, \ldots, x_k$ elemektől. A lineáris kombináció **triviális**, ha mindegyik λ_i együttható 0. Ha legalább az egyikük nem-nulla, **nem-triviális lineáris kombinációról** beszélünk. Azt mondjuk, hogy az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok **lineárisan összefüggnek**, ha a vektortér nulleleme előáll nem-triviális lineáris kombinációjukként. Ha nincs ilyen előállítás, úgy az $x_1, \ldots, x_k$ vektorokat **lineárisan függetlenek**nek mondjuk.

Legyen X és Y két vektor-halmaz $\mathbf{R}^n$-ben. Ekkor a **vektor-összegükön** vagy **Minkowski összegükön** (röviden, **összegükön**) az $X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ halmazt értjük. A különbségük analóg módon definiálható.

A V vektortér A **altere** egy olyan nemüres részhalmaza V-nek, amelyre fennáll, hogy (1) $x \in A \Rightarrow \lambda x \in A$ minden $\lambda \in \mathbf{R}$ számra, és (2) $x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$.

Nyilván az egyetlen nulla elemből álló halmaz altér, az ún. **triviális altér**. Egy altér **dimenziója** az altérből kiválasztható lineárisan független elemek maximális száma. Két n-dimenziós $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ vektor **skalárszorzata** az $ab := a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ szám. Természetesen $ab = ba$. Azt mondjuk, hogy a és b **ortogonális**, ha skalárszorzatuk 0. Az $A, B \subseteq V$ halmazokról azt mondjuk, hogy egymásra **ortogonálisak** (vagy **merőlegesek**), ha A mindegyik eleme ortogonális B mindegyik elemére.

Ha $x_1, \ldots, x_k$ a V vektortér véges sok eleme, akkor a lineáris kombinációjukként előálló elemek halmaza alteret alkot, amit az $x_1, \ldots, x_k$ elemek által **generált altérnek** nevezünk. Ez nem más, mint az $X := \{x_1, \ldots, x_k\}$ halmazt tartalmazó alterek metszete.

Legyen $a \in \mathbf{R}^n$ nem-nulla vektor. Az a-ra ortogonális elemek $\{x \in \mathbf{R}^n : ax = 0\}$ halmazát **origón átmenő** vagy **homogén hipersíknak** nevezzük, melynek (egyik) **normálisa** vagy **normál vektora** a. Amennyiben a az i-dik egységvektor, úgy az a-ra merőleges vektorok halmazát **koordináta-hipersíknak** hívjuk.

Adott $x_1, \ldots, x_k$ vektorok mindegyikére ortogonális vektorok halmaza alteret alkot, melyet az $x_1, \ldots, x_k$ **ortogonális kiegészítő alterének** nevezünk. Ha az x_i vektorok mindegyike valamelyik $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ alakú egységvektor, úgy ezek ortogonális kiegészítő alterét **koordináta-altér**nek hívjuk. Egy x pontnak az x_j **koordináta** (vagy **tengely**) **menti vetületét** úgy kapjuk, hogy x j-dik komponensét 0-re állítjuk. Valójában ez a **belső** vetület, megkülönböztetendő a **külső** vetülettől, amelyet úgy kapunk, hogy az x vektor j-dik komponensét eltöröljük.

Legyenek U és V vektorterek. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : U \to V$ leképezés **lineáris transzformáció** (vagy **leképezés**), ha (1) $x \in U, \lambda \in \mathbf{R}$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$ és (2) $x, y \in U$ esetén $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Az U azon elemeinek halmaza, amelyek a V nulla elemébe képződnek le az U-nak alterét alkotják, amely alteret a φ leképezés **magterének** neveznek. V azon elemei, amelyek valamely U-beli elem képeként állnak elő (azaz a $\{\varphi(u) : u \in U\}$ halmaz elemei), a V-nek alterét alkotják, amely alteret a φ leképezés **képterének** neveznek.

1.2 MÁTRIXOK, EGYENLETRENDSZEREK

Az A mátrix **sorterén** az $\mathbf{R}^n$-nek az A sorai által generált alterét értjük, amelynek jele $\mathcal{S}(A)$ vagy $\mathbf{R}^m A$. A sortér tehát az $\{y^t A : y \in \mathbf{R}^m\}$ halmaz. Az A mátrix **nulltere** az A sorainak ortogonális kiegészítő altere, melynek jele $\mathcal{N}(A)$. A nulltér tehát az $Ax = 0$ egyenletrendszer $\{x \in \mathbf{R}^n : Ax = 0\}$ megoldás-halmaza. Az A oszlopai által generált altér az A **oszloptere**, jelölésben $\mathcal{O}(A)$ vagy $A\mathbf{R}^n$, míg az oszlopainak merőleges altere a mátrix **bal nulltere.** Ennek jele $\mathcal{BN}(A)$.

Lemma 1.1 *Ha a $z \in \mathbf{R}^n$ nem-nulla vektor ortogonális az A mindegyik sorára (azaz benne van A nullterében, vagyis $Az = 0$), akkor z lineárisan független az A soraitól, (azaz z nincs benne az A sorterében).*

TÉTEL 1.2 *Legyen A $m \times n$-es mátrix, ahol $1 \leq m < n$. Ekkor az $Az = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem-triviális megoldása. (Másszóval m-nél több m-dimenziós vektor mindig lineárisan összefüggő. Még másképp, A nulltere nem-triviális.)*

Következmény 1.3 *Ha egy mátrix oszlopai is és sorai is lineárisan függetlenek, akkor a mátrix négyzetes.*

Következmény 1.4 *Ha az A' mátrixból lineárisan függetlenül kiválasztható sorok maximális száma kisebb, mint az oszlopok száma, akkor az $A'z = 0$ rendszernek van nem-triviális megoldása.*

Lemma 1.5 *Tegyük fel, hogy az A mátrixban az első r oszlop lineárisan független és a többi oszlop lineárisan függ ezektől. Hasonlóképp legyen az első s sor lineárisan független és a többi sor lineárisan függjön ezektől. Ekkor az első r oszlop és az első s sor által meghatározott A_1 részmátrix oszlopai is és sorai is lineárisan függetlenek.*

TÉTEL 1.6 *Egy A mátrix lineárisan független oszlopainak maximális száma egyenlő a lineárisan független sorok maximális számával.*

Ezt a közös maximális számot $r(A)$-val jelöljük és a mátrix **rangjának** nevezzük. Egy négyzetes mátrixot **szingulárisnak** neveznek, ha sorai (illetve ezzel ekvivalensen, oszlopai) lineárisan összefüggnek.

Következmény 1.7 *Egy mátrix rangja nem változik, ha hozzáveszünk egy új oszlopot, amely lineárisan függ az oszlopoktól, vagy ha elhagyunk egy meglévő oszlopot, amely lineárisan függ a többi oszloptól. Analóg állítás érvényes sorokra.* •

TÉTEL 1.8 *Ha egy $m \times n$-es A mátrix sorai lineárisan függetlenek (azaz $r(A) = m$), akkor tetszőleges n-dimenziós b vektorra az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása (ami $b \neq 0$ esetben azzal ekvivalens, hogy b lineárisan függ az A oszlopaitól.) Ha $m = n$, akkor a megoldás egyértelmű.*

TÉTEL 1.9 *A következők ekvivalensek.*
(A) Az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása.
(B) $r(A) = r([A, b])$, (ahol $[A, b]$ az a mátrix, amely A-ból áll elő a b oszlop hozzávételével).
(C) Nem létezik olyan y, amelyre $yA = 0$, $yb \neq 0$.

Az 1.9 tételben az (A)-beli problémát **primál** problémának nevezzük. Ez tehát azt kérdezi, hogy a b oszlopvektor benne van-e az A oszlopainak alterében. A (C)-beli problémát **duál** (vagy **duális**) problémának hívjuk.

TÉTEL 1.10 (Fredholm féle alternatíva tétel) *Az $Ax = b$ rendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha nem létezik olyan y, amelyre $yA = 0$, $yb \neq 0$. Ekvivalensen, egy $[\ b\ ]$ vektor vagy benne van egy altérben* [melyet az A oszlopai generálnak]*, vagy elválasztható tőle* [egy y normálisú] *homogén hipersíkkal abban az értelemben, hogy a hipersík az alteret tartalmazza, de a vektort nem.*

TÉTEL 1.11 *Egy A $n \times n$-es nem-szinguláris négyzetes mátrix első m sora által alkotott részmátrixot jelölje A_1, míg a maradékot A_2. Tegyük fel, hogy az A_1 minden sora ortogonális A_2 minden sorára. Ekkor A_1 sortere éppen az A_2 nulltere és A_1 nulltere éppen az A_2 sortere.*

TÉTEL 1.12 *Legyen A_1 olyan $m \times n$-es mátrix ($m < n$), amelynek sorai lineárisan függetlenek. Ekkor létezik olyan $(n - m) \times n$ méretű A_2 mátrix, amelynek sorai ortogonálisak az A_1 soraira és amely az A_1-gyel együtt egy $n \times n$-es nem-szinguláris mátrixot alkot. (Az A_2 sortere éppen az A_1 sorterének az ortogonális kiegészítője.)*

1.3 ALTEREK, AFFIN ALTEREK

Affin altéren vagy **eltolt altéren** (vagy **affin halmazon**) egy altér eltoltját értjük. A C affin altér **dimenzióján** a definiáló A altér dimenzióját értjük.

