1. Fejezet

LINEÁRIS ALGEBRA ÉS POLIÉDEREK

1.1 VEKTORTÉR, ALTÉR, LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG

Az alábbiakban áttekintjük a V Euklideszi vektortér néhány alaptulajdonságát. Az alaptest mindig a valós ($\mathbf{R}$) vagy a racionális ($\mathbf{Q}$) számok teste. Amikor Euklideszi vektortérről beszélünk, a valós szám n-esek $\mathbf{R}^n$ terére (vagy a racionális szám n-esek $\mathbf{Q}^n$ terére) gondolunk. (Lineáris algebrában bebizonyítják, hogy bármely két n dimenziós Euklideszi vektortér egymással izomorf.) Mindig az $\mathbf{R}$-t használjuk alaptestként, de valamennyi állítás érvényes a $\mathbf{Q}$ esetén is. Remélhetőleg nem okoz majd zavart, hogy jelölésben nem teszünk különbséget a 0 szám és a vektortér nulleleme között. A vektortér elemeit néha vektoroknak, néha pontoknak tekintjük.

Legyen x és y két azonos dimenziós vektor. Azt mondjuk, hogy $x \geq y$, ha x minden komponense nagyobb vagy egyenlő y megfelelő komponensénél. Amennyiben $x \leq y$ és $x \neq y$, úgy az $x < y$ jelölést használjuk. Amikor x minden komponense szigorúan kisebb az y megfelelő komponensénél, az $x \ll y$ jelölést használjuk.

Adott $x_1, \ldots, x_k$ vektorok és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számok esetén a $b := \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ vektort az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok egy **lineáris kombinációjának** nevezzük. Ha a λ_i számok összege 1, **affin kombinációról** beszélünk, ha valamennyi λ_i nem-negatív, úgy **nem-negatív kombinációról** van szó. Egy nem-negatív, affin kombinációt **konvex kombinációnak** mondunk. Amennyiben a $b \neq 0$ elem előáll az $x_1, \ldots, x_k$ elemek lineáris kombinációjaként, úgy azt mondjuk, hogy b **lineárisan függ** az $x_1, \ldots, x_k$ elemektől. Ha b-nek nincs ilyen előállítása, akkor b **lineárisan független** az $x_1, \ldots, x_k$ elemektől. A lineáris kombináció **triviális,** ha mindegyik λ_i együttható 0. Ha legalább az egyikük nem-nulla, **nem-triviális lineáris kombinációról** beszélünk. Azt mondjuk, hogy az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok **lineárisan összefüggnek,** ha a vektortér nulleleme előáll nem-triviális lineáris kombinációjukként. Ha nincs ilyen előállítás, úgy az $x_1, \ldots, x_k$ vektorokat **lineárisan függetlenek**nek mondjuk. Az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok **kört** alkotnak, ha lineárisan összefüggnek, de bármely valódi részük már lineárisan független. (Az elnevezés a gráfelmélet kör-fogalmából jön és nincs köze a geometria kör-fogalmához.) Könnyű ellenőrizni, hogy egy kör bármely eleme lineárisan függ a kör többi elemétől. (Ha csak azt tesszük fel, hogy az $x_1, \ldots, x_k$ elemek lineárisan összefüggnek, akkor nem feltétlenül igaz az, hogy mindegyik x_i elem lineárisan függ a többitől. Például, az $(1,0), (2,0), (0,1)$ kétdimenziós vektorok lineárisan összefüggnek, de a (0,1) vektor nem állítható elő az $(1,0)$ és $(2,0)$ vektorok lineáris kombinációjaként.)

Egy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ egymás mellé leírt szám n-est sorvektornak tekintünk, míg ha ezeket az elemeket egymás alá írjuk, oszlopvektorról beszélünk. Ha a sor-vektor, akkor a^t az a transzponáltja, azaz az a-nak megfelelő oszlopvektor.

Legyen X és Y két vektor-halmaz $\mathbf{R}^n$-ben. Ekkor a **vektor-összegükön** vagy röviden **összegükön** az $X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ halmazt értjük. A különbségük analóg módon definiálható.

A V vektortér A **altere** egy olyan nemüres részhalmaza V-nek, amelyre fennáll, hogy

1. $x \in A \Rightarrow \lambda x \in A$ minden $\lambda \in \mathbf{R}$ számra,
2. $x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$.

Nyilván az egyetlen nulla elemből álló halmaz altér, az ún. **triviális altér.** Maga az egész V is altér. A definícióból következik, hogy a vektortér 0 eleme minden altérben benne van. Továbbá az altér véges sok elemének bármilyen lineáris kombinációja is az altérben van. Érvényes, hogy alterek metszete is altér. Könnyen ellenőrizhető, hogy két altér összege is altér, éspedig a mindkettőt magában foglaló legszűkebb altér. Egy altér **dimenziója** az altérből kiválasztható lineárisan független elemek maximális száma. Speciálisan a triviális altér dimenziója 0.

Két n-dimenziós $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ vektor **skalárszorzata** az $ab := a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ szám. Természetesen $ab = ba$. Azt mondjuk, hogy a és b **ortogonális**, ha skalárszorzatuk 0. Az $A, B \subseteq V$ halmazokról azt mondjuk, hogy egymásra **ortogonálisak** (vagy **merőlegesek),** ha A mindegyik eleme ortogonális B mindegyik elemére. (Ebben az értelemben tehát a háromdimenziós tér egy vízszintes és egy függőleges síkja nem ortogonális egymásra!) Könnyen látszik, hogy ha egy y vektor ortogonális az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok mindegyikére, akkor ortogonális ezek bármely lineáris kombinációjára is.

A definícióból rögtön adódik, hogy ha $x_1, \ldots, x_k$ a V vektortér véges sok eleme, akkor a lineáris kombinációjukként előálló elemek halmaza alteret alkot, amit az $x_1, \ldots, x_k$ elemek által **generált altérnek** nevezünk. Ez nem más, mint az $X := \{x_1, \ldots, x_k\}$ halmazt tartalmazó alterek metszete, vagyis a legszűkebb X-t magában foglaló altér.

Altereket más módon is előállíthatunk. Legyen $a \in \mathbf{R}^n$ nem-nulla vektor. Az a-ra ortogonális elemek $\{x \in \mathbf{R}^n : ax = 0\}$ halmazát **origón átmenő hipersíknak** nevezzük, melynek (egyik) **normálisa** vagy **normál vektora** a. Könnyen látszik, hogy egy origón átmenő hipersík alteret alkot. Ebből adódik, hogy az ilyen hipersíkok metszete is altér. Másszóval, adott $x_1, \ldots, x_k$ vektorok mindegyikére ortogonális vektorok halmaza alteret alkot, melyet az $x_1, \ldots, x_k$ **ortogonális kiegeszítő alterének** nevezünk.

Legyenek U és V vektorterek. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : U \to V$ leképezés **lineáris transzformáció** (vagy **leképezés),** ha

1. $x \in U, \lambda \in \mathbf{R}$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ és
2. $x, y \in U$ esetén $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az U azon elemeinek halmaza, amelyek a V nulla elemébe képződnek le, az U-nak alterét alkotják, amely alteret a φ leképezés **magterének** neveznek. Hasonlóképpen egyszerű azt belátni, hogy V azon elemei, amelyek valamely U-beli elem képeként állnak elő (azaz a $\{\varphi(u) : u \in U\}$ halmaz elemei), a V-nek alterét alkotják, amely alteret a φ leképezés **képterének** neveznek.

Mese. Egy $x = (x_1, \ldots, x_n)$ szám n-esen néha az $\mathbf{R}^n$ $(x_1, \ldots, x_n)$ koordinátájú pontját értjük, néha az origóból az x pontba mutató vektort. Az affin függetlenség a pontok függetlenségét akarja megragadni, a lineáris függetlenség a vektorok függetlenségét. (Két pont éppen akkor affin független, ha különbözőek, három különböző pont affin függetlensége azzal ekvivalens, hogy nincsenek egy egyenesen.) Pontok egy k elemű halmaza pontosan akkor affin független, ha az egyikből a többibe mutató $k - 1$ vektor lineárisan független. Ez azzal ekvivalens, hogy az eggyel magasabb dimenziós, az új koordinátában egy 1-essel kiegészített vektorok lineárisan függetlenek.

1.2 MÁTRIXOK, EGYENLETRENDSZEREK

Legyen A $m \times n$-es mátrix, azaz A-nak m sora és n oszlopa van. A mátrix i-dik oszlopát a_i-vel jelöljük, a j-dik sorát pedig ${}_ja$-val. Az A **sorterén** az $\mathbf{R}^n$-nek az A sorai által generált alterét értjük, amelynek jele $\mathcal{S}(A)$ vagy $\mathbf{R}^m A$. A sortér tehát az $\{y^t A : y \in \mathbf{R}^m\}$ halmaz. Az A mátrix **nulltere** az A sorainak ortogonális kiegészítő altere, melynek jele $\mathcal{N}(A)$. A nulltér tehát az $Ax = 0$ egyenletrendszer

$\{x \in \mathbf{R}^n : Ax = 0\}$ megoldás-halmaza. Az A oszlopai által generált altér az A **oszloptere,** jelölésben $\mathcal{O}(A)$ vagy $A\mathbf{R}^n$, míg az oszlopainak merőleges altere a mátrix **bal nulltere.** Ennek jele $\mathcal{BN}(A)$.

Mostantól fogva azzal a jelölési egyszerűsítéssel élünk, hogy nem különböztetjük meg az oszlop és sor vektorokat. Ennek megfelelően, ha az Az szorzatot tekintjük, akkor a z-t oszlopvektornak képzeljük, míg az yA szorzat esetén az y-t sorvektornak. Hasonlóképp, két vektor skalárszorzata esetén sem tesszük ki a transzponálási jelet, vagyis az a és b n-dimenziós vektorok skalárszorzatát ab-vel vagy ba-val jelöljük. (Ez az egyszerűsítési megállapodás zavart okozhatna, ha az a vektort $n \times 1$-es mátrixként, a b vektort pedig $1 \times n$-es mátrixként tekintenénk, mert akkor az ab mátrix szorzat egy $n \times n$-es mátrixot jelöl. Szerencsére az a, b vektorok ilyen típusú szorzatára az alábbiakban nem lesz szükségünk, így az említett zavar sem fordulhat elő.)

Valamely n-dimenziós z vektor esetén az Az vektor tekinthető úgy, mint az A oszlopainak egy lineáris kombinációja, ahol az i-dik oszlop együtthatója a z i-dik komponense. Hasonlóképp, egy m-dimenziós y vektorra az yA tekinthető, mint az A sorainak egy lineáris kombinációja.

Futólag már említettük, hogy ha egy $z \in \mathbf{R}^n$ vektor ortogonális az A soraira, vagyis ha $Az = 0$, akkor z ortogonális az A sorainak bármely yA lineáris kombinációjára is, azaz $(yA)z = 0$. Valóban, $(yA)z = y(Az) = y0 = 0$.

Lemma 1.1 *Ha a $z \in \mathbf{R}^n$ nem-nulla vektor ortogonális az A mindegyik sorára (azaz benne van A nullterében, vagyis $Az = 0$), akkor z lineárisan független az A soraitól, (azaz z nincs benne az A sorterében).*

Biz. Tegyük fel indirekt, hogy z előáll az A sorainak lineáris kombinációjaként, azaz $z = yA$ valamely $y \in \mathbf{R}^m$-re. Ekkor $0 < zz = (yA)z = y(Az) = 0$, ami ellentmondás. •

Megjegyzendő, hogy a lemmában lényeges feltétel, hogy a valós vagy a racionális test felett vagyunk (legalábbis annyiban, hogy rendezett test felett). A GF(2) (vagyis a kételemű) test felett például az $(1, 1)$ vektor ortogonális saját magára.