Két (különböző) pont affin kombinációinak halmazát a két pont **összekötő egyenesének** nevezzük, míg a két pont konvex kombinációinak halmaza a két pontot összekötő **szakasz**. Egy egy-dimenziós affin halmazt **egyenesnek** nevezünk.

TÉTEL 1.13 *Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek van egy x_0 megoldása. Ekkor a megoldások $M := \{x : Ax = b\}$ halmaza az $\mathbf{R}^n$ tér affin altere, nevezetesen az A nullterének eltoltja. Másként fogalmazva, az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszer egy tetszőleges megoldását x_0-hoz adva megoldást kapunk, és M minden tagja így áll elő. Megfordítva, minden affin altér előáll egy egyenletrendszer megoldás-halmazaként.*

Következmény 1.14 *Amennyiben az $Ax = b$ egyenletrendszernek van megoldása, úgy az M megoldáshalmaz dimenziója $n - r(A)$, ahol n az oszlopok száma.*

1.4 KÚPOK, POLIÉDEREK

Pontok egy halmazát akkor nevezzük **konvexnek**, ha zárt a konvex kombináció képzésre.

Könnyen ellenőrizhető, hogy konvex halmazok metszete is konvex. A C-t tartalmazó konvex halmazok metszete a C **konvex burka** (convex hull) és konv(C)-vel jelöljük. Ez a C elemeinek felhasználásával készült konvex kombinációk halmaza.

Amennyiben $a \in \mathbf{R}^n$ nem-nulla vektor, β tetszőleges szám, az $ax = \beta$ lineáris egyenlet megoldás-halmazát **hipersíknak** (hyperplane) nevezzük. Az $\{ax \leq \beta\}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldás halmazát, vagyis az $\{x : ax \leq \beta\}$ halmazt (zárt) **féltérnek** (closed halfspace) hívjuk, melynek $\{x = Ax = b\}$ a **határoló síkja**, és amelynek normálisa a. (Ha szigorú egyenlőtlenség van, **nyílt féltérről** beszélünk). A $\beta = 0$ esetben azt mondjuk, hogy a féltér **homogén**.

Vektorok egy nemüres C halmazát **kúpnak** (cone) nevezzük, ha C zárt nemnegatív számmal történő szorzásra nézve, vagyis ha C bármely elemének nem-negatív számszorosa is C-hez tartozik. A kúp **triviális,** ha egyetlen pontja van (az origó). Amennyiben a kúp még az összeadásra is zárt, **konvex kúpról** beszélünk.

Végesen generált kúp (röviden, **generált kúp**): Véges sok $a_1, \ldots, a_n$ vektor nemnegatív lineáris kombinációinak halmaza. Jelölése : kúp$(a_1, \ldots, a_n) := \{z : z = \sum_i \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0\}$.

Metszetkúp (másnéven **poliéder-kúp**): Véges sok homogén féltér metszete; $\{x : b_1 x \leq 0, \ldots, b_m x \leq 0\}$. Például, $\{x : Ax \leq 0\}$ vagy $\{y : yA \leq 0\}$.

Egy q nemnulla vektor esetén a $\{\lambda q : \lambda \in \mathbf{R}_+\}$ generált kúpot **végtelen iránynak** vagy röviden **iránynak** vagy másként **sugárnak** (ray) mondjuk és $\vec{q}$-val jelöljük. A $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_k$ irányok egy **nemnegatív kombinációján** a $q_1, \ldots, q_k$ vektorok egy nemnagatív kombinációjához tartozó irányt értjük. Egy z pontból induló $\vec{q}$ irányú **félegyenesen** a $z + \vec{q} := \{x : x = z + \lambda q, \lambda \in \mathbf{R}_+\}$ halmazt értjük.

Adott K kúphoz hozzárendelhetjük a $K^* := \{x : xz \leq 0 \text{ minden } z \in K \text{ elemre}\}$ halmazt, és ezt a K **polárisának** nevezzük. Az A mátrixra jelölje G_A az A sorai által generált $\{yA : y \geq 0\}$ kúpot, míg M_A az A sorai által definiált $\{x : Ax \leq 0\}$ metszetkúpot.

Lemma 1.15 *A G_A kúp polárisára $(G_A)^* = M_A$.*

Lemma 1.16 *Az M_A polárisára $(M_A)^* \supseteq G_A$.*

Poliéder (polyhedron, tbsz: polyhedra): Véges sok féltér metszete: $R := \{x : Qx \leq b\}$ ahol Q egy $m \times n$-es mátrix, b m-dimenziós vektor.

Egy poliédert akkor nevezünk **korlátosnak**, ha létezik olyan K pozitív szám, amelyre $|x(i)| \leq K$ a poliéder minden x pontjának mindegyik $x(i)$ komponensére. Egy poliéder (**külső**) **dimenzió**-ján, (röviden dimenzióján) az őt tartalmazó legszűkebb affin altér dimenzióját értjük. A poliéder **belső dimenziója**, a tér benne fekvő affin alterek dimenziójának a maximuma.

Politop (polytope): Véges sok pont konvex burka.

A poliéder egy z pontját **csúcsnak** nevezzük, ha nem áll elő a poliéder néhány más pontjának konvex kombinációjaként. A poliédert **csúcsosnak** (pointed) mondjuk, ha van csúcsa. Ha egy poliéder nem tartalmaz teljes egyenest (félegyenest) akkor azt mondjuk, hogy **egyenes-mentes** (**félegyenes-mentes**). A $\vec{q}$ irányt az R **poliéder egy irányának** nevezzük, ha van R-nek olyan z pontja, amelyre $z + \lambda q \in R$ minden pozitív λ-ra. A poliéder egy $\vec{q}$ irányát **extrémnek** nevezzük, ha nem áll elő a poliéder más irányainak nemnegatív kombinációjaként.

A $P \subseteq \mathbf{R}^n$ nemüres poliérderre legyen $c \in \mathbf{R}^n$ olyan vektor, amelyre $\max\{cx : x \in P\}$ létezik és értéke δ. A $H = \{x : cx = \delta\}$ hipersíkot a poliéder egy **támasz-síkjának** nevezzük. A $H \cap P$ halmazt pedig a poliéder egy **oldalának. Minimális oldalon** egy olyan oldalt értünk, amely nem tartalmaz valódi részhalmazként oldalt.

Lemma 1.17 *Ha az R poliéder kúp, akkor metszetkúp.*

2. Fejezet

LINEÁRIS EGYENLŐTLENSÉG-RENDSZEREK

2.1 A FOURIER-MOTZKIN ELIMINÁCIÓ

Legyen A olyan $m \cdot n$-es mátrix ($m \geq 1, n \geq 2$), amelynek első, a_1-gyel jelölt oszlopa $0, \pm 1$ értékű. Jelölje rendre I, J, K a sorok azon indexhalmazait, melyekre az $a_1(i)$ értéke $+1, -1$ illetve 0. Készítsük el az $A^{[1]}$ mátrixot a következőképpen. A K-nak megfelelő sorok változatlanul kerüljenek be $A^{[1]}$-be. Ezen kívül minden $i \in I$, $j \in J$ választásra legyen ${}_ia + {}_ja$ legyen az $A^{[1]}$ egy sora, melyet jelöljünk ${}_{[ij]}a$-val.

2.1.1 A primál feladat

TÉTEL 2.1 *Az*

$$Ax \leq 0 \tag{2.1}$$

egyenlőtlenség-rendszernek bármely megoldása az

$$A^{[1]}x \leq 0 \tag{2.2}$$

rendszernek is megoldása. A (2.2) bármely megoldásának első komponensét alkalmasan megváltoztatva a (2.1) egy megoldását kapjuk.

Következmény 2.2 *Tegyük fel, hogy a Q mátrix első oszlopa $0, \pm 1$ értékű, és rendeljük a*

$$Qx' \leq b \tag{2.3}$$

egyenlőtlenség-rendszerhez a

$$Q^{[1]}x' \leq b^{[1]} \tag{2.4}$$

rendszert, ahol $b^{[1]}$ az $A := (Q, b)$ mátrixhoz tartozó $A^{[1]}$ mátrix utolsó oszlopa. Ekkor (2.3) bármely megoldása (2.4)-nak is megoldása, és a (2.4) bármely megoldásának első komponensét alkalmasan megváltoztatva a (2.3) egy megoldását kapjuk.