Figyeljük meg, hogy a sortér és a nulltér az $\mathbf{R}^n$ egymásra merőleges alterei. (Ugyanis, ha egy vektor merőleges a mátrix soraira, akkor merőleges a sorokból készült lineáris kombinációkra is, vagyis a sortér minden elemére). Az 1.1 lemma alapján a sortérnek és a nulltérnek a közös része az egy szem nulla vektorból áll. Analóg módon az oszloptér és a bal nulltér az $\mathbf{R}^m$-nek egymásra merőleges alterei, melyek metszete a triviális altér.

Az A mátrix segítségével megadható egy $\varphi_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ leképezés a $\varphi_A(z) := Az$ képzési szabállyal. Könnyen látszik, hogy φ_A lineáris transzformáció, amelynek képtere az A oszloptere, míg magtere az A nulltere. Hasonlóképp bevezethetünk egy ${}_A\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ lineáris transzformációt a ${}_A\varphi(y) := yA$ képzési szabállyal. Ennek képtere az A sortere, míg magtere az A bal nulltere.

Az a kérdés, hogy az $Az = 0$ (homogén lineáris) egyenletrendszernek van-e nem-triviális megoldása azzal ekvivalens, hogy az A oszlopai lineárisan összefüggőek-e vagy sem. Egy másik interpretáció szerint az $Az = 0$ azt jelenti, hogy z ortogonális az A soraira, vagyis az $Az = 0$ nem-triviális megoldhatóságának kérdése azzal ekvivalens, hogy az A nulltere (azaz a φ_A leképezés magtere) nem-triviális-e.

TÉTEL 1.2 *Legyen A $m \times n$-es mátrix, ahol $1 \leq m < n$. Ekkor az $Az = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem-triviális megoldása. (Másszóval m-nél több m-dimenziós vektor mindig lineárisan összefüggő. Még másképp, A nulltere nem-triviális.)*

Biz. m szerinti indukciót használunk. Amennyiben $m = 1$, a tétel triviális. Legyen tehát $m > 1$ és tételezzük fel, hogy a tétel érvényes minden olyan mátrixra, amelynek m-nél kevesebb sora van.

A tétel állítása triviális, ha A-nak van egy csupa 0-ból álló oszlopa, így feltesszük, hogy nem ez a helyzet. Figyeljük meg, hogy ha az A egyik sorát helyettesítjük a sor λ-szorosával valamilyen $\lambda \neq 0$ számra, akkor a mátrix nulltere, vagyis az $Az = 0$ rendszer megoldásainak halmaza változatlan marad. Hasonló kijelentés érvényes, ha a mátrix egyik sorát hozzáadjuk egy másik sorához, vagy ha két sort felcserélünk. Ezen műveletek ismételt alkalmazásával egy olyan A_1 mátrix nyerhető, amelynek nulltere ugyanaz, mint az A mátrixé, és amelynek első oszlopa az $(1, 0, 0, \ldots, 0)^t$ m-dimenziós egység-vektor. Legyen A' az a mátrix, amely az A_1-ből keletkezik az első sor és az első oszlop eltörlésével. Az A'-re az indukciós feltevés szerint érvényes a tétel, azaz létezik egy $(n-1)$-dimenziós z' nem-nulla vektor, amelyre $A'z' = 0$.

Jelölje a' azt a vektort, amely az A_1 első sorából keletkezik az első (1-es) komponens eltörlésével és legyen $\alpha = -a'z'$. Ekkor a $z := (\alpha, z')$ vektor nem-nulla vektor, amelyre $A_1 z = 0$, tehát $Az = A_1 z$ miatt $Az = 0$. •

Megjegyzendő, hogy a fenti bizonyítás könnyen algoritmussá alakítható az $Az = 0$ egy nem-triviális megoldásának megkeresésére. Ez a Gauss-elimináció speciális esete homogén lineáris egyenlőség rendszer egy nemtriviális megoldásának megtalálására.

Következmény 1.3 *Ha egy mátrix oszlopai is és sorai is lineárisan függetlenek, akkor a mátrix négyzetes.*

Biz. Valóban, ha például több oszlop volna, mint sor, akkor az 1.2 tétel szerint az oszlopok lineárisan összefüggnének. •

Következmény 1.4 *Ha az A' mátrixból lineárisan függetlenül kiválasztható sorok maximális száma kisebb, mint az oszlopok száma, akkor az $A'z = 0$ rendszernek van nem-triviális megoldása.*

Biz. Válasszunk ki maximálisan sok lineárisan független sort és jelölje a mátrixukat A. Az 1.2 tétel szerint $Az = 0$-nak van nem-triviális megoldása. Ez az eredeti $A'z = 0$-nak is megoldása, hiszen A' minden sora lineárisan függ A soraitól. •

Lemma 1.5 *Tegyük fel, hogy az A mátrixban az első r oszlop lineárisan független és a többi oszlop lineárisan függ ezektől. Hasonlóképp legyen az első s sor lineárisan független és a többi sor lineárisan függjön ezektől. Ekkor az első r oszlop és az első s sor által meghatározott A_1 részmátrix oszlopai is és sorai is lineárisan függetlenek.*

Biz. Szimmetria miatt elég kimutatni, hogy az A_1 oszlopai lineárisan függetlenek. Töröljük el az $a_{r+1}, \ldots, a_n$ oszlopokat. Továbbra is érvényes, hogy mindegyik sorvektor lineárisan függ az első s sortól. Így ha egy vektor ortogonális az első s sorra, akkor ortogonális a többi sorra is, vagyis ha az A_1 oszlopai lineárisan összefüggnének, akkor az A mátrix első r oszlopa is lineárisan összefüggne, ellentmondásban a feltevéssel. •

Az 1.3 következmény és az 1.5 lemma kombinációjából kapjuk a következőt.

TÉTEL 1.6 *Egy A mátrix lineárisan független oszlopainak maximális száma egyenlő a lineárisan független sorok maximális számával.*

Ezt a közös maximális számot $r(A)$-val jelöljük és a mátrix **rangjának** nevezzük.

Ezen meggondolásokból még egy fontos tulajdonság kiolvasható. Tegyük fel, hogy a mátrixból egymás után választunk sorokat, csak arra ügyelve, hogy a kiválasztott sorok lineárisan függetlenek legyenek. Ezt egészen addig tesszük, amíg már több sor nem választható ki, azaz amikor már a nem kiválasztott sorok mindegyike lineárisan függ a kiválasztott soroktól. Ekkor, függetlenül a közbenső választási döntéseinktől, a kiválasztott lineárisan független sorok száma mindig ugyanaz lesz, nevezetesen az A mátrix rangja. (Másszóval a mohó algoritmus mindig maximális sok lineárisan független sort fog megtalálni.) Ennek igazolásához tegyük fel, hogy az algoritmus mondjuk az első s sort választotta ki és legyen indirekt $s < r := r(A)$. Feltehetjük, hogy az A első r oszlopa lineárisan független. De ekkor ellentmondásban vagyunk az 1.5 lemmával. Ebből az is következik, hogy az A sorterének a dimenziója egyenlő a mátrix rangjával (ami egyenlő a mátrix oszlopterének dimenziójával.)

Következmény 1.7 *Egy mátrix rangja nem változik, ha hozzáveszünk egy új oszlopot, amely lineárisan függ az oszlopoktól, vagy ha elhagyunk egy meglévő oszlopot, amely lineárisan függ a többi oszloptól. Analóg állítás érvényes sorokra.* •

TÉTEL 1.8 *Ha egy $m \times n$-es A mátrix sorai lineárisan függetlenek (azaz $r(A) = m$), akkor tetszőleges n-dimenziós b vektorra az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása (ami $b \neq 0$ esetben azzal ekvivalens, hogy b lineárisan függ az A oszlopaitól.) Ha $m = n$, akkor a megoldás egyértelmű.*

Biz. Ha $b = 0$, akkor $x = 0$ megoldás, így feltesszük, hogy $b \neq 0$. Az 1.6 tétel miatt A-nak van m lineárisan független oszlopa. Tegyük fel, hogy az első m oszlop lineárisan független. Láttuk, hogy m-nél több m dimenziós vektor lineárisan összefüggő, így az $a_1, \ldots, a_m, b$ vektorok lineárisan összefüggőek. Egy ilyen nem-triviális lineáris összefüggésben a b együtthatója nem lehet 0, mert ez azt jelentené, hogy az $a_1, \ldots, a_m$ vektorok lineárisan összefüggőek, ellentétben a feltevéssel. Ha viszont a b együtthatója nem nulla, akkor b kifejezhető az a_i vektorok lineáris kombinációjaként.

Az $m = n$ esetben az egyértelműség bizonyításához tegyük indirekt fel, hogy létezik két megoldás is. Ekkor ezek z különbsége nem-nulla és $Az = 0$, vagyis az A oszlopai lineárisan összefüggőek, de ekkor a sorai is, ellentétben a feltevéssel. •

Egy négyzetes mátrixot **szinguláris**nak neveznek, ha sorai (illetve ezzel ekvivalensen, oszlopai) lineárisan összefüggnek.

Az 1.8 tétel általánosításához tegyük ismét fel, hogy az A mátrixnak m sora és n oszlopa van (lehet $m = n$), de a sorok lineáris függetlenségét nem tételezzük fel.

TÉTEL 1.9 *A következők ekvivalensek.*
(A) Az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása (szemléletesen, a b oszlopvektor benne van az A oszlopainak terében, másszóval b lineárisan függ A oszlopaitól),
(B) $r(A) = r([A, b])$), (ahol $[A, b]$ az a mátrix, amely A-ból áll elő a b oszlop hozzávételével).
(C) Nem létezik olyan y, amelyre $yA = 0$, $yb \neq 0$ (szemléletesen, nincs olyan [y normálisú] origón átmenő hipersík, amelyben A minden oszlopa benne van, de b nincsen.)

Biz. (B)→(A). Tekintsünk A-nak $r(A)$ lineárisan független oszlopát. $r(A) = r([A, b])$ azt jelenti, hogy b lineárisan függ ezektől, tehát függ az A oszlopaitól, vagyis (A) fennáll.

(A)→(C). Ha létezik olyan x és y, amelyekre $Ax = b$ és $yA = 0$, akkor $0 = (yA)x = y(Ax) = yb$.

(C)→(B). Tegyük fel indirekt, hogy $r(A) < r([A, b])$. Válasszunk ki $[A, b]$-nek $r(A) + 1$ lineárisan független sorát és legyen $[A_1, b_1]$ az általuk alkotott részmátrix. A_1 sorai már lineárisan összefüggnek, hiszen A-nak nincsen $r(A) + 1$ darab lineárisan független sora. De ekkor létezik olyan $y_1 \neq 0$ vektor, amelyre $y_1 A_1 = 0$. $[A_1, b_1]$ sorainak lineáris függetlensége miatt $y_1[A_1, b_1] \neq 0$, azaz $y_1 b_1 \neq 0$. Egészítsük ki y_1-t 0 komponensekkel egy y m-dimenziós vektorrá. Erre $yA = 0, yb \neq 0$, ellentmondásban (C)-vel. •

Az 1.9 tételben az (A) feltétel azt jelenti, hogy a b oszlopvektor benne van az A oszlopainak terében. A (C) feltétel pedig azt, hogy nem létezik olyan vektor, amely A minden oszlopára merőleges, de b-re nem, másszóval nem létezik olyan hipersík (melynek egy normálisa y), amely tartalmazza A minden oszlopát, de b-t nem. Röviden, egy vektor vagy benne van egy altérben vagy elválasztható tőle hipersíkkal abban az értelemben, hogy a hipersík tartalmazza az alteret, de a vektort nem. Ennek alapján hívhatjuk ezt az eredményt (egy) szeparációs tételnek. Később látni fogjuk, hogy jóval általánosabb szeparációs tételek is léteznek.

Feladat 1.1 *A Gauss-elimináció segítségével igazoljuk közvetlenül a (C)→(A) irányt!*

Feladat 1.2 *Igazoljuk, hogy $r(Y \cdot A) \leq r(A)$!*

Feladat 1.3 *Igaz-e, hogy az $Ax = 0$ egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik semelyik koordinátájában sem nulla megoldása, ha A minden oszlopa lineárisan függ a többitől?*

TÉTEL 1.10 *Egy A $n \times n$-es nem-szinguláris négyzetes mátrix első m sora által alkotott részmátrixot jelölje A_1, míg a maradékot A_2. Tegyük fel, hogy az A_1 minden sora ortogonális A_2 minden sorára. Ekkor A_1 sortere éppen az A_2 nulltere és A_1 nulltere éppen az A_2 sortere.*

Biz. Mivel az állítás második fele az elsőből következik az A_1 és A_2 szerepének felcserélésével, csupán az első rész bizonyítására szorítkozunk. A feltevés szerint A_1 minden sora ortogonális A_2 minden sorára, így A_1 sorainak lineáris kombinációja is ortogonális az A_2 soraira, azaz A_1 sortere része A_2 nullterének. A fordított irányú tartalmazás igazolásához legyen $z \in \mathcal{N}(A_2)$, azaz $A_2 z = 0$. Mivel A nem-szinguláris, az 1.8 tétel alapján létezik $y = (y_1, y_2)$, amelyre $yA = z$.

Most tehát $yA = z$ ortogonális A_2 soraira, és $y_1 A_1$ is ortogonális A_2 soraira, ezért $y_2 A_2 = yA - y_1 A_1$ is ortogonális A_2 soraira. Az 1.1 lemma alapján az A_2 sorainak egy nemnulla lineáris kombinációja nem lehet ortogonális A_2 minden sorára, így $y_2 A_2$ szükségképpen 0, azaz $z = y_1 A_1$, vagyis z benne van A_1 sorterében. •

TÉTEL 1.11 *Legyen A_1 olyan $m \times n$-es mátrix ($m < n$), amelynek sorai lineárisan függetlenek. Ekkor létezik olyan $(n - m) \times n$ méretű A_2 mátrix, amelynek sorai ortogonálisak az A_1 soraira és amely az A_1-gyel együtt egy $n \times n$-es nem-szinguláris mátrixot alkot. (Az A_2 sortere éppen az A_1 sorterének az ortogonális kiegészítője.)*

Biz. Az 1.2 tétel szerint van olyan $z_1 \in \mathbf{R}^n$ nemnulla vektor, amely ortogonális az A_1 soraira (magyarul az $A_1 z = 0$ rendszernek van nem-triviális megoldása.) Természetesen ekkor z_1 lineárisan független A_1 soraitól. Egészítsük ki az A_1 mátrixot a z_1 sorvektorral. Miután z_1 lineárisan független az A_1 soraitól, a megnövelt A_1' mátrix sorai is lineárisan függetlenek. Amennyiben A_1'-nek még mindig kevesebb, mint n sora van, az 1.2 tétel alapján ismét létezik egy olyan z_2 vektort, amely ortogonális az A_1' soraira.

Ezt az eljárást $(n-m)$-szer alkalmazva olyan $z_1, \ldots, z_{n-m}$ vektorokat kapunk, melyek mindegyike ortogonális az A_1 valamennyi sorára valamint egymásra is, továbbá a végül kapott $n \times n$-es mátrix sorai lineárisan függetlenek. Ezen konstrukció alapján z_i $(i = 1, \ldots, n-m)$ sorvektorokból álló A_2 mátrix teljesíti a tétel kívánalmait. •

A két tétel összevetéséből adódik, hogy az $A_1 x = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza pontosan a $z_1, z_2, \ldots, z_{n-m}$ vektorok lineáris kombinációinak halmaza. Az is következik, hogy az n-dimenziós tér tetszőleges Q m-dimenziós alterének létezik egy egyértelműen meghatározott $Q^\perp$ $n-m$-dimenziós ortogonális kiegészítő altere. $\mathbf{R}^n$ minden eleme egyértelműen áll elő egy Q és egy Q^*-beli elem összegeként.

Feladat 1.4 *Tegyük fel, hogy az 1.11 tételbeli A_1 mátrix (I_m, B) alakú, ahol I_m az $m \times m$-es egységmátrixot jelöli, míg B tetszőleges $m \times (n-m)$-es mátrix. Igazoljuk, hogy az $A_2 := [B^T, -I_{n-m}]$ kielégíti a tétel kívánságait, azaz A_2 sortere az A_1 sorterének ortogonális kiegészítője.*

1.3 ALTEREK, AFFIN ALTEREK

Az 1.2 tételből következően az $\mathbf{R}^n$ térben legfeljebb csak n vektor választható ki lineárisan függetlenül. Miután az n egységvektor lineárisan független, az $\mathbf{R}^n$ dimenziója n. Az is következik, hogy tetszőleges A altér véges sok elem generált altereként áll elő: válasszunk ki maximálisan sok lineárisan független elemét A-nak (ezek száma legfeljebb n), minden elem ezektől lineárisan függ, azaz A a kiválasztott elemek által generált altér.

Az 1.10 és 1.11 tételekből látjuk, hogy minden altér nemcsak generált altérként áll elő, hanem vektorok ortogonális altereként is. (Ez annak a szemléletes geometriai ténynek az általánosítása, hogy a síkban egy origón átmenő egyenest egyrészt meg lehet adni $ax + by = 0$ alakban, másrészt $\alpha(-b, a)$ "paraméteres" alakban.) Az is következik, hogy k darab lineárisan független vektorra ortogonális altér rangja $n-k$. Speciálisan, ha A $n-1$ rangú mátrix, akkor az $Az = 0$ megoldás-halmaza egy-dimenziós altér, másnéven egy **origón átmenő egyenes,** amelynek pontjai valamely a vektorra $\{\lambda a : \lambda \in \mathbf{R}\}$ alakban adhatók meg (ahol a az A soraira merőleges nem-nulla vektor)

Az 1.9 tétel választ ad arra a kérdésre, hogy egy egyenletrendszernek mikor van megoldása. Feltéve, hogy létezik megoldás, mi mondható a megoldás-halmazról?

Affin altéren vagy **eltolt altéren** (vagy **affin halmazon**) egy altér eltoltját értjük. Vagyis C affin altér, ha létezik olyan A altér és a vektor, amelyekre $C = \{x : x = z + a$ valamilyen $z \in A$ vektorra $\}$, vagyis $C = A + \{a\}$. Ilyenkor könnyen látható, hogy C bármely c elemére $C - \{c\} = A$, vagyis az altér, amelynek eltolásából a C keletkezik, egyértelműen meghatározott. A C affin altér **dimenzióján** a definiáló A altér dimenzióját értjük.

Gyakorlat 1.5 *Igazoljuk, hogy affin alterek (a) nemüres metszete és (b) összege is affin altér!*

Véges sok pont affin kombinációinak halmaza affin alteret alkot, ez nem más, mint a véges sok pontot tartalmazó legszűkebb affin altér. Két (különböző) pont affin kombinációinak halmazát a két pont **összekötő egyenesének** nevezzük, míg a két pont konvex kombinációinak halmaza a két pontot összekötő **szakasz.** Egy egy-dimenziós affin halmazt **egyenesnek** nevezünk.

Könnyen látszik, hogy egy C halmaz akkor és csak akkor affin altér, ha van olyan c eleme, amelyre $C - \{c\}$ altér. A C halmaz akkor és csak akkor affin altér, ha bármely két elemének affin kombinációja C-ben van, ami azzal ekvivalens, hogy bármely véges sok elemének affin kombinációja C-ben van.

TÉTEL 1.12 *Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek van egy x_0 megoldása. Ekkor a megoldások $M := \{x : Ax = b\}$ halmaza az $\mathbf{R}^n$ tér affin altere, nevezetesen az A nullterének eltoltja. Másként fogalmazva, az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszer egy tetszőleges megoldását x_0-hoz adva megoldást kapunk, és M minden tagja így áll elő. Megfordítva, minden affin altér előáll egy egyenletrendszer megoldás-halmazaként.*

(Figyeljük meg, hogy az 1.9 tételben az $Ax = b$ megoldhatóságának az oszlopok terét magában foglaló $\mathbf{R}^m$ térben volt szemléletes jelentése, a megoldások halmazát viszont sorteret magában foglaló $\mathbf{R}^n$ térben szemléltetjük affin altérként.)

Biz. Legyen $z \in \mathcal{N}(A)$, azaz $Az = 0$. Ekkor nyilván $A(z + x_0) = b$, vagyis $\mathcal{N}(A) + \{x_0\} \subseteq M$. Legyen most $x_1 \in M$. Ekkor $z := x_1 - x_0$-ra fennáll $Az = 0$, tehát x_1 előáll mint az x_0 és az $\mathcal{N}(A)$-beli z elem összege. Ezzel a tétel első felét igazoltuk.

Tekintsünk most egy C affin alteret, amely valamely ${}_1a, \ldots, {}_m a$ vektorok által generált altér x_0 vektorral történő eltolásával áll elő, vagyis az $\{yA + x_0 : y \in \mathbf{R}^m\}$ alakú vektorok halmaza, ahol A jelöli az ${}_1a, \ldots, {}_m a$ sorokból álló mátrixot. Az 1.11 tétel szerint van olyan Z mátrix, amelynek nulltere éppen az A sortere. Legyen $b := Zx_0$. Ekkor C éppen a $Zx = b$ egyenletrendszer megoldás-halmaza. •

Következmény 1.13 *Amennyiben az $Ax = b$ egyenletrendszernek van megoldása, úgy az M megoldáshalmaz dimenziója $n - r(A)$, ahol n az oszlopok száma.*

Biz. Az előbbi tétel szerint M az A nullterének az eltoltja. Álljon A_1 az A-nak $r(A)$ lineárisan független sorából. Nyilván A-nak és A_1-nek ugyanaz a nulltere. Az 1.10 és 1.11 tételek alapján A_1 nullterének rangja $n - r(A_1) = n - r(A)$. •

1.4 BÁZIS-MEGOLDÁSOK

A lineáris algebra egyik kiinduló pontja (lineáris) egyenlet-rendszerek vizsgálata volt. A lineáris programozás egyenlet-rendszerek helyett egyenlőtlenség-rendszerekkel foglalkozik. A legelső kérdés az, hogy egy egyenlőtlenség-rendszernek mikor létezik megoldása, vagy másképp fogalmazva, egy egyenlőtlenség-rendszer R-rel jelölt megoldás halmaza mikor nemüres. Amennyiben az, a következő feladat annak eldöntése, hogy valamely c vektorra a cx lineáris célfüggvény korlátos-e vajon R-en (mondjuk) felülről. Ha korlátos, úgy harmadik célunk meghatározni a cx függvény maximumát (vagy ha alulról korlátos, úgy minimumát) R-en. (Persze most még azt a később majd bizonyításra kerülő tényt sem tudjuk, hogy a szóbanforgó maximum vajon létezik-e: Weierstrass általános tétele szerint egy korlátos zárt halmazon folytonos függvény felveszi maximumát, így miután cx folytonos és egy egyenlőtlenség-rendszer R megoldás-halmaza bizonyosan zárt, R korlátossága esetén, már most is bizonyosak lehetünk a maximum létezésében. Nemsokára ezt is és a nem-korlátos esetet is igazoljuk, Weierstrass nélkül.)