Következmény 2.3 *Metszetkúp tengelymenti (külső vagy belső) vetülete metszetkúp.*

Következmény 2.4 *Generált kúp előáll metszetkúpként.*

Lemma 2.5 *Az M_A polárisára $(M_A)^* = G_A$.*

Következmény 2.6 *Ha C generált- vagy metszetkúp, akkor $C^{**} = C$.* •

2.1.2 A duál feladat

TÉTEL 2.7 *Legyen $c \in \mathbf{R}^n$ olyan vektor, amelyre $c(1) = 0$. Ekkor az*

$$\{yA = c, y \geq 0\} \tag{2.5}$$

rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az

$$\{y'A^{[1]} = c, y' \geq 0\} \tag{2.6}$$

rendszer megoldható.

Következmény 2.8 *Legyen Q, b, A ugyanaz, mint a 2.2 következményben. Akkor és csak akkor létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yQ = 0, yb = -1$, ha létezik olyan $y' \geq 0$, amelyre $y'Q^{[1]} = 0, y'b^{[1]} = -1$.*

Következmény 2.9 *Generált kúp metszete koordináta-altérrel generált kúp.*

Következmény 2.10 *Metszetkúp előáll generált kúpként.*

2.1.3 Kúpok és poliéderek előállítása

TÉTEL 2.11 *Egy $P \subseteq \mathbf{R}^n$ nemüres halmaz akkor és csak akkor metszetkúp, ha generált kúp. P akkor és csak akkor poliéder, ha előáll egy nemüres politop és egy generált kúp összegeként.*

Következmény 2.12 *Egy $\mathbf{R}^n$-beli halmaz akkor és csak akkor politop, ha korlátos poliéder.*

2.1.4 Az FM eljárás hatékonysága

2.1.5 A 2-SAT probléma

2.1.6 Egy ütemezési feladat: PERT

2.2 MEGOLDHATÓSÁG: A FARKAS LEMMA

TÉTEL 2.13 (Farkas lemma, alap alak) *Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszernek pontosan akkor van megoldása, ha az $\{yA \geq 0, yb < 0\}$ rendszernek nincs.*

Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszert **primál** feladatnak, míg az $\{yA \geq 0, yb < 0\}$ rendszert **duál** vagy **duális** feladatnak nevezik.

TÉTEL 2.14 (Farkas lemma, alap alak) *A b vektor akkor és csak akkor van benne egy K generált kúpban, ha nincs olyan zárt homogén féltér, amely K-t tartalmazza, de b-t nem.*

TÉTEL 2.15 (Farkas lemma, (A) változat) *A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha nem létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yQ = 0, yb = -1$.*

TÉTEL 2.16 (Farkas lemma, (B) változat) *A $\{Bx \leq b, x \geq 0\}$ egyenlőtlenség-rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha nem létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yB \geq 0, yb = -1$.*

TÉTEL 2.17 *A*

$$\{Px = b_0, Qx \leq b_1\} \tag{2.7}$$

primál rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az

$$\{y_0P + y_1Q = 0, y_1 \geq 0, yb = -1\} \tag{2.8}$$

duális nem, ahol $y = (y_0, y_1,), b = (b_0, b_1)$.

TÉTEL 2.18 (Farkas lemma, általános alak) *A*

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0 \tag{2.9}$$

primál rendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha az

$$y_0P + y_1Q = 0,\ y_0A + y_1B \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ yb := y_0b_0 + y_1b_1 = -1 \tag{2.10}$$

duális rendszernek van.

2.2.1 Direkt bizonyítás

TÉTEL 2.19 *A*

$$Px_0 + Ax_1 = b,\ x_1 \geq 0 \tag{2.11}$$

primál feladatnak akkor és csak akkor nincsen megoldása, ha az

$$yP = 0,\ yA \geq 0,\ yb = -1 \tag{2.12}$$

duális feladatnak van.

TÉTEL 2.20

$$y_0P' + y_1Q' = c_0',\ y_0A' + y_1B' \geq c_1',\ y_1 \geq 0 \tag{2.13}$$

primál rendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha a

$$P'x_0 + A'x_1' = 0,\ Q'x_0 + B'x_1' \leq 0,\ x_1' \geq 0,\ c_0'x_0 + c_1'x_1' > 0 \tag{2.14}$$

duális rendszernek van. •

2.3 KORLÁTOSSÁG

2.3.1 Bázis-megoldások

Legyen $Q \neq 0$ egy $m \cdot n$-es mátrix és jelölje R a $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer megoldásainak halmazát. Ennek egy z elemére jelölje $Q_z^=$ a Q azon soraiból álló részmátrixot, amelyekre az általuk meghatározott egyenlőtlenségeket a z egyenlőséggel teljesíti. Az ennek megfelelő jobboldal legyen $b_z^=$, míg a Q maradék részét jelölje $Q_z^<$. A $z \in R$ elem $\sigma(z)$-vel jelölt **szint**-jén az $r(Q) - r(Q_z^=)$ számot értjük. Ha ez a szám 0, úgy z-t **bázis-megoldásnak** nevezzük.

TÉTEL 2.21 *Tegyük fel, hogy az R poliéder nemüres és $R = \{x : Qx \leq b\} = \{x : Q'x \leq b'\}$. Ekkor Q és Q' sortere megegyezik. Tetszőleges $z \in R$ esetén $Q_z^=$ és $Q'^{=}_z$ sortere megegyezik.*

Következmény 2.22 *Egy $z \in R$ elem szintje csak a poliédertől függ és nem a poliédert meghatározó egyenlőtlenség-rendszer konkrét alakjától. Speciálisan, a bázis-megoldás fogalma is csak a poliédertől függ.*

TÉTEL 2.23 (i) *Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ egy z megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha a pozitív elemekhez tartozó A-beli oszlopok lineárisan függetlenek.* (ii) *Az $\{yA \geq 0, yb = -1\}$ rendszer egy y_0 megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha az A-ból lineárisan függetlenül kiválasztható, az y_0-ra merőleges oszlopok maximális száma $r(A, b) - 1$.*

2.3.2 Erős bázis-megoldások

TÉTEL 2.24 *Tegyük fel, hogy az R poliéder nemüres és $R = \{x : Qx \leq b\} = \{x : Q'x \leq b'\}$. A Q valamely j oszlopa pontosan akkor lineárisan független, ha Q' megfelelő j oszlopa lineárisan független.*

Következmény 2.25 *Az erős bázis-megoldás fogalma csak a poliédertől függ és nem a poliédert meghatározó egyenlőtlenség-rendszertől.* •

Következmény 2.26 *A $\{Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ egyenlőtlenség-rendszer egy z bázis-megoldása pontosan akkor erős, ha a z nem-nulla komponenseihez tartozó M-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ahol $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.* •

TÉTEL 2.27 *A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer egy z megoldása akkor és csak akkor erős bázis-megoldás, ha létezik Q-nek egy olyan $r(Q)$ sorból és $r(Q)$ oszlopból álló nem-szinguláris Q' részmátrixa, amelyre z a $Q'x' = b'$ egyértelmű x' megoldásából áll elő 0-komponensek hozzávételével (ahol b' a b azon részét jelöli, amely a Q' sorainak felel meg.)*

Következmény 2.28 *Tetszőleges egyenlőtlenség-rendszernek legfeljebb csak véges sok erős bázis-megoldása van.* •

2.3.3 A korlátosság feltétele

Lemma 2.29 *Legyen z a $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszernek egy megoldása, és c egy n-dimenziós vektor. Ha nem létezik olyan q vektor, amelyre $cq > 0, Qq \leq 0$, akkor $Qx \leq b$-nek létezik olyan x^* bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.*

Következmény 2.30 *Ha egy egyenlőtlenség-rendszernek van megoldása, akkor létezik bázis-megoldása is.* •

TÉTEL 2.31 (Korlátossági tétel, speciális alak) *Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nemüres, és legyen c egy n-dimenziós vektor. A következők ekvivalensek.*
(0) A $\{cx\}$ lineáris függvény R-n felülről korlátos.
(1) Minden $z \in R$ elemre létezik $Qx \leq b$-nek olyan x^* erős bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.
(2) Nem létezik olyan q vektor, amelyre $cq > 0$ és $Qq \leq 0$.
(3) Létezik olyan $y \geq 0$ vektor, amelyre $yQ = c$.

Következmény 2.32 *Ha az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nemüres, és $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos, úgy $\max\{cx : x \in R\}$ létezik (azaz létezik olyan $z \in R$, amelyre $cz = \sup\{cx : x \in R\}$).*

Következmény 2.33 *Ha egy egyenlőtlenség-rendszer megoldható, akkor van erős bázis-megoldása is.*

Legyen R a

$$Px_0 + Ax_1 = b_0, \; Qx_0 + Bx_1 \leq b_1, \; x_1 \geq 0 \tag{2.15}$$

megoldás-halmaza.

TÉTEL 2.34 (Korlátossági tétel) *Tegyük fel, hogy az R poliéder nemüres, és legyen $c = (c_0, c_1)$ adott vektor. A következők ekvivalensek.*

(0) A $\{cx\}$ lineáris függvény R-n felülről korlátos.
(1) Minden $z \in R$ elemre létezik (2.15)-nek olyan x^* erős bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.
(2) Nem létezik olyan $q = (q_0, q_1)$ vektor, amelyre $cq > 0$, és $q_1 \geq 0, Pq_0 + Aq_1 = 0, Qq_0 + Bq_1 \leq 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre

$$y_0P + y_1Q = c_0, \; y_0A + y_1B \geq c_1, \; y_1 \geq 0. \bullet \tag{2.16}$$

TÉTEL 2.35 *Az $\{Ax = b, \; x \geq 0\}$ rendszernek akkor és csak akkor van olyan megoldása, amelyben az x pozitív változóinak megfelelő A-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ha nem létezik olyan y, amelyre $yA \geq 0$, $yb = -1$ és A-nak létezik $r(A, b) - r(b)$ lineárisan független oszlopa, amelyekre y merőleges. (Röviden, vagy a primál, vagy a duál problémának létezik bázis-megoldása).* •

Következmény 2.36 (C. Caratheodory) *Ha a d-dimenziós tér egy z pontja $p \geq d + 1$ darab pont konvex kombinációja, akkor ezen pontok között van legfeljebb $d + 1$, amelyeknek z konvex kombinációja.*

2.4 OPTIMALITÁS: A DUALITÁS TÉTEL

2.4.1 Optimalitási feltételek

Legyen x^* az $R = \{x : Qx \leq b\}$ egy adott eleme. Azt mondjuk, hogy egy $\vec{x}'$ irány x^*-nál **lehetséges elmozdulás**, ha van olyan (kicsiny) pozitív λ szám, amelyre $x^* + \lambda x' \in R$. Ha ráadásul $cx' > 0$, akkor $\vec{x}'$-t **növelő iránynak** hívjuk (c-re és x^*-re nézve).

TÉTEL 2.37 *Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nemüres és $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos. Az R egy megadott x^* elemére a következő állítások ekvivalensek.*
(1) $cx^* \geq cx$ minden $x \in R$, azaz x^* maximalizálja a cx függvényt az R-n (röviden, x^* optimális).
(2) Nem létezik növelő irány, azaz olyan x' vektor, amelyre $Q_*^= x' \leq 0$ és $cx' > 0$.
(3) Létezik olyan y^* vektor, amely kielégíti az

$$y^* \geq 0, y^*Q = c \tag{2.17}$$

duális feltételt, és amelyre fennáll az

$$y^*(i) > 0 \Rightarrow {}_iqx^* = b(i) \tag{2.18}$$

optimalitási kritérium (ami szavakban: az y^* bármely komponense csak akkor lehet pozitív, ha a neki megfelelő primál egyenlőtlenséget x^* egyenlőséggel teljesít). (2.17) *fennállása esetén* (2.18) *azzal ekvivalens, hogy*

$$cx^* = by^*, \tag{2.19}$$

továbbá azzal, hogy

$$y^*(b - Qx^*) = 0. \tag{2.20}$$

TÉTEL 2.38 *Tegyük fel, hogy a*

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0 \tag{2.21}$$

rendszerrel definiált R poliéder nemüres és $\{cx = c_0x_0 + c_1x_1 : x \in R\}$ felülről korlátos. Legyen $x^* = (x_0^*, x_1^*)$ az R egy eleme, és jelölje $(Q_*^=, B_*^=)$ a (Q, B) mátrix azon sorai által alkotott részmátrixot, amelyekre a hozzájuk tartozó egyenlőtlenségeket x^* egyenlőséggel teljesíti, míg $b_{1*}^=$ jelölje a b_1 megfelelő részét. A következő állítások ekvivalensek.

(1) $cx^* \geq cx$ minden $x \in R$, azaz x^* maximalizálja a cx függvényt az R-n (röviden, x^* optimális).
(2) Nem létezik növelő irány, azaz olyan $x' = (x_0', x_1')$ vektor, amelyre $cx' > 0$,

$$Px_0 + Ax_1 = b_0, Q_*^= x_0 + B_*^= x_1 \leq b_{1*}^= \tag{2.22}$$

és

$$x_1^*(i) = 0 \Rightarrow x_1'(i) \geq 0. \tag{2.23}$$

(3) Létezik olyan $y^* = (y_0^*, y_1^*)$ vektor, amely kielégíti az

$$y_1^* \geq 0, y_0^*P + y_1^*Q = c_0,\ y_0^*A + y_1^*B \geq c_1 \tag{2.24}$$

duális feltételt, és amelyre fennáll az

$$x_1^*(j) > 0 \Rightarrow y_0^*a_j + y_1^*b_j = c_1(j) \tag{2.25}$$

valamint az

$$y_1^*(i) > 0 \Rightarrow {}_iqx_0^* + {}_ibx_1 = b_1(i), \tag{2.26}$$

optimalitási kritérium. (2.24) *fennállása esetén az optimalitási kritérium azzal ekvivalens, hogy*

$$cx^* = by^*, \tag{2.27}$$

és azzal, hogy

$$y^*(b - Mx^*) = 0, \tag{2.28}$$

ahol $M = \begin{pmatrix} P & A \\ Q & B \end{pmatrix}$.

2.4.2 A dualitás tétel

A primál probléma:

$$\max\{(c_0x_0 + c_1x_1) : Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0\}. \tag{2.29}$$

A duális probléma:

$$\min\{(c_0y_0 + c_1y_1) : y_0P + y_1Q = c_0,\ y_0A + y_1B \geq c_1,\ y_1 \geq 0\}. \tag{2.30}$$

TÉTEL 2.39 (Dualitás tétel, speciális alak) *Tegyük fel, hogy az $R = \{x : Qx \leq b\}$ primál poliéder nemüres. Tegyük fel továbbá, hogy $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos (ami a 2.31 tétel szerint azzal ekvivalens, hogy a duális $R^* = \{y : y \geq 0, yQ = c\}$ poliéder nemüres). Ekkor a primál optimalizálási feladatban a maximum egyenlő a duál feladatban szereplő minimummal, azaz $\max\{cx : Qx \leq b\} = \min\{by : y \geq 0, yQ = c\}$.*

A (2.30)-ban szereplő poliédert R^*-gal jelöljük és **duális** poliédernek hívjuk.

TÉTEL 2.40 (Dualitás tétel) *Tegyük fel, hogy a* (2.29) *rendszer által definiált R primál poliéder nemüres. Tegyük fel továbbá, hogy a $cx = c_0x_0 + c_1x_1$ célfüggvényre nézve $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos (vagy ekvivalensen a duális R^* poliéder nemüres). Ekkor a* (2.29) *primál optimalizálási feladatban a maximum egyenlő a* (2.30) *duál feladatban szereplő minimummal.*

Azt mondjuk, hogy egy $c'x$ célfügvény vagy a c' vektor valamely R poliéderre nézve **neutrális** (semleges), ha R minden x elemére $c'x$ értéke ugyanaz. Két vektort (célfüggvényt) akkor mondunk **ekvivalensnek**, ha különbségük neutrális.

2.4.3 Lineáris és logikai következmény

Tekintsük a

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0 \tag{2.31}$$

egyenlőtlenség-rendszert, melynek R megoldás-halmazáról tegyük fel, hogy nemüres. Legyen $M = \begin{pmatrix} P & A \\ Q & B \end{pmatrix}$. Legyen $c = (c_0, c_1)$ adott vektor. Az (x_0, x_1) vektort néha röviden x-szel jelöljük, és hasonlóképp a $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ vektort b-vel. Azt mondjuk, hogy a

$$c_0x_0 + c_1x_1 \leq \gamma \tag{2.32}$$

egyenlőtlenség **logikai következménye** a (2.31) rendszernek, ha (2.31) minden megoldása teljesíti (2.32)-t. A (2.32) egyenlőtlenség **lineáris következménye** (2.31)-nek, ha létezik olyan $y := (y_0, y_1)$, amelyre

$$y_1 \geq 0,\ y_0P + y_1Q = c_0,\ y_0A + y_1B \geq c_1,\quad yb \leq \gamma. \tag{2.33}$$

TÉTEL 2.41 *Feltéve, hogy R nemüres, (2.32) akkor és csak akkor lineáris következménye (2.31)-nek, ha logikai.*

TÉTEL 2.42 (Dualitás tétel, speciális alak) *Tegyük fel, hogy mind az $R := \{Bx \leq b, x \geq 0\}$ primál, mind az $R^* := \{yB \geq c, y \geq 0\}$ duál poliéder nemüres. Ekkor $cx \leq by$ fennáll minden $x \in R, y \in R^*$ esetén, és van olyan $x^* \in R, y^* \in R^*$, melyekre egyenlőség érvényes, azaz $\max\{cx : x \in R\} = \min\{by : y \in R^*\}$.*

2.4.4 Neumann tétele

Egy vektor **tetején** értsük a legnagyobb komponensének az értékét. A vektor **alja** legyen a legkisebb komponensének az értéke.