Annak érdekében, hogy megállapításaink formálisan is az egyenlőség-rendszerekre vonatkozó tulajdonságok általánosításai legyenek, olyan rendszert tekintünk, amely egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket egyaránt magában foglalhat. Legyen az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ nem-nulla mátrixnak n oszlopa, legyen R a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{1.1}$$

lineáris rendszer megoldásainak halmaza. A későbbiekben a $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ vektort néha röviden b-vel jelöljük (és azt mindig feltesszük, hogy M nem-nulla). Az R halmazt persze könnyű csupa egyenlőtlenséggel megadni: $Px \leq b_0, -Px \leq -b_0, Qx \leq b_1$, de később például vizsgáljuk, hogy két rendszernek mikor ugyanaz a megoldás-halmaza, és ehhez jobb a formálisan általánosabb felírás. Az alábbiakban feltesszük, hogy a szóbanforgó R halmaz nemüres. Külön fejezet tárgyalja majd azt a kérdést, hogy (1.1)-nek mikor van megoldása.

Legyen most z az (1.1) rendszer egy megoldása. Jelölje $M_z^=$ az M azon soraiból álló részmátrixot, amelyek által meghatározott egyenlőtlenséget a z egyenlőséggel teljesíti. Az ennek megfelelő jobb-oldal legyen $b_z^=$. (A P definíció szerint része $M_z^=$-nek). Az M maradék részét jelölje $M_z^<$. A z-t **bázis-megoldásnak** nevezzük, ha $r(M) = r(M_z^=)$. Rögtön látszik, hogy a $Px = b$ egyenlőség-rendszernek minden megoldása bázis megoldás. Egy bázis-megoldás **erős bázis-megoldás**, ha a z nem-nulla komponenseihez tartozó M-beli oszlopok lineárisan függetlenek. A definícióból adódik, hogy ha M oszlopai lineárisan függetlenek, úgy minden bázis-megoldás automatikusan erős bázis-megoldás! Ez a helyzet például abban a speciális esetben, amikor az $x \geq 0$ nem-negativitási kikötés szerepel az egyenlőtlenségek között (azaz minden változó nem-negatív).

Ki fogjuk mutatni, hogy mindig létezik erős bázis-megoldás, legfeljebb véges sok van belőlük, továbbá minden olyan c vektorra, amelyre cx az R halmazon felülről korlátos a $\sup(cx : x \in R)$ érték egy erős bázis-megoldáson felvétetik, azaz a maximum létezik. Túl ezen jellemezzük azon c vektorokat, melyekre cx felülről korlátos R-n. Először lássuk be, hogy csak véges sok erős bázis-megoldás létezhez.

TÉTEL 1.14 *Az (1.1) egy z megoldása akkor és csak akkor erős bázis-megoldás, ha létezik M-nek egy $r(M)$ sorból és $r(M)$ oszlopból álló nem-szinguláris M' részmátrixa, amelyre z az $M'x' = b'$ egyértelmű x' megoldásából áll elő 0-komponensek hozzávételével (ahol b' a b jobb-oldal azon részét jelöli, amely az M' sorainak felel meg.)*

Biz. Ha z a megadott módon áll elő, úgy $M_z^=$ tartalmazza M'-t, így rangja $r(M)$. Továbbá a z nemnulla komponenseinek megfelelő M-beli oszlopvektorok lineárisan függetlenek, hiszen ezek mindegyike M' egy oszlopának kibővítése, márpedig M' a feltevés szerint nem-szinguláris, így oszlopvektorai lineárisan függetlenek. Vagyis ilyenkor z valóban erős bázis-megoldás.

Megfordítva, legyen z erős bázis-megoldás. Ekkor $r(M_z^=) = r(M)$. Válasszuk ki $M_z^=$-nek $r(M)$ lineárisan független sorát, majd a z nem-nulla komponenseinek megfelelő lineárisan független oszlopokat tetszés szerint egészítsük ki az M oszlopai közül $r(M)$ darab lineárisan független oszloppá. Az így kapott $r(M)$ sor és $r(M)$ oszlop által meghatározott M' részmátrix az 1.5 lemma miatt nem-szinguláris, és éppen z-t definiálja a kívánt módon. •

Következmény 1.15 *Tetszőleges egyenlőtlenség-rendszernek legfeljebb véges sok erős bázis-megoldása van.* •

Gyakorlat 1.6 *Igazoljuk, hogy az (1.1) rendszer és az* $(Px \leq b_0, -Px \leq -b_0, Qx \leq b_1)$ *rendszer bázis-megoldásai ugyanazok.*

Gyakorlat 1.7 *Igazoljuk, hogy az* $Ax = b, x \geq 0$ *rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha a pozitív elemekhez tartozó A-beli oszlopok lineárisan függetlenek.*

Gyakorlat 1.8 *Igazoljuk, hogy az* $Px_0 + Ax_1 = b, x_1 \geq 0$ *rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha az* x_1 *nem-nulla elemeihez tartozó P-beli oszlopokat az A-ból kiválasztott maximálisan sok lineárisan független oszloppal kiegészítve még mindig lineárisan független rendszert kapunk.*

Gyakorlat 1.9 *Legyen* $f \ll g$, *(azaz f minden komponensében kisebb, mint g), ahol* $f, g \in \mathbf{R}^n$. *Igazoljuk, hogy az* $Ax = b, f \leq x \leq g$ *rendszer egy z megoldása pontosan akkor bázis-megoldás, ha az A azon* a_i *oszlopai lineárisan függetlenek, melyekre* $f(i) < z(i) < g(i)$. *Mik az erős bázis-megoldások? Mik a bázis- és az erős bázis-megoldások, ha* $f \ll g$ *helyett csak* $f \leq g$*-t tesszük fel?*

Gyakorlat 1.10 *Igazoljuk, hogy az* $Bx \leq b, x \geq 0$ *rendszer egy z megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha a B valamely* B' *nemszinguláris négyzetes részmátrixára z az* $B'x' = b'$ *egyértelmű megoldásából áll elő nullák hozzávételével.*

Természetesen a bázis-megoldásokra vonatkozó kijelentéseink értelmesek (és érvényesek), ha az egyenlőtlenség-rendszert transzponált alakban (azaz "balról szorozva") írjuk fel. A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi eredményre.

TÉTEL 1.16 *Az* $\{yA \geq 0, yb = -1\}$ *rendszer egy* y_0 *megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha az A-ból lineárisan függetlenül kiválasztható, az* y_0*-ra merőleges oszlopok maximális száma* $r(A, b) - 1$.

Biz. Jelölje A_0 az A azon a_i oszlopaiból álló részmátrixot, melyekre y_0 merőleges, azaz $a_i y_0 = 0$. Definíció szerint y_0 akkor bázis-megoldás, ha $r(A_0, b) = r(A, b)$. A tétel állítása pedig azzal ekvivalens, hogy y_0 pontosan akkor bázis-megoldás, ha $r(A_0) = r(A, b) - 1$. Azt kell tehát csak belátnunk, hogy $r(A_0) = r(A_0, b) - 1$. De ez rögtön látszik, hiszen $y_0 A_0 = 0$ és $y_0 b = -1$ miatt a b vektor nem függ lineárisan A_0 oszlopaitól. •

Következő célunk azt megmutatni, hogy (1.1)-nek, ha van egyáltalán megoldása, úgy létezik erős bázis-megoldása is. Valójában ennél még többet is belátunk. Az ideális az lenne, ha igazolni tudnánk, hogy tetszőleges c vektorra és $z \in R$ megoldásra mindig létezik olyan x^* bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cz$, vagyis x^* a $\max cx$ célfüggvény szempontjából legalább olyan jó, mint z. Sajnos ez az állítás már egy dimenzióban sem igaz. Tekintsük ugyanis az $x \geq 0$ egyenlőtlenséget (ahol x most egyetlen változót jelöl). Ennek egyetlen bázis megoldása van, az $x = 0$. Így a $c = 1$ (egydimenziós) vektor esetén az $x = 1$ ponthoz nincs nála jobb bázis-megoldás.

A bajt az okozza, hogy cx nem korlátos felülről az R-en. Ezért érdemes megvizsgálni, hogy ez miként fordulhat elő. Könnyű megfigyelni, hogy a nem korlátosságnak egy lehetséges oka az, ha létezik olyan q vektor, amelyre $cq > 0, Pq = 0, Qq \leq 0$. Ekkor cx valóban nem korlátos felülről R-en, hiszen bármely pozitív λ számra $z + \lambda q$ is eleme R-nek, és $cq > 0$ miatt $c(z + \lambda q)$ bármilyen nagy lehet. A következő lemma tartalma az, hogy ha az ilyen q vektorok létezését kizárjuk, akkor az előbbi példával illusztrált baj már nem fordulhat elő.

Lemma 1.17 *Legyen z az (1.1) rendszernek egy megoldása, és c egy n-dimenziós vektor. Ha nem létezik olyan q vektor, amelyre* $cq > 0, Pq = 0, Qq \leq 0$, *akkor (1.1)-nek létezik olyan* x^* *bázis-megoldása, amelyre* $cx^* \geq cz$.

(Megjegyzés. A lemma megfordítása nem igaz, vagyis előfordulhat, hogy mind q, mind x^* létezik. Ha például $R = \{(z_1, z_2) : z_2 = 0\}$ a sík vízszintes tengelye (itt tehát Q üres), úgy minden megoldás egyúttal bázis-megoldás is, és ezért $x^* := z$ választással $cx^* = cz$ teljesül. Ugyanakkor $z := (0, 0), q = (1, 0), c = (1, 0)$ esetén $cq = 1$ és $Pq = 0$).

Biz. Az $M_z^<$ sorai száma szerinti indukció. Ha ez a szám nulla, úgy z maga bázis-megoldás, tehát jó lesz x^*-nak. Tegyük fel, hogy z nem bázis-megoldás. Ez azt jelenti, hogy $M_z^<$-nek van olyan sora, amely lineárisan független az $M_z^=$ soraitól, és emiatt az 1.9 tételből adódóan létezik olyan q, amelyre $M_z^= q = 0, M_z^< q \neq 0$. Tekintsük az $x_\lambda := z + \lambda q$ vektort ($\lambda \geq 0$).

1. eset $cq = 0$. Feltehető, hogy $M_z^<$-nek van olyan ${}_ia$ sora, amelyre ${}_iaq > 0$, mert különben q-t a negatívjával helyettesíthetjük. Kicsiny λ-ra x_λ benne van R-ben, míg nagy λ-ra, ${}_iaq > 0$ miatt, nincsen. Így van olyan λ' érték, amelyre $x_{\lambda'} \in R$ és $x_{\lambda'}$ több egyenlőtlenséget teljesít egyenlőséggel, mint z. [Nevezetesen λ' a maximális olyan λ érték, amelyre $M_z^< x_\lambda \leq b_z^<$ teljesül, vagyis $\lambda' = \min((b_z(i) - {}_iaz)/\ {}_iaq : {}_ia$ az $M_z^<$ olyan sora, amelyre ${}_iaq > 0)$.] Miután $M_{x_{\lambda'}}^<$-nek kevesebb sora van, mint $M_z^<$-nek, az indukciós feltevést alkalmazhatjuk $x_{\lambda'}$-re. Így létezik egy olyan x^* bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cx_{\lambda'} = cz + c(\lambda q) = cz$.

2. eset $cq \neq 0$. Feltehető, hogy $cq > 0$, mert ha nem, q-t a negatívjával helyettesítjük. Amennyiben $M_z^< q \leq 0$, úgy q léte ellentmond a lemma feltevésének. Ha viszont van olyan ${}_ia$ sora $M_z^<$-nak, amelyre ${}_iaq > 0$, akkor ugyanúgy járunk el, mint az első esetben: indukció alapján létezik olyan x^* bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cx_{\lambda'} = cz + c(\lambda q) > cz$. (Az utolsó egyenlőtlenség érdekében kellett q-t úgy választanunk, hogy cq pozitív legyen.) •

Hasznos tudatosítani, hogy a bizonyítás algoritmikus abban az értelemben, hogy egy szóbanforgó x^*-t a Gauss-elimináció segítségével polinom időben kiszámíthatunk. A lemmát $c = 0$-ra alkalmazva rögtön kapjuk:

Következmény 1.18 *Ha egy egyenlőtlenség-rendszernek van megoldása, akkor létezik bázis-megoldása is.*

A fő eredmény a következő.

TÉTEL 1.19 *Tegyük fel, hogy az (1.1) rendszer R megoldás-halmaza nemüres, és legyen c egy n-dimenziós vektor. A következők ekvivalensek.*
(1) Minden $z \in R$ elemre létezik (1.1)-nek olyan x^* erős bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.
(2) A $\{cx\}$ lineáris függvény R-n felülről korlátos.
(3) Nem létezik olyan q vektor, amelyre $cq > 0$, és $Pq = 0, Qq \leq 0$.

Biz. Mivel csak véges sok erős bázis-megoldás van, (1) implikálja (2)-t. (2)-ből rögtön következik (3). Igazoljuk most a (3) $\rightarrow$ (1) irányt. Az előző lemmából tudjuk, hogy létezik olyan x^* bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cz$. Válasszuk x^*-t olyannak, amelynek maximálisan sok 0 komponense van. Állítjuk, hogy x^* erős bázis-megoldás. Tegyük fel indirekt, hogy ez nem igaz, vagyis az x^* nemnulla elemeinek megfelelő M-beli oszlopok lineárisan összefüggőek. Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan $q \neq 0$ vektor, amelyre $Mq = 0$ és $x^*(i) = 0$ esetén $q(i) = 0$. Feltehetjük, hogy $cq \geq 0$, különben q-t a mínusz egyszeresével helyettesítjük. A (3)-ból következik, hogy valójában $cq = 0$. Most alkalmas λ-ra $x_\lambda^* := x^* + \lambda q$-nak több nulla komponense lesz, mint x^*-nak, továbbá x_λ^* is bázis-megoldás, amely $cx^* = cx_\lambda^*$ miatt ellentmond x^* választásának. •

Következmény 1.20 *Ha (1.1)-nek van megoldása, akkor van erős bázis-megoldása is. Speciálisan, ha az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszernek van megoldása, akkor van bázis-megoldása is, azaz egy olyan x megoldás, amelyben az x nem-nulla komponenseinek megfelelő A-beli oszlopok lineárisan függetlenek.*

Biz. Az előző tételben $c = 0$-ra (2) fennáll, így a tétel alapján (1) is. •

Az irodalomban gyakran a következmény (speciális) második részét Caratheodory tételnek hívják.

Következmény 1.21 *Ha (1.1)-nek van megoldása, és $\{cx\}$ a megoldások R halmazán felülről korlátos, úgy* $\max(cx : x \in R)$ *létezik (azaz létezik olyan $z \in R$, amelyre $cz = \sup\{cx : x \in R\}$).*

Biz. Az 1.15 tétel szerint véges sok erős bázis megoldás van. Az 1.19 tételből adódóan a maximum ezek egyikén felvétetik. •

Következmény 1.22 (C. Caratheodory) *Ha a d-dimenziós tér egy z pontja $p \geq d+1$ darab pont konvex kombinációja, akkor ezen pontok között van legfeljebb $d+1$, amelyeknek z konvex kombinációja.*

Biz. Készítsünk el egy mátrixot, amelynek p oszlopa van és az egyes oszlopok a p pont helyvektorait tartalmazzák, majd egészítsük ki a mátrixot még egy csupa egyesből álló sorral. A keletkező $(d+1)\times p$-es mátrixot jelölje A. Az, hogy z előáll a megadott pontok konvex kombinációjaként azt jelenti, hogy az $Ax = (z, 1)$-nek létezik nemnegatív megoldása. De akkor létezik bázis-megoldása is, ami azt jelenti (az 1.7 gyakorlat nyomán), hogy az előállításban legfeljebb annyi együttható nemnulla, mint ahány sora van az A mátrixnak, vagyis $d+1$. •

A bázis-megoldás definíciója az (M, b) mátrixtól függött. Ugyanakkor érvényes (és később igazolni is fogjuk), hogy ha két egyenlőtlenség-rendszernek a megoldás-halmaza megegyezik, akkor bázis-megoldásaik halmaza is megegyezik.

A fejezetet a bázis-megoldások létezésének egy fontos alkalmazásával zárjuk. Ehhez szükségünk van a kövekező közismert és könnyen igazolható lemmára.

Lemma 1.23 *Az Euklideszi tér lineáris leképezései folytonosak, azaz ha $\mathbf{R}^n$-beli vektorok egy $b_1, b_2, \ldots$, sorozata konvergál b-hez, akkor bármely B $m \times n$-es mátrixra a $z_1 := Bb_1, z_2 := Bb_2, \ldots$ sorozat konvergál Bb-hez.* •

Lemma 1.24 *Tegyük fel, hogy az A' $m' \times n$-es mátrix oszlopai lineárisan függetlenek és a $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots$, $\mathbf{R}^n$-beli vektorok olyanok, hogy a $b_{i_1} := A'z_{i_1}, b_{i_2} := Az_{i_2}, \ldots$ sorozat egy b vektorhoz konvergál. Ekkor a $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots$ sorozat konvergál, éspedig egy olyan z vektorhoz, amelyre $A'z = b$.*

Biz. Elég belátni, hogy a $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots$ sorozat konvergens, hiszen ha mondjuk z-hez tart, akkor az $\{A'z_{i_j}\}$ sorozat az 1.23 lemma miatt Az-hez tart, azaz $b = Az$. Legyen A_0 az A'-nek egy $n \times n$-es nemszinguláris részmátrixa és jelölje b_0 a b vektor A_0-nak megfelelő részét. Legyen továbbá B az A_0 mátrix inverze. Az előző lemmából a $z_{i_1}, z_{i_2}, \ldots$ sorozat konvergenciája következik. •

TÉTEL 1.25 *Bármely n oszlopú A mátrixra a $K := A\mathbf{R}^n_+ := \{b : b = Az, z \geq 0\}$ halmaz zárt.*

Biz. Tekintsük a K halmaz elemeinek egy $b_1, b_2, ..$ sorozatát, amely valamely b vektorhoz konvergál. Azt kell kimutatnunk, hogy b is a K halmazhoz tartozik.

A feltevés szerint mindegyik b_i-re az $\{Ax = b_i, x \geq 0\}$ rendszernek létezik megoldása. De akkor az 1.20 következmény szerint létezik bázis-megoldása is, amely tehát azt jelenti, hogy a pozitív komponensekhez tartozó oszlopok lineárisan függetlenek. Miután az A oszlopai közül csak véges sok féleképpen lehet lineárisan függetleneket kiválasztani, ezért a $\{b_i\}$ sorozatnak létezik egy olyan $\{b_{i_j}\}$ végtelen részsorozata (ami persze szintén b-hez tart) valamint az A mátrixnak egy lineárisan független oszlopokból álló A' részmátrixa, hogy az $A'x = b_{i_j} x \geq 0$ rendszernek van z_{i_j} megoldása minden $j = 1, 2, \ldots$-re. Az 1.24 lemma szerint a z_j vektorok konvergálnak valamely z vektorhoz, amely a z_j-k nemnegativitása miatt nemnegatív. Miután $A'z_1, A'z_2, \ldots$ sorozat b határértéke ugyanaz, mint a z_j sorozat határértékének A-szorosa, vagyis $b = Az$, kapjuk, hogy b valóban K-ban van. •

December 28, 2001

1.5 KÚPOK, POLIÉDEREK

A lineáris egyenlőség-rendszerek vizsgálatában alapvető volt az a gondolat, hogy a problémához intuitív geometriai képet tudtunk rendelni; ez vezetett a vektortér, altér, affin altér fogalmához és vizsgálatához. Nem meglepő, hogy a geometriai szemléltetés a lineáris egyenlőtlenség-rendszereknek az előző szakaszban elkezdett vizsgálatához is lényeges segítséget jelent. Ezek előkészítésére bevezetünk néhány fontos fogalmat.

Könnyen látszik, hogy az alterek (illetve az affin halmazok) éppen azok a halmazok, melyek zártak a lineáris (ill. affin) kombináció képzésre. Pontok egy halmazát akkor nevezzük **konvexnek,** ha zárt a konvex kombináció képzésre, vagyis akárhogy véve a halmaznak véges sok elemét, ezek konvex kombinációja is a halmazhoz tartozik. Hasznos kis gyakorlat belátni, hogy egy halmaz akkor és csak akkor konvex, ha bármely két elemének bármely konvex kombinációja a halmazhoz tartozik. Könnyen ellenőrizhető, hogy konvex halmazok metszete is konvex. Mivel $\mathbf{R}^n$ konvex, tetszőleges C halmaz benne van egy őt tartalmazó legszűkebb konvex halmazban, nevezetesen a C-t tartalmazó konvex halmazok metszetében. Ezt a C **konvex burkának** (convex hull) nevezzük és konv(C)-vel jelöljük. Könnyű ellenőrizni, hogy konv(C) nem más, mint a C elemeinek felhasználásával készült konvex kombinációk halmaza.

Amennyiben $a \in \mathbf{R}^n$ nem-nulla vektor, β tetszőleges szám, az $ax = \beta$ egyenlet megoldás-halmazát **hipersíknak** (hyperplane) nevezzük. Ez az $\{x \in \mathbf{R}^n : ax = 0\}$ origón átmenő hipersík eltoltja. A fentiek alapján a hipersík dimenziója $n-1$ (innen az elnevezés). Következik, hogy az affin altér hipersíkok metszetének tekinthető. Az $\{x : ax \leq \beta\}$ halmazt (zárt) **féltérnek** (closed halfspace) hívjuk. (Ha szigorú egyenlőtlenség van, **nyílt féltérről** beszélünk).