TÉTEL 2.43 (Neumann János) *Tetszőleges nemüres A mátrixra az A oszlopvektorai által feszített politopban lévő elemek tetejének a minimuma egyenlő az A sorvektorai által feszített politopban lévő elemek aljának maximumával. Formálisabban, $\min\{(\max Ax) : x \geq 0, 1x = 1\} = \max\{(\min yA) : y \geq 0, 1y = 1\}$, ahol az $1x$ rövidítés a csupa 1 vektor és az x skalárszorzatát jelöli.*

2.4.5 Egy játekelméleti alkalmazás

TÉTEL 2.44 (Neumann) *Tetszőleges A mátrix által meghatározott mátrixjáték esetén a sorjátékos várható nyereségének maximuma egyenlő az oszlopjátékos várható veszteségének minimumával.*

2.5 POLIÉDEREK HATÁROLÓ ALKATRÉSZEI

2.5.1 Csúcsok és extrém irányok

TÉTEL 2.45 *Az R csúcsos poliéder egy z elemére a következők ekvivalensek.*
(i) *z csúcs.*
(ii) *z bázis-megoldás.*
(iii) *Létezik olyan c vektor, amelyre $cz > cx$ fennáll R minden z-től különböző x elemére.*

TÉTEL 2.46 *Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéderre a következők ekvivalensek.*
(1) *R csúcsos.*
(2) *R egyenes-mentes.*
(3) *Q oszlopai lineárisan függetlenek.*

Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéderhez hozzárendelhetjük az $A := \{q : Qq = 0\}$ **karakterisztikus alter**et.

TÉTEL 2.47 *Valamely nemnulla q vektorra a következők ekvivalensek.*
(1) *q eleme a karakterisztikus altérnek (azaz $Qq = 0$).*
(2) *R bármely x pontjára $x + \lambda q$ minden valós λ-ra R-ben van (vagyis az x-en átmenő q irányú egyenes R-ben van).*
(3) *R-nek van olyan z pontja, amelyre $z + \lambda q$ minden valós λ-ra R-ben van.*

Következmény 2.48 *Egy nemüres poliéder akkor és csak akkor egyenes-mentes, ha a definiáló mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.* •

Következmény 2.49 *Az R poliéder egy z pontját tartalmazó legbővebb, R-ben fekvő affin altér az A karakterisztikus altér z-vel való eltoltja.*

Egy poliéder **belső dimenzióján** a benne fekvő maximális affin altér dimenzióját értettük.

Következmény 2.50 *Egy $R := \{x : Qx \leq b\} \subseteq \mathbf{R}^n$ poliéder belső dimenziója $n - r(Q)$.*

A $\vec{q}$ irány a **poliéder iránya**, ha R minden x elemére az $\{x + \lambda q : \lambda \geq 0\}$ félegyenes R-ben van.

TÉTEL 2.51 *Valamely nemnulla q vektorra a következők ekvivalensek.*
(1) *$\vec{q}$ a poliéder iránya.*
(2) *R-nek van olyan z pontja, amelyre a $\{z + \lambda q : \lambda \geq 0\}$ félegyenes R-ben van.*
(3) *$Qq \leq 0$.*

A poliéder irányai által alkotott kúpot **karakterisztikus** (néha **recessziós**) **kúpnak** nevezik.

Következmény 2.52 *Egy poliédernek és karakterisztikus kúpjának extrém irányai ugyanazok.* •

TÉTEL 2.53 *Minden R egyenes-mentes (azaz csúcsos) poliéder előáll mint a csúcsai által feszített R_K politop valamint a poliéder C karakterisztikus kúpjának a vektor-összege.*

TÉTEL 2.54 *Egy R nemüres poliéderre a következők ekvivalensek.*
(1) *R korlátos,*
(2) *R nem tartalmaz félegyenest,*
(3) *R karakterisztikus kúpja, $\{x : Px = 0, Qx \leq 0\}$ triviális.*
(4) *R a csúcsainak konvex burka.*

TÉTEL 2.55 *Legyen a $C := \{x : Mx \leq 0\}$ nemtriviális kúp egyenes-mentes, és legyen $Z := \{x : Mx \leq 0, ax = -1\}$ poliéder, ahol $a := 1 \cdot M$ az M sorainak az összege. Ekkor tetszőleges $z \in Z$ esetén $\vec{z}$ a kúp iránya. A kúp tetszőleges $\vec{q}$ iránya egyetlen z pontban metszi Z-t. Z korlátos. Egy $z \in Z$ pont akkor és csak akkor csúcsa Z-nek, ha $\vec{z}$ extrém iránya C-nek.*

Következmény 2.56 *C egyenes-mentes nemtriviális metszet-kúpnak véges sok extrém iránya van, és C ezen irányok generált kúpja.* •

Következmény 2.57 *A $C = \{x : Mx \leq 0\}$ egyenes-mentes kúp egy z nemnulla eleme által meghatározott $\vec{z}$ irány akkor és csak akkor extrém iránya C-nek, ha z merőleges az M mátrix $r(M) - 1 (= n - 1)$ lineárisan független sorára.*

Következmény 2.58 *Minden R egyenes-mentes (azaz csúcsos) poliéder előáll mint a csúcsai által feszített politopnak valamint az extremális irányai által generált (csúcsos) kúpnak (vagyis az R karakterisztikus kúpjának) a vektor-összege.* •

TÉTEL 2.59 *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéder az $A := \{x : Qx = 0\}$ karakterisztikus altér és az $R' := R \cap A^{\perp}$ poliéder vektor-összege, ahol $A^{\perp}$ az A altér ortogonális kiegészítője (vagyis a Q sorai által generált altér). Továbbá, az R' poliéder egyenes-mentes (=csúcsos).*

Következmény 2.60 *Egy $R := \{x : Mx \leq 0\}$ metszet-kúp az $A := \{x : Mx = 0\}$ karakterisztikus altér (ami speciális metszet-kúp) és az $R' := R \cap A^{\perp}$ csúcsos metszet-kúp vektor-összege.*

2.5.2 Oldalak

Egy R nemüres poliéder F **oldala** (face) R-nek egy

$$F := \{x \in R : cx = \delta\} \tag{2.34}$$

alakú nemüres részhalmaza, ahol $\delta := \max\{cx : x \in R\}$ valamely cx célfüggvényre, melyre a maximum létezik. Egy R-től különböző oldalt **valódi oldal**nak nevezünk. **Valódi oldalon** (proper face) olyan oldalt értünk, amely nem az egész poliéder. Poliéder **minimális oldalán** egy tartalmazásra nézve minimális oldalt értünk. Egy tartalmazásra nézve maximális valódi oldalt **lapnak** (facet) nevezünk.

TÉTEL 2.61 *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy nemüres F részhalmaza akkor és csak akkor oldala R-nek, ha létezik a Q bizonyos soraiból álló olyan Q' Q' részmátrix, amelyre $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$, ahol b' a Q' sorainak megfelelő részvektora b-nek.*

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{2.35}$$

A $Qx \leq b$ rendszer egy $qx \leq \beta$ egyenlőtlenségéről azt mondjuk, hogy **implicit egyenlőség**, ha R minden eleme egyenlőséggel teljesíti Az implicit egyenlőségek által alkotott egyenlőség-rendszert $Q^= x = b^=$-vel jelöljük. Egy nem implicit egyenlőtlenséget **valódinak** mondunk, és az általuk alkotott rendszert $Q^< x \leq b_1^<$-vel jelöljük.

A $Qx \leq b_1$ egyenlőtlenség-rendszer egyik $qx \leq \beta$ tagját **feleslegesnek** nevezzük (a (2.35)-re nézve), ha az elhagyásával keletkező rendszer ugyanazt a poliédert definiálja. Egy nem felesleges egyenlőtlenség neve **lényeges**. Egy $Px = b_0$-beli egyenlőség **lényeges** vagy **felesleges** annak megfelelően, hogy kihagyása R-nél bővebb poliédert eredményez-e vagy R-t változatlanul hagyja.