Vektorok egy nemüres C halmazát **kúpnak** (cone) nevezzük, ha C zárt nemnegatív számmal történő szorzásra nézve, vagyis ha C bármely elemére annak nem-negatív számszorosa is C-hez tartozik. Ebből adódik, hogy az origó mindig a kúpban van. A kúp **triviális,** ha egyetlen pontja van (az origó). Amennyiben a kúp még az összeadásra is zárt, **konvex kúpról** beszélünk. Ez könnyen láthatóan valóban konvex. Miután a továbbiakban csak konvex kúpokról lesz szó, kúpon automatikusan konvex kúpot fogunk érteni. Egy altér például mindig kúp. (Ez a definíció egyrészt általánosabb annál, mint amit szokásos geometriai kúp fogalmunk diktálna, hiszen megenged olyan alakzatokat is, melyeket síkok határolnak. Például a síkban a nemnegatív síknegyed kúp. Másrészt szűkebb, mert kúp eltoltja nem kúp). Két tipikus példa origót tartalmazó kúpra:

Végesen generált kúp (röviden, **generált kúp**): Véges sok $a_1, \ldots, a_n$ vektor nemnegatív lineáris kombinációinak halmaza. Jelölése : kúp$(a_1, \ldots, a_n) := \{x : x = \sum_i \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0\}$.

Metszet-kúp (másnéven **poliéder-kúp**): Véges sok origón átmenő hipersík által határolt féltér metszete; $\{x : b_1 x \leq 0, \ldots, b_m x \leq 0\}$.

A későbbiekben megválaszoljuk azt a természetes kérdést, hogy egy metszet-kúp vajon mindig előáll-e generált kúpként és egy generált kúp metszet-kúpként. A kíváncsiak kedvéért eláruljuk, hogy a válasz mindkét esetben *igen.* De ez nem nyilvánvaló: például egy metszet-kúp zártsága rögtön látszik abból, hogy a félterek zártak és zárt halmazok metszete is zárt; ugyanakkor egy generált kúp zártságának az igazolása (1.25 tétel) némileg komolyabb megfontolást igényelt. Azt mindenesetre már most is tudjuk, hogy egy altér az metszet-kúp is és generált kúp is.

Egy q nemnulla vektor esetén a $\{\lambda q : \lambda \in \mathbf{R}_+\}$ generált kúpot **végtelen iránynak** vagy röviden **iránynak** vagy másként **sugárnak** (ray) mondjuk és $\vec{q}$-val jelöljük. A $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_k$ irányok egy **nemnegatív kombinációján** a $q_1, \ldots, q_k$ vektorok egy nemnagatív kombinációjához tartozó irányt értjük. A generált kúp tekinthető véges sok irány nemnegatív kombinációi halmazának. Egy z pontból induló $\vec{q}$ irányú **félegyenesen** a $z + \vec{q} := \{x : x = z + \lambda q, \lambda \in \mathbf{R}_+\}$ halmazt értjük. Tehát az irány egy origóból kiinduló félegyenes. További két alapvető fogalom:

Poliéder (polyhedron, tbsz: polyhedra): Véges sok féltér metszete: $R := \{x : Qx \leq b\}$ ahol Q egy $m \times n$-es mátrix, b m-dimenziós vektor. Másszóval a poliéder egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldás-halmaza. Természetesen a formailag általánosabb, egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket egyaránt tartalmazó $\{Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ rendszer megoldás-halmaza is poliéder hiszen egy $px = \beta$

egyenlet megoldás-halmaza felfogható úgy, mint az $px \leq \beta$ és a $-px \leq -\beta$ egyenlőtlenségek közös megoldás-halmaza.

Figyeljük meg, hogy a fenti definícióból adódóan egy poliéder mindig konvex. Egy poliédert akkor nevezünk **korlátosnak**, ha létezik olyan K pozitív szám, amelyre $|x(i)| \leq K$ a poliéder minden x pontjának mindegyik $x(i)$ komponensére.

Politop (polytope): Véges sok pont konvex burka.

Feladat 1.11 *Igazoljuk, hogy egy politop mindig zárt.* (Használhatjuk az 1.25 tételt.)

A poliéder egy z pontját **csúcsnak** nevezzük, ha nem áll elő a poliéder néhány más pontjának konvex kombinációjaként. Nem nehéz ellenőrizni, hogy ez avval ekvivalens, hogy z nem felezőpontja egy poliéderben lévő szakasznak. A poliédert **csúcsosnak** vagy **hegyesnek** (pointed) mondjuk, ha van csúcsa. Egy altér vagy egy végtelen hasáb például olyan poliéder, amelynek egyáltalán nincsen csúcsa. Ha egy poliéder nem tartalmaz teljes egyenest (félegyenest) akkor azt mondjuk, hogy **egyenes-mentes** (**félegyenes-mentes**). A $\vec{q}$ irányt az R **poliéder egy irányának** nevezzük, ha van R-nek olyan z pontja amelyre $z + \lambda q \in R$ minden pozitív λ-ra. A poliéder egy $\vec{q}$ irányát **extrémnek** nevezünk, ha nem áll elő a poliéder más irányainak nemnegatív kombinációjaként. Könnyen láthatóan ez azzal ekvivalens, hogy $\vec{q}$ nem áll a poliéder két másik irányának nemnegatív kombinációjaként.

Három dimenzióban egy korlátos (nemüres) poliéder határoló "alkatrészei" a lapok, az élek és a csúcsok. Ezeket a szemléletes fogalmakat egységesen oldal néven fogjuk általánosítani (angolban a *face* szót használják). Az $R := \{x : Mx \leq b\}$ poliéder **oldalán** (face) az $\{x : Mx \leq b, M_1x = b_1\}$ poliédert értjük, feltéve, hogy ez nem üres(!), ahol $M_1x \leq b_1$ az eredeti $Mx \leq b$ rendszer egy (esetleg üres) részrendszere. Az oldalt tehát úgy kapjuk, hogy az R-t definiáló egyenlőtlenségek közül néhányat egyenlőséggel megkötünk. Ebben az értelemben a poliéder maga is oldal. Jegyezzük meg, hogy az oldal definíció szerint nemüres. **Valódi oldalon** (proper face) olyan oldalt értünk, amely nem az egész poliéder. Egy affin altér például olyan poliéder, amelynek nincs valódi oldala. Poliéder **minimális oldalán** egy tartalmazásra nézve minimális oldalt értünk. Figyeljük meg, hogy az oldalnak a most megadott definíciója nem igazán kielégítő, legalábbis abban az értelemben nem, hogy az oldal fogalma a poliédert leíró egyenlőtlenség-rendszertől függ és nem magától az R poliédertől. Elvileg még az is előfordulhatna, hogy két egyenlőtlenség-rendszer ugyanazt a poliédert definiálja, ugyanakkor az egyikben előálló oldal a másikban nem az. Szerencsére azonban ki fog derülni, hogy ez a helyzet nem fordulhat elő, és sikerül majd az oldalnak egy olyan ekvivalens definícióját adni, amely csak a poliédertől függ és nem annak megadásától (nevezetesen bebizonyítjuk majd, hogy az oldal a poliéder azon pontjainak részhalmaza, melyek valamely lineáris cx célfüggvényt maximalizálják a poliéder felett.)

Gyakorlat 1.12 *Amennyiben $R := \{x : Mx \leq b\}$ nemüres, úgy R akkor és csak akkor az egész tér, ha $r(M) = 0$ (azaz M a csupa-nulla mátrix) és $b \geq 0$.*

Gyakorlat 1.13 *Két poliéder metszete is poliéder. Két politop vektor-összege is politop.*

Gyakorlat 1.14 *Két metszet-kúp metszete metszet-kúp. Két generált kúp vektor-összege generált kúp.*

Gyakorlat 1.15 *Az R poliéder egy z pontja akkor és csak akkor csúcs, ha nincs olyan $x' \neq 0$ vektor, amelyre $z + x'$ és $z - x'$ is R-ben van. (Azaz z nincs R-hez tartozó szakasz belsejében).*

Gyakorlat 1.16 *Igazoljuk, hogy ha az R poliéder kúp, akkor metszet-kúp.*

Álljon itt néhány természetes kérdés, amelyekre választ várunk: Két egyenlőtlenség-rendszer megoldás-halmaza mikor ugyanaz (magyarán, mikor definiálják ugyanazt a poliédert)? Mikor üres egy poliéder? Mi a poliédert tartalmazó legszűkebb affin altér? Mi a poliéderben lévő legbővebb affin altér? Két nemüres poliéder összege mindig poliéder-e? Két politop metszete, ha nemüres, vajon mindig politop-e? Mikor csúcsos egy poliéder? Mikor tartalmaz teljes egyenest és mikor félegyenest? Minden metszet-kúp generált kúp? Minden generált kúp metszet-kúp? Minden politop poliéder? Minden korlátos nemüres poliéder politop? Két diszjunkt poliéder mindig elválasztható hipersíkkal?

Térjünk most rá a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek és a geometriai háttér kapcsolatának vizsgálatára, és tekintsük ismét az (1.1) rendszert és megoldás-halmazát az R poliédert, amelyről feltesszük, hogy nemüres.

Az (1.1) rendszerhez hozzárendeljük az $A := \{q : Mq = 0\}$ alteret valamint a $C := \{q : Pq = 0, Qq \leq 0\}$ metszet-kúpot, és ezeket rendre **karakterisztikus altérnek** illetve **karakterisztikus** (néha **recessziós**) **kúpnak** nevezzük. Először is megmutatjuk ezen fogalmak geometriai jelentését, majd belátjuk róluk, hogy valójában csak az R poliédertől függenek és nem az R-t definiáló (1.1) rendszertől.

TÉTEL 1.26 *Valamely nemnulla q vektorra a következők ekvivalensek.*
(1) q eleme a karakterisztikus kúpnak, azaz $Pq = 0, Qq \leq 0$.
(2) Az R-nek mindegyik x pontjára az $x + \lambda q$ pont minden pozitív λ-ra R-ben van.
(3) $\vec{q}$ az R poliéder végtelen iránya (azaz definíció szerint R-nek van olyan z pontja, amelyre a $z + \lambda q$ pont minden pozitív λ számra R-ben van).

Biz. (1) $\rightarrow$ (2) A poliéder tetszőleges x elemére és tetszőleges pozitív λ számra $P(x + \lambda q) = Px + \lambda Pq = b_0 + 0 = b_0$, és $Q(x + \lambda q) = Qx + \lambda Qq \leq b_1 + 0 = b_1$, azaz $x + \lambda q$ R-ben van. A (2) $\rightarrow$ (3) következtetés triviális. A (3) $\rightarrow$ (1) irány igazolásához látható, hogy (3) implikálja $Pq = 0$-t. Tegyük most fel indirekt, hogy $Qq \not\leq 0$ azaz Q-nak létezik olyan ${}_ia$ sora, amelyre ${}_iaq > 0$. Ekkor alkalmasan nagy λ számra ${}_ia(z + \lambda q)$ nagyobb lesz, mint $b_1(i)$, vagyis $z + \lambda q$ nincs a poliéderben, ellentétben a feltevéssel. •

Következmény 1.27 *Egy poliédernek és karakterisztikus kúpjának extrém irányai ugyanazok.* •

TÉTEL 1.28 *Valamely nemnulla q vektorra a következők ekvivalensek.*
(1) q eleme a karakterisztikus altérnek (azaz $Mq = 0$),
(2) R bármely x pontjára $x+\lambda q$ minden valós λ-ra R-ben van (vagyis az x-en átmenő q irányú egyenes R-ben van),
(3) R-nek van olyan z pontja, amelyre $z + \lambda q$ minden valós λ-ra R-ben van.