Nevezzük az R poliéder (2.35) alakú leírását **minimálisnak**, ha minden egyenlőség és egyenlőtlenség lényeges és minden egyenlőtlenség valódi.

Lemma 2.62 *Ha $qx \leq \beta$ valódi és lényeges egyenlőtlensége* (2.35)*-nek, akkor R-nek van olyan z pontja, amelyre $qz = \beta$.*

TÉTEL 2.63 *Tegyük fel, hogy az R poliéder egy minimális* (2.35) *alakú rendszerrel van adva. A következő állítások ekvivalensek.*
(i) *R affin altér.*
(ii) *R-nek nincs valódi oldala.*
(iii) *Minden lényeges egyenlőtlenség implicit egyenlőség (azaz Q üres).*

Következmény 2.64 *Minden minimális oldal affin altér.* •

Lemma 2.65 *Az R poliédernek van olyan eleme, amely minden valódi egyenlőtlenséget szigorúan teljesít.*

TÉTEL 2.66 *Tegyük fel, hogy (2.35) minimális leírása R-nek. Az R akkor és csak akkor van benne egy $H := \{x : ax = \beta\}$ hipersíkban (másszóval $ax = \beta$ akkor és csak akkor logikai következménye (2.35)-nek), ha létezik olyan y_0, amelyre $y_0 P = a$ és $y_0 b_0 = \beta$ (azaz, $ax = \beta$ lineáris következménye $Px = b_0$-nak.)*

Lemma 2.67 *Tegyük fel, hogy R egy minimális (2.35) rendszerrel van megadva. Legyen F az R-nek egy oldala. Legyen Q' a Q-nak egy $m' \times n$-es részmátrixa. A Q' által meghatározott $F' := \{x \in R : Q'x = b'_1\}$ oldal akkor és csak akkor ugyanaz mint F, ha Q' része $Q_F^=$-nek és $r(Q') = r(Q_F^=)$.*

TÉTEL 2.68 *A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha eleme az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy minimális oldalának.*

2.5.3 Dimenzió, lapok

Egy altér **dimenziója** a belőle kiválasztható lineárisan független elemek maximális száma.

TÉTEL 2.69 *Tegyük fel, hogy a nemüres R poliédert definiáló (2.35) rendszer minimális. Ekkor a legszűkebb R-t tartalmazó affin altér $Z := \{x : Px = b_0\}$*

Következmény 2.70 *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliédert tartalmazó legszűkebb affin altér $Z_R := \{x : Q^= x = b^=\}$, ahol $Q^=$ jelöli az implicit egyenlőségeknek megfelelő részmátrixot. A poliéder dimenziója $n - r(Q^=)$.* •

Következmény 2.71 *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy F oldalát tartalmazó legszűkebb affin altér $\{x : Q_F^= x = b_F^=\}$. Az F oldal dimenziója $n - r(Q_F^=)$. Minimális oldal dimenziója $n - r(Q)$.* •

Egy c vektort illetve az általa meghatározott cx célfüggvényt akkor mondjuk **semlegesnek** (vagy neutrálisnak) az $R =: \{x : Qx \leq b\}$ poliéderre nézve, ha R minden x elemére cx értéke ugyanannyi.

TÉTEL 2.72 *A semleges vektorok S_R altere éppen a Q-t tartalmazó legszűkebb Z_R affin altér A_R karakterisztikus alterének ortogonális kiegészítője. Egy c vektor akkor és csak akkor semleges, ha benne van $Q^=$ sorterében.*

Egy poliéder két csúcsát nevezzük **szomszédosnak**, ha az összekötő szakaszuk a poliéder oldala.

TÉTEL 2.73 *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ csúcsos poliéder u és v csúcsaira a következők ekvivalensek.*
(i) u és v szomszédosak.
(ii) A Q azon soraiból alkotott $Q^{=}_{uv}$ részmátrix, melyeknek megfelelő egyenlőtlenségeket mind u, mind v egyenlőséggel teljesíti, $n-1$ rangú.
(iii) Léteznek Q-nak olyan Q_u és Q_v $n \times n$-es nemszinguláris részmátrixai, amelyekre u a $Q_u x = b_u$ rendszer, míg v a $Q_v x = b_v$ rendszer egyértelmű megoldásai, és amelyeknek $n-1$ soruk közös.

TÉTEL 2.74 *Tegyük fel, hogy a $\{Px = b_0,\ Qx \leq b_1\}$ rendszer minimális, és hogy az R megoldás halmaz nemüres. Ekkor az R-t tartalmazó legszűkebb affin altér $\{x : Px = b_0\}$. Továbbá egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn az R lapjai és a $Qx \leq b_0$ egyenlőtlenségei között, azaz $\{x \in R :\ _iqx = b_1(i)\}$ lapot alkot, és minden lap előáll ilyen alakban.*

Következmény 2.75 *Minden valódi oldal lapok metszete.* •

2.6 A SZIMPLEX ALGORITMUS

2.6.1 Megengedettség

TÉTEL 2.76 *Az $\{Ax = b,\ x \geq 0\}$ rendszernek akkor és csak akkor van olyan megoldása, amelyben az x pozitív változóinak megfelelő A-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ha nem létezik olyan y, amelyre $yA \geq 0,\ yb < 0$ és A-nak létezik $r(A, b) - r(b)$ lineárisan független oszlopa, amelyekre y merőleges.* •

TÉTEL *A szimplex algoritmus a Bland kiválasztási szabállyal véges sok lépésben véget ér.* •

2.6.2 Optimalizálás

Lemma 2.77 *y_1 csúcsa R^*-nak.*

3. Fejezet

OPTIMALIZÁLÁS GRÁFOKON

3.1 TELJESEN UNIMODULÁRIS MÁTRIXOK

Az A mátrixot akkor nevezünk **teljesen unimodulárisnak**, ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű.

TÉTEL 3.1 (a) *Digráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.* (b) *Páros gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.*

Hipergráfon egy $(V, \mathcal{F})$ párt értünk, ahol V adott alaphalmaz, $\mathcal{F}$ pedig V részhalmazainak egy rendszere, amelyben ugyanaz a részhalmaz több példányban is szerepelhet. Az $\mathcal{F}$ tagjai a hipergráf **hiperélei**. Egy H hipergráfot akkor nevezzünk **teljesen unimodulárisnak,** ha H incidencia mátrixa teljesen unimoduláris. Egy hipergráfot **laminárisnak** mondunk, ha bármely két hiperéle vagy diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat.

A **hálózati mátrix**hoz legyen D olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő és legyen F egy feszítő fa. Az A mátrix sorai az F éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az F-en kívüli éleknek. Minden uv nem-fa élre a fában egy egyértelmű (nem biztosan irányított) út vezet v-ből u-ba. ennek egy f elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha f iránya megegyezik az útéval és -1-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix minden más eleme 0.

Lemma 3.2 *Hálózati mátrix részmátrixa is az. Hálózati mátrix sorát vagy oszlopát -1-gyel szorozva hálózati mátrixot kapunk.*

TÉTEL 3.3 *Az A hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

Következmény 3.4 *Egy olyan hipergráf, amely egy irányított fa élhalmazán van definiálva és a hiperélek irányított utak, teljesen unimoduláris.*

TÉTEL 3.5 *M teljesen unimoduláris.*

3.2 A FARKAS LEMMA ÉS A DUALITÁS TÉTEL TU-MÁTRIXOKRA

Lemma 3.6 *Tetszőleges M TU-mátrixszal megadott egyenlőtlenség-rendszer esetén, ha a jobboldali korlátozó b vektor egész, akkor minden erős bázis-megoldás egész.*

Lemma 3.7 *Legyen c tetszőleges (nem feltétlenül egészértékű) vektor. Bármely M TU-mátrixszal megadott K metszetkúpnak, ha van olyan x' eleme, amelyre $cx' > 0$, akkor K-nak van ilyen $(0, \pm 1)$-értékű eleme is.*

TÉTEL 3.8 *Tegyük fel, hogy az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris. Ha a (??) primál probléma oldható meg és a korlátozó b vektor egész, akkor (??)-nek van egész megoldása is. Ha az*

$$y_1 \geq 0, yM = 0, yb < 0 \tag{3.1}$$

duális probléma oldható meg, ahol $y = (y_0, y_1)$, akkor van $(0, \pm 1)$-értékű y megoldás is (függetlenül b egészértékűségétől).