Biz. Az (1) $\rightarrow$ (2) irány triviális. A (2) $\rightarrow$ (3) irány semmitmondó. Tegyük most fel (3)-t. Az 1.26 tételből adódóan mind q, mind $-q$ benne van a karakterisztikus kúpban, ezért $Mq = 0$. •

Következmény 1.29 *Az (1.1)-ben definiált R poliéder akkor és csak akkor egyenes-mentes, ha M oszlopai lineárisan függetlenek.* •

Feladat 1.17 *Igazoljuk, hogy az R poliéder egy z pontját tartalmazó legbővebb, R-ben fekvő affin altér a karakterisztikus altér z-vel való eltoltja.*

A fenti tételekből adódik, hogy a karakterisztikus altér és karakterisztikus kúp csak a poliédertől függ és nem az azt leíró rendszertől, így ezentúl joggal beszélhetünk az R poliéder karakterisztikus alteréről és kúpjáról.

Később általánosságban is be fogjuk bizonyítani, hogy a bázis-megoldások éppen az R poliéder minimális oldalainak az elemei, most azonban ezt csak abban a speciális esetben igazoljuk, amikor M oszlopai lineárisan függetlenek, azaz R egyenes-mentes.

TÉTEL 1.30 *Tegyük fel, hogy M oszlopai lineárisan függetlenek vagy ekvivalensen, hogy R egyenes-mentes. Ekkor R egy z eleme akkor és csak akkor csúcsa R-nek, ha z bázis-megoldása (1.1)-nek.*

Biz. Tegyük fel először, hogy z csúcs. Ha nem volna bázis megoldás, akkor az $M_z^=$ mátrix rangja kisebb volna M rangjánál, vagyis n-nél. Ekkor létezik olyan q nemnulla vektor, amelyre $M_z^= q = 0$. Miután $M_z^< z \ll b_z^<$, következik, hogy van olyan kis pozitív λ érték, amelyre $z+\lambda q$ és $z-\lambda q$ mindegyike R-hez tartozik, ellentétben azzal, hogy z csúcs.

Tegyük most fel, hogy z bázis-megoldás. Ekkor $M_z^=$ rangja n, azaz oszlopai lineárisan függetlenek. Ha z nem volna csúcs, úgy létezne olyan q nemnulla vektor és $\lambda > 0$ szám, hogy $z + \lambda q$ és $z - \lambda q$ mindegyike R-hez tartozna. De ekkor szükségképpen $M_z^= q = 0$ volna, ellentmondásban $M_z^=$ oszlopainak lineáris függetlenségével. •

TÉTEL 1.31 *Az (1.1)-ben definiált R (nemüres) poliéderre a következők ekvivalensek.*
(1) R csúcsos,
(2) R egyenes-mentes,
(3) M oszlopai lineárisan függetlenek (másszóval R karakterisztikus altere triviális).

Biz. A (2) és (3) feltételek ekvivalenciáját az 1.29 következményben már megfogalmaztuk. (1) $\rightarrow$ (3) igazolásához indirekt tegyük fel, hogy (3) nem teljesül, azaz a karakterisztikus altérnek létezik nemnulla z eleme. Ekkor az 1.28 tétel szerint R minden pontja rajta van egy R-hez tartozó egyenesen, tehát R-nek nem lehetne csúcsa, (1) nem állna fenn. A (3) $\rightarrow$ (1) irányhoz az 1.20 tétel miatt létezik (1.1)-nek bázis-megoldása, ami az 1.30 tétel miatt csúcs. •

Következmény 1.32 *Minden (nemüres) poliédernek véges sok csúcsa van.* •

Biz. Ha R-nek van egyáltalán csúcsa, akkor M oszlopai lineárisan függetlenek. Ekkor minden csúcs erős bázis-megoldásnak felel meg, amiből véges sok van. •

1.5.1 POLIÉDEREK OSZTÁLYOZÁSA

Következő célunk poliédereknek egyfajta osztályozását megadni. Először is belátjuk, hogy minden poliéder egy csúcsos poliéder és egy altér összege.

TÉTEL 1.33 *Az (1.1) által definiált R (nemüres) poliéder az $A := \{x : Mx = 0\}$ karakterisztikus altér és az $R' := R \cap A^{\perp}$ poliéder vektor-összege, ahol $A^{\perp}$ az A altér ortogonális kiegészítője (vagyis az M sorai által generált altér). Továbbá, az R' poliéder egyenes-mentes.*

Biz. Először belátjuk, hogy $R \subseteq A + R'$, azaz hogy bármely $z \in R$ elem előáll egy A-beli és egy R'-beli elem összegeként. Valóban, minden z elem egyértelműen előáll egy A-beli z_1 és egy $A^{\perp}$-beli z_2 elem összegeként. Belátjuk, hogy $z_2 \in R'$. Ha nem ez volna a helyzet, akkor $z \in A^{\perp}$ miatt z_2 nem volna R-ben, azaz z_2 megsértené (1.1) valamelyik sorát. De akkor $Az_1 = 0$ miatt $z = z_1 + z_2$ is megsértené ugyanazt a sort, ellentétben a $z \in R$ feltevéssel. Így valóban $R \subseteq A + R'$. Másrészt a definíciókból világos, hogy $A + R' \subseteq R$, amiből $A + R' = R$.

Végül belátjuk, hogy R' egyenes-mentes. Az $M^{\perp}$ mátrix sorai alkossák az A altér egy bázisát. Ekkor tehát M sorai és $M^{\perp}$ sorai egymásra merőlegesek, együtt kifeszítik az egész teret, azaz $\begin{pmatrix} M \\ M^{\perp} \end{pmatrix}$ teljes oszlop-rangú. Miután R' az $\{M^{\perp}x = 0, Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ rendszer megoldás-halmaza, az 1.29 következményből adódik, hogy R' egyenes-mentes. •

Az alábbi következmény tartalma az, hogy az 1.33 tételben, ha R kúp, úgy R' is kúp lesz.

Következmény 1.34 *Egy $R := \{x : Mx \leq 0\}$ metszet-kúp az $A := \{x : Mx = 0\}$ karakterisztikus altér (ami speciális metszet-kúp) és az $R' := R \cap A^{\perp}$ egyenes-mentes metszet-kúp vektor-összege, ahol $A^{\perp}$ az A altér ortogonális kiegészítője.*

Biz. Az előbbi tétel nyomán csak azt kell látnunk, hogy R' metszet-kúp, de ez világos, hiszen egy altér metszet-kúp. •

TÉTEL 1.35 *Minden R egyenes-mentes (azaz csúcsos) poliéder előáll mint a csúcsai által feszített R_K politop valamint a poliéder C karakterisztikus kúpjának a vektor-összege.*

Biz. Legyen z a poliéder egy pontja. Legyen $M_z^{=}$ az M mátrixnak az a része, amelynek sorai által meghatározott egyenlőtlenségeket z egyenlőséggel teljesíti, míg a Q mátrix maradék részét jelölje $M_z^{<}$. (A P automatikusan része $M_z^{=}$-nek.) A z pont **szintjét** definiáljuk az $s(z) := r(M) - r(M_z^{=})$ különbséggel. Az 1.31 tétel alapján R csúcsai éppen a 0 szintű pontok. (Általánosabban is kimutatható, bár erre most nincs szükségünk, hogy a z szintje nem más, mint a pontot tartalmazó legszűkebb oldal dimenziója).

A szint szerinti indukcióval fogjuk kimutatni, hogy a poliéder minden z pontja előáll egy R_K-beli és egy C-beli pont összegeként. Ha a szint nulla, akkor tehát z csúcs, így eleme R_K-nak. Tegyük most fel, hogy $s(z) > 0$ és azt, hogy minden alacsonyabb szintű pontra a szóbanforgó előállítás létezik.

Mivel $r(M) > r(M_z^{=})$, létezik olyan q, amelyre $M_z^{=}q = 0$ és $M_z^{<}q \neq 0$. Feltehető, hogy $M_z^{<}q$-nak van negatív komponense, különben q-t helyettesíthetjük a negatívjával.

Tegyük először fel, hogy $M_z^{<}q$-nak nincsen pozitív komponense, azaz $M_z^{<}q < 0$ (vagyis $q \in C$). Ekkor létezik olyan $\lambda_1 > 0$ szám, amelyre $x_1 := z - \lambda_1 q$ az R-ben van és $s(x_1) < s(z)$. (Nevezetesen, $\lambda_1 := \min((b_1(i) - {}_ia z)/(-{}_ia q)$ ahol a minimum az Q azon ${}_ia$ soraira megy, amelyekre ${}_ia q < 0$. Az

x_1 szintje valóban kisebb, mint z szintje, hiszen egyrészt $M_z^{=}x_1 = b_z^{=}$, másrészt $M_z^{<}$ egyik ${}_ia$ sorára ${}_iax_1 = b(i)$ és ez a sor ${}_iaq \neq 0$ és $M_z^{=}q = 0$ miatt lineárisan független $M_z^{=}$ soraitól.) Indukció alapján x_1 előáll $x_1 = y_1 + y_1'$ alakban, ahol $y_1 \in R_K$ és $y_1' \in C$. De most $z = x_1 + \lambda_1 q = y_1 + y_1' + \lambda_1 q$ és $y_1' + \lambda_1 q \in C$, így z is előáll az R_K-beli y_1 és egy C-beli elem összegeként.

Tegyük most fel, hogy $M_z^{<}q$-nak létezik pozitív komponense is, és legyen ${}_1a$ és ${}_2a$ az $M_z^{<}$ mátrixnak két olyan sora, amelyre ${}_1aq < 0$ és ${}_2aq > 0$. Ekkor léteznek pozitív λ_1 és λ_2 számok, melyekre $x_1 = z - \lambda_1 q \in R$ és $x_2 = z + \lambda_2 q \in R$, és mind az x_1, mind az x_2 szintje kisebb, mint a z-é.

Indukcióval $x_i = y_i + y_i'$ $(i = 1, 2)$, ahol $y_i \in R_K$ és $y_i' \in C$. De ekkor $z = (\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2)/(\lambda_1 + \lambda_2) = (\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2)/(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_2 y_1' + \lambda_1 y_2')/(\lambda_1 + \lambda_2)$. Itt az összeg első tagja R_K-ban van, míg a második tagja C-ben. •

TÉTEL 1.36 *R (nemüres) poliéderre a következők ekvivalensek.*
(1) R korlátos,
(2) R nem tartalmaz félegyenest,
(3) R karakterisztikus kúpja, $\{x : Px = 0, Qx \leq 0\}$ triviális.
(4) R a csúcsainak konvex burka.

Biz. (1) $\rightarrow$ (2) triviális. (2) $\rightarrow$ (3) Ha a karakterisztikus kúpnak volna q nemnulla eleme, akkor, amint már az 1.26 tételben is láttuk, R tartalmazná a $z + \vec{q}$ félegyenest minden $z \in R$ pontra. (3) $\rightarrow$ (4) Az 1.35 tétel szerint, ha a karakterisztikus kúp triviális, úgy R a csúcsai által feszített politop. (4) $\rightarrow$ (1) Mivel véges sok csúcs van, ezek konvex burka korlátos. •

Hogy teljes legyen a kép, megadjuk az egyenes-mentes metszet-kúpok egyfajta előállítását. Az idea az, hogy a kúpot elmetszük egy alkalmas hipersíkkal, a metszet korlátos poliéder lesz, amelynek csúcsai a kiindulási kúp extrém irányainak felelnek meg. A következő tétel megmondja, hogyan kell a hipersíkot "alkalmasan" választani, hogy az tényleg messe a kúpot.