TÉTEL 3.9 *Ha a* $\max(cx : Px = b_0, Qx \leq b_1)$ *lineáris programozási problémának létezik megoldása, az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris és b egész, akkor az optimum egész vektoron is felvétetik (függetlenül attól, hogy c egészértékű vagy sem).*

TÉTEL 3.10 *Tegyük fel, hogy $R = \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ nemüres, b egész vektor, és M teljesen unimoduláris. A következők ekvivalensek.*
(1) $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos.
(2) Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$-értékű x' vektor, amelyre $Px' = 0, Qx' \leq 0$, és $cx' > 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$ és $yM = c$, és amely egész, amennyiben c egész. •

TÉTEL 3.11 *Tegyük fel, hogy az* $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1)\}$ *poliédernek* x^* *egy eleme, az* $M = \binom{P}{Q}$ *mátrix teljesen unimoduláris és* b *egész. Jelölje* $Q_*^=$ *azon részmátrixát* Q*-nak, amely sorainak megfelelő egyenlőtlenségeket* x^* *egyenlőséggel teljesíti. A következők ekvivalensek.*
(1) x^* *maximalizálja* cx*-t* R *fölött.*
(2) Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$*-értékű* x' *vektor, amelyre* $Px' = 0$, $Q_*^= x' \leq 0$, *és* $cx' > 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ *vektor, amelyre* $y_1 \geq 0$ $yM = c$, $y(B - Mx^*) = 0$, *és* y *egész, amennyiben* c *egész.* •

TÉTEL 3.12 (Kőnig) *Páros gráfban a független élek maximális* ν *száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális* τ *számával.*

TÉTEL 3.13 (Egerváry) *Páros gráfban egy párosítás maximális költsége egyenlő* $\min(\sum_{v \in V} \pi(v) : \pi \geq 0, \pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ *minden* uv *élre). Ha* c *egészértékű, az optimális* π *is választható egészértékűnek.* •

3.3 KEREKÍTÉS ÉS EGYENLETES SZÍNEZÉS

Akkor mondjuk, hogy egy z egész szám az x **szám kerekítése,** ha $|x - z| < 1$. A z vektor az x **vektor kerekítése**, ha minden komponense kerekítés. Egy x nem-egész szám $\lfloor x \rfloor$ alsó egész részén a legnagyobb x-nél kisebb egész számot értjük, míg $\lceil x \rceil$ felső egész részen a legkisebb x-nél nagyob számot.

Lemma 3.14 *Legyen* A *teljesen unimoduláris mátrix és* x_0 *egy vektor. Ekkor létezik egy olyan* q *egészértékű vektor, amelyre* $\lfloor x_0 \rfloor \leq q \leq \lceil x_0 \rceil$ *és* $\lfloor Ax_0 \rfloor \leq Aq \leq \lceil Ax_0 \rceil$ *. Más szóval az* x_0*-nak van olyan* q *kerekítése, hogy az* A *minden* a *sorára* aq *kerekítése* ax_0*-nak.*

TÉTEL 3.15 *Tetszőleges* $m \times n$*-es* B *mátrixnak van olyan kerekítése, hogy a következő mennyiségek mind egynél kevesebbel változnak: minden sorösszeg, minden oszlopösszeg, az első* j *sor elemeinek összege* $(j = 1, 2, \ldots, m)$, *az első* i *oszlop elemeinek összege* $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

TÉTEL 3.16 *Legyen* A *TU-mátrix,* b *egész vektor,* k *pozitív egész. Legyen* z *olyan egész vektor, amelyre* $Az \leq kb$. *Ekkor* z *előáll olyan* $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *egész vektorok összegeként, melyekre* $Az_i \leq b$.

Következmény 3.17 *Ha* $z \geq 0$ *olyan egész vektor, amelyre* $kb_1 \leq Az \leq kb_2$, *akkor* z *felbomlik olyan* $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *egész vektorok összegére, melyekre* $z_i \geq 0$, *és* $b_1 \leq Az_i \leq b_2$.

Az A oszlopainak egy partícióját (”színezését”) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ részre akkor nevezzük **egyenletesnek**, ha A minden a sorára érvényes, hogy a sornak az egyes A_i részekbe eső elemeinek összege minden A_i-re lényegében ugyanaz, tehát $\lfloor 1a/k \rfloor$ vagy $\lceil 1a/k \rceil$.

TÉTEL 3.18 *Az* A *TU-mátrix oszlopainak létezik egyenletes* k *színezése.*

Következmény 3.19 *Egy páros gráf éleit meg lehet* k *színnel úgy színezni, hogy minden* v *csúcsra és mindegyik* j *színre* $(j = 1, \ldots, k)$ *a* v*-be menő* $d(v)$ *darab él közül* $\lfloor d(v)/k \rfloor$ *vagy* $\lceil d(v)/k \rceil$ *darab színe* j. *Ha* k*-t a maximális fokszámnak választjuk, akkor megkapjuk Kőnig élszínezési tételét, amely szerint páros gráf kromatikus indexe (élszínezési száma) a maximális fokszámmal egyenlő. Ha* k*-t a minimális* δ *fokszámnak választjuk, akkor Gupta egy tételét kapjuk, amely szerint* G *páros gráf élhalmaza felbontható* δ *részre úgy, hogy mindegyik rész fedi az összes pontot.* •

Következmény 3.20 *Adott egy* F *irányított fa (speciális esetben irányított út) és* F *irányított részútjainak egy* $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ *rendszere, ahol minden utat* F*-élek egy részhalmazának tekintünk.* $\mathcal{P}$ *tagjai megszínezhetők* k *színnel (minden* k *pozitív egészre) úgy, hogy* F *minden* e *élére az* e*-t tartalmazó egyszínű utak száma minden színre lényegében ugyanannyi, ahol a ”lényegében ugyanannyi” azt jelenti, hogy bármely két színosztályra az eltérés legfeljebb egy lehet.* •

Következmény 3.21 *Adott egy* F *irányított fa és* F *irányított részútjainak egy* $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ *rendszere, ahol minden utat* F*-élek egy részhalmazának tekintünk. Az* F *élei megszínezhetők* k *színnel (minden* k *pozitív egészre) úgy, hogy* $\mathcal{P}$ *minden tagjában a színek lényegében egyenletes számban fordulnak elő.* •

3.4 ÁRAMOK ÉS FOLYAMOK

Jelöljön $D = (V, E)$ egy irányított gráfot. Legyen $f : E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : E \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Valamely $x : E \to \mathbf{R}$ vektorra és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in E, uv$ belép S-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$. Az x vektort **áramnak** (circulation) nevezzük, ha teljesül a rá **megmaradási szabály** (conservation rule), azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. Az x áramot **megengedettnek** (feasible) mondjuk, ha $f \leq x \leq g$.

TÉTEL 3.22 *Tegyük fel, hogy* f *és* g *egész. A megengedett áramok halmaza, amennyiben nemüres, egész poliéder.*

TÉTEL 3.23 (Alan Hoffman, 1960) *Akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{3.2}$$

Továbbá, ha f *és* g *egészértékűek és (3.2) fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett áram is.*

$\gamma(X) := \delta_g(X) - \varrho_f(X)$.

Lemma 3.24 $\gamma(X) + \gamma(Y) = \gamma(X \cap Y) + \gamma(X \cup Y) + d_{g-f}(X, Y)$.

TÉTEL 3.25 *Akkor és csak akkor létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektor (amely ráadásul egészértékű, ha f és g is az), amelyre $f(uv) \leq \pi(v) - \pi(u) \leq g(uv)$ minden $e = uv$ élre, ha a c'-vel élsúlyozott D' segédgráfban nincsen negatív kör, ahol uv akkor eleme D'-nek, ha vagy $uv \in E$ és ekkor $c'(uv) := g(uv)$, vagy $vu \in E$ és ekkor $c'(uv) := -f(vu)$.*

TÉTEL 3.26 *Adott $c : E \to \mathbf{R}$ költség-függvényre akkor és csak akkor létezik olyan (***megengedett potenciálnak** *nevezett) $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektor, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ minden $e = uv$ élre, ha nem létezik negatív költségű irányított kör. Amennyiben c egészértékű, úgy a potenciál is választható annak.*

TÉTEL 3.27 *Feltéve, hogy létezik megengedett áram, a következők ekvivalensek.*
(a) cx korlátos alulról,
(b) nincs negatív összköltségű irányított kör D'-ben,
(c) létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } g(uv) = \infty,$$

és

$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } f(uv) = -\infty.$$

Biz. A (b) és (c) feltételek ekvivalenciája következik a 3.25

TÉTEL 3.28 *Adott x megengedett áram esetén a következők ekvivalensek.*
*(a) x optimális megoldása (**??**)-nak,*
(b) D_x-ben nem létezik negatív összköltségű irányított kör,
(c) létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } x(uv) < g(uv),$$

és

$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } x(uv) > f(uv). \bullet$$

TÉTEL *Hálózati mátrixokkal megadott lineáris programok megoldhatók áram problémaként.*

TÉTEL 3.29 (Maximális-Folyam Minimális-Vágás) *Akkor és csak akkor létezik k nagyságú megengedett folyam, ha minden S $s\bar{t}$-halmazra $\delta_g(S) \geq k$. Ha e feltétel teljesül, és g egészértékű, k pedig egész, úgy a folyam is választható egészértékűnek.*

TÉTEL 3.30 *A megengedett st-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\delta_g(S)$ értékek minimumával, ahol a minimum az összes $s\bar{t}$-halmazra megy. Ha g egészértékű, úgy a maximum egészértékű folyamon is felvétetik.*

Lemma 3.31 *(a) Ha x M-nagyságú megengedett st-folyam D'-ben (a g' kapacitásra vonatkozóan), akkor $f + x$ (az eredeti A-ra megszorítva) megengedett áram.*
(b) Ha $\delta_{g'}(X + s) < M$ valamely $X \subseteq V$ halmazra, akkor X megsérti a Hoffman féle (3.2) feltételt.