TÉTEL 1.37 *Legyen a $C := \{x : Mx \leq 0\}$ nemtriviális kúp egyenes-mentes, és legyen $Z := \{x : Mx \leq 0, ax = -1\}$ poliéder, ahol $a := 1 \cdot M$ az M sorainak az összege. Tetszőleges $z \in Z$ esetén $\vec{z}$ a kúp iránya. A kúp tetszőleges $\vec{q}$ iránya egyetlen z pontban metszi Z-t. Z korlátos. Egy $z \in Z$ pont akkor és csak akkor csúcsa Z-nek, ha $\vec{z}$ extrém iránya C-nek.*

Biz. Miután C egyenes-mentes, M oszlopai lineárisan függetlenek, így $Mq = 0$-ból $q = 0$ következik. Ezért C-nek tetszőleges q nemnulla elemére $Mq \neq 0$, azaz van olyan i index, amelyre ${}_iaq < 0$ fennáll. De ekkor $aq < 0$ is áll, és így létezik egy egyértelmű $\lambda > 0$ szám, amelyre $z := \lambda q \in M$. Vagyis a kúp $\vec{q}$ iránya előáll $\vec{z}$ alakban, ahol $z \in Z$. Fordítva, tetszőleges $z \in Z$ elem esetén $Mz \leq 0$, ezért $\vec{z}$ a kúp iránya.

Z korlátosságához az 1.36 tétel alapján azt kell belátni, hogy karakterisztikus kúpja triviális, vagyis az $\{Mx \leq 0, ax = 0\}$ rendszernek nincs nemnulla megoldása. Ezt viszont már a bizonyítás elején láttuk.

Végül legyen $z \in Z$, azaz $Mz \leq 0, az = -1$. Ha z nem csúcs, akkor előáll $(z_1 + z_2)/2$ alakban ahol $z_i \in Z, z_i \neq z$, $(i = 1, 2)$. De ekkor $\vec{z}$ a $\vec{z}_1$ és $\vec{z}_2$ C-beli irányok nemnegatív kombinációja. Vagyis ha $\vec{z}$ extrém iránya C-nek, akkor z csúcsa Z-nek. Legyen most z csúcsa Q-nak. Ha $\vec{z}$ nem éle C-nek, akkor van C-nek két olyan x', y' eleme, amelyek nincsenek $\vec{z}$-ben, de $x' + y'$ $\vec{z}$-ben van. Ekkor viszont z az $\vec{x}' \cap Q$ pontot és az $\vec{y}' \cap Q$ pontot összekötő szakasz belsejében van, azaz z nem csúcsa Q-nak. •

Következmény 1.38 *C egyenes-mentes nemtriviális metszet-kúpnak véges sok extrém iránya van, és C ezen irányok generált kúpja.* •

Azt már láttuk, hogy egyenes-mentes poliéder esetén csúcs és bázis-megoldás ugyanaz. Érdemes megállapítani egy egyenes-mentes kúp extrém irányának algebrai jelentését is.

Következmény 1.39 *A $C = \{x : Mx \leq 0\}$ egyenes-mentes kúp egy z nemnulla eleme által meghatározott $\vec{z}$ irány akkor és csak akkor extrém iránya C-nek, ha z merőleges az M mátrix $r(M) - 1 (= n - 1)$ lineárisan független sorára.*

Biz. Az 1.37 tétel jelöléseit használva, az egyenes-mentesség miatt $Mz < 0$, és így $az < 0$. Miután z bármely pozitív számszorosa ugyanazt az irányt definiálja, feltehetjük, hogy $az = -1$, azaz $z \in Q$. Az 1.16 tételben bebizonyítottuk (egy ekvivalens alakra), hogy az $\{Mx \leq 0, ax = -1\}$ rendszer egy

z megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás (azaz Q-nak egy csúcsa), ha z merőleges M-nek $r(M) - 1$ lineárisan független sorára. Az 1.37 tétel szerint viszont egy-egy értelmű kapcsolat van a Q poliéder csúcsai és a C kúp extrém irányai között. •

Következmény 1.40 *Minden R egyenes-mentes (azaz csúcsos) poliéder előáll mint a csúcsai által feszített politopnak valamint az extremális irányai által generált (csúcsos) kúpnak (vagyis az R karakterisztikus kúpjának) a vektor-összege.* •

Miután láttuk, hogy egy poliéder előáll mint egy csúcsos poliéder és egy altér vektor-összege, továbbá tudjuk, hogy egy altér generált kúp, kapjuk:

Következmény 1.41 *Minden R poliéder előáll mint egy Q politop és egy K generált kúp vektor-összege.*

Következmény 1.42 *Minden C metszet-kúp generált kúp.*

Biz. Triviális C kúpra a tétel igaz. Ha C tartalmaz teljes egyenest, akkor az 1.34 következmény alapján előáll egy egyenes-mentes kúp és egy altér vektor-összegeként. Miután egy altér generált kúp, továbbá az 1.38 következmény alapján egy egyenes-mentes kúp is generált kúp, ezek vektor-összege, vagyis C is generált kúp. •

December 28, 2001

2. Fejezet

FARKAS LEMMA ÉS DUALITÁS

2.1 EGYENLŐTLENSÉG-RENDSZEREK MEGOLDHATÓSÁGA

A Gauss-elimináció segítségével elvi és algoritmikus választ kaptunk arra a kérdésre, hogy egy lineáris egyenlőség-rendszernek mikor van megoldása. A Farkas lemma azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy egy egyenlőtlenség-rendszer mikor oldható meg, vagyis, hogy egy poliéder mikor nem üres. Ennek különböző ekvivalens alakjai vannak, annak megfelelően, hogy az egyenlőtlenség rendszer milyen alakban van adva. A Farkas lemma a lineáris programozás egyik alapkövének tekinthető. Az alábbiakban több különböző bizonyítást is bemutatunk, melyek közül kettő, a szimplex módszer és a Fourier-Motzkin elimináció konstruktív. Van azonban egy döntő különbség az eddigi fejezetek eredményeihez képest (akár a Gauss-eliminációt nézzük, akár a Caratheodory tételt és vidékét), éspedig az, hogy e két módszer egyike sem polinomiális futásidejű! Bár léteznek polinomiális futásidejű algoritmusok is (melyek mindegyike valamiféle közelítő megoldást keres), mind a mai napig nem ismeretes erősen polinomiális algoritmus egyenlőtlenség rendszer megoldására!!!

TÉTEL 2.1 (Farkas lemma) *Az* $\{Ax = b, x \geq 0\}$ *rendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha az* $\{yA \geq 0, yb < 0\}$ *rendszernek van.*

Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszert **primál** feladatnak, míg az $\{yA \geq 0, yb < 0\}$ rendszert **duál** vagy **duális** feladatnak nevezik. Megjegyzendő, hogy ha a szóbanforgó y létezik, akkor az úgy is megválasztható, hogy $yb = -1$ teljesüljön, így néha azt hívjuk duális feladatnak, amikor az $yb < 0$ helyett $yb = -1$-t követelünk.

A tételnek az oszloptérben szép geometriai jelentése van. Azt mondja ki, hogy valamely b vektor pontosan akkor nincsen benne az A oszlopvektorai által generált kúpban, ha van olyan zárt féltér (amelynek y normálisú határoló hipersíkja tartalmazza az origót), amely tartalmazza az oszlopvektorok mindegyikét, de nem tartalmazza b-t. Tömören, egy vektor vagy benne van egy kúpban vagy van olyan hipersík, amely elválasztja a vektort a kúptól.

Érdekes, hogy a 2.1 tételnek a sortérben is szemléletes jelentése van. Ugyanis a primál probléma megoldása azzal ekviavalens, hogy létezik olyan nemnegatív $(x, 1)$ vektor, amely ortogonális az $A' := (A, -b)$ mátrix soraira, ami viszont azzal ekvivalens, hogy az A' mátrix nullterében létezik egy olyan x' nemnegatív vektor, amelynek utolsó komponense szigorúan pozitív. A duál problémában $yb < 0$ helyett $y(-b) > 0$-t írva, a duál probléma megoldhatósága azt jelenti, hogy van olyan y vektor, amelyre $yA' \geq 0$ és yA' utolsó komponense szigorúan pozitív; magyarán azt, hogy az A' mátrix sorterében van olyan nemnegatív vektor, amelynek utolsó komponense szigorúan pozitív. Miután egy tetszőleges mátrix nulltere és sortere egymás ortogonális kiegészítő alterei, továbbá tetszőleges altér és ortogonális kiegészítő altere megadható egy mátrix nullthereként illetve sortereként, a Farkas lemma ekvivalens megfogalmazása a következő. Tetszőleges altér és ortogonális kiegészítő altere közül pontosan az egyik tartalmaz olyan nemnegatív vektort, amelynek utolsó komponense pozitív. (Két ilyen vektor skaláris szorzata pozitív, azaz nem lehetnek merőlegesek egymásra, tehát két ortogonális altér közül legfeljebb csak az egyik tartalmazhat ilyen vektort.)

A tételt kényelmesebb lesz kicsit általánosabb alakban igazolni. (Nem ritka jelenség, hogy egy jól eltalált általánosításra az indukciós bizonyítás gördülékenyebben működik.)

TÉTEL 2.2 *A*

$$Px_0 + Ax_1 = b,\ x_1 \geq 0 \tag{2.1}$$

primál feladatnak akkor és csak akkor nincsen megoldása, ha az

$$yP = 0,\ yA \geq 0,\ yb < 0 \tag{2.2}$$

duális feladatnak van.

(Figyeljük meg, hogy (2.2) megoldhatósága nyilván ekvivalens az $\{yP = 0, yA \geq 0, yb = -1\}$ rendszer megoldhatóságával.)

Biz. A primál és a duál feladat nyilván nem oldható meg egyszerre, mert akkor $0+0 \leq 0+(yA)x_1 = (yP)x_0 + (yA)x_1 = y[(P,A)x] = yb < 0$, azaz $0 < 0$ következne.

Annak bizonyítására, hogy a primál és a duál feladatok egyike biztosan megoldható az A oszlopai száma szerinti indukciót alkalmazunk. Amennyiben ez az n_1-gyel jelölt szám nulla, azaz A üres, úgy a tétel következik az 1.9 tétel (C) részéből (amikor tehát csak arról van szó, hogy egy egyenlőségrendszer mikor oldható meg). Tegyük tehát fel, hogy n_1 pozitív és indukció alapján azt, hogy n_1-nél kisebb oszlop-számra a tétel érvényes!

Legyen a_1 az A mátrix első oszlopa. Jelölje A' azt a mátrixot, amely A-ból keletkezik az a_1 kihagyásával. Amennyiben a

$$Px_0 + A'x_1' = b,\ x_1' \geq 0 \tag{2.3}$$

rendszernek létezik megoldása, úgy az x_1'-t egy nulla komponenssel kiegészítve (2.1) megoldásához jutunk. Ha (2.3)-nak nincs megoldása, úgy az

$$yP = 0,\ yA' \geq 0,\ yb < 0 \tag{2.4}$$

rendszernek létezik y' megoldása (az indukciós feltevés miatt). Ha most $y'a_1 \geq 0$, úgy y' a (2.2)-nek is megoldása, és ekkor készen vagyunk.

Tegyük fel tehát, hogy $y'a_1 < 0$, azaz most $y'A$ első komponense negatív, a többi nemnegatív. Jelölje P' azt a mátrixot, amelyet P-ből az a_1 oszlop hozzávételével nyerünk. Ha most az

$$yP' = 0,\ yA' \geq 0,\ yb < 