3.5 LEGRÖVIDEBB SÉTÁK ÉS UTAK

Digráfban **sétán** egy olyan $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ sorozatot értünk, amelyben felváltva következnek pontok és élek, és mindegyik e_i él a v_{i-1} pontból vezet a v_i pontba. A séta **zárt,** ha $v_0 = v_k$. A szereplő élek száma a séta **hossza.** Azt mondjuk, hogy v_0 a séta kezdőpontja, v_k a séta végpontja. Amennyiben nincs ismétlődés, **útról** beszélünk. Egy s-ből v-be vezető utat sv-útnak fogunk hívni.

3.5.1 Nemnegatív költségek: Dijkstra algoritmusa

Legyen c nemnegatív. Egy s **gyökerű fenyőn**, röviden s-fenyőn egy olyan irányított fát értünk, amelynek minden pontja az s-ből irányított úton elérhető. Amennyiben a fenyő minden v pontjára az s-ből odavezető út a D digráf egy legolcsóbb s-ből v-be vezető útja, úgy **legolcsóbb utak** egy **s-fenyőjéről** beszélünk. Jelölje $w_n(v)$ az s-ből v be vezető legolcsóbb út költségét.

Lemma 3.32 *Legyen T egy legolcsóbb utak s-fenyője és tegyük fel, hogy az $m_T := \min(w_n(u) + c(uv) : uv \text{ kilép } T\text{-ből})$ minimum valamely $a = u_a v_a$ élen vétetik fel. Ekkor $T' := T + a$ is legolcsóbb utak fenyője.*

3.5.2 Konzervatív költségek

TÉTEL 3.33 *Egy c súlyozás akkor és csak akkor konzervatív, ha létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$* **megengedett potenciálnak** *nevezett függvény a csúcsokon, amelyre*

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) \text{ fennáll minden } uv \text{ élre.} \tag{3.3}$$

Továbbá, ha c egészértékű, akkor π is választható annak.

Következmény 3.34 *l megengedett potenciál.*

Egy uv élt a továbbiakban **pontos**nak fogunk hívni (π-re nézve), ha (3.3)-et egyenlőséggel teljesíti. Tetszőleges π potenciál által definiált $t(uv) := \pi(v) - \pi(u)$ költség-függvényt **potenciál-különbségnek** vagy **tenziónak** nevezünk.

TÉTEL 3.35 *Konzervatív c súlyozás esetén az s-ből t-be vezető utak súlyának $l(t)$ minimuma egyenlő $\pi(t) - \pi(s)$ maximumával, ahol a maximum az összes megengedett π potenciálon veendő.*

Következmény 3.36 *Ha P olyan st-út, amely valamely megengedett π potenciálra nézve pontos élekből áll, akkor P legolcsóbb st-út.* •

3.5.3 Aciklikus digráfok: a kritikus út módszere

3.6 A MAGYAR MÓDSZER

3.6.1 Maximális elemszámú párosítások

TÉTEL 3.37 (Kőnig Dénes) *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.*

TÉTEL 3.38 *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik S-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-féle feltétel:*

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ minden } X \subseteq S \text{ részhalmazra,} \tag{3.4}$$

ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon T-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.

Definiáljuk egy $X \subseteq S$ halmaz **hiányát** a $h(X) := (|X| - |\Gamma(X)|)$ értékkel és legyen $\mu = \mu(G, S)$ a maximális hiány, azaz

$$\mu := \max_{X \subseteq S} h(X) \tag{3.5}$$

TÉTEL 3.39 *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy párosítás által nem fedett S-beli pontok minimális száma egyenlő μ-vel.*

Lemma 3.40 *$\mathcal{F}$ zárt a metszet és unió képzésre.*

Lemma 3.41 *Legyen $K \subseteq S$ a legszűkebb max-hiányú halmaz G-ben. Ha a gráfból kitöröljük az összes olyan élt, amely $\Gamma(K)$ és $S - K$ között vezet, akkor a létrejövő G' gráfban a maximális hiány ugyanaz, mint G-ben. Továbbá G és G' max-hiányú halmazainak rendszere ugyanaz.*

3.6.2 Maximális súlyú párosítások

Nevezzünk egy pontokon értelmezett π függvényt **súlyozott lefogásnak**, ha minden uv élre $\pi(u)+\pi(v) \geq c(uv)$. Egy élt **pontosnak** fogunk nevezni (π-re nézve), ha itt egyenlőség áll. A π súlyozott lefogás $\pi(V)$ **súlyán** a $\sum(\pi(v) : v \in A \cup B)$ összeget értjük.

TÉTEL 3.42 (Egerváry) *tegyük fel, hogy a $G = (S, T; E)$ páros gráfnak létezik teljes párosítása. A teljes párosítások maximális ν_c súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális τ_c súlyával. Amennyiben c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.*

TÉTEL 3.43 *Egy $G' = (S', T'; E')$ páros gráfban nemnegatív c súlyfüggvény esetén a párosítások maximális ν'_c súlya egyenlő a nemnegatív (!) súlyozott lefogások minimális τ'_c súlyával. Amennyiben c egészértékű, az optimális π' is választható egészértékűnek.*

3.7 A NÖVELŐ UTAK MÓDSZERE

Az **optimalitási feltételek**:
(a) $x(a) = g(a)$ minden a élre, amely kilép S-ből, és
(b) $x(a) = 0$ minden a élre, amely belép S-be.

x folyamra legyen $D_x = (V, A_x)$ a következő. Egy uv él A_x-hez tartozik, ha vagy (i) $uv \in A$ és $x(uv) < g(uv)$, és ekkor ezen élét D_x-nek **előre** élnek hívjuk, vagy (ii) $vu \in A$ és $x(vu) > 0$, és ekkor uv neve **hátra** él. Jelölje S az s-ből D_x-ben elérhető pontok halmazát.

1. Eset *$t \notin S$, azaz t nem érhető el s-ből.*
2. Eset *$t \in S$, azaz t elérhető s-ből.*

3.7.1 A skálázási technika

3.7.2 Legrövidebb növelő utak

Jelölje $\sigma_x(v)$ a v távolságát D_x-ben s-től.

Lemma 3.44 *Amikor P mentén végrehajtunk egy növelést, a $\sigma_x(v)$ érték semmilyen v-re sem csökken.*

Lemma 3.45 *Egy fázison belül legfeljebb $|A|$ növelésre kerülhet sor.*

3.8 MINIMÁLIS KÖLTSÉGŰ FOLYAMOK

Egy z folyam **költségét** a $cz = \sum(c(e)z(e) : e \in A)$ skaláris szorzattal definiáljuk. A z st-folyam **minimális költségű folyam**, ha z a legkisebb költségű a z-vel azonos nagyságú megengedett st-folyamok közül.

Legyen $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény a V-n, amelyre $\pi(s) = 0 \le \pi(v) \le \pi(t)$ minden $v \in V$-re. Ilyen függvényt **potenciálnak** hívunk. $\bar{c}(uv) = c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$. Optimalitási feltételek:

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \qquad (ii)$$

ITERATÍV LÉPÉS z folyam és a π potenciálra legyen $D' = (V, A')$-ben egy uv él **előre él**, ha $uv \in A, \bar{c}(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Egy uv él **hátra él**, ha $vu \in A, \bar{c}(vu) = 0$ és $z(vu) > 0$.
1. Eset *$t \notin S$, azaz t nem elérhető s-ből.*

Állítás 3.46 *A módosított potenciál és a változatlanul hagyott z folyam kielégíti az optimalitási feltételeket.*

2. Eset *$t \in S$, vagyis t elérhető s-ből.*

Állítás 3.47 *A módosított folyam és változatlanul hagyott potenciál kielégíti az optimalitási feltételeket.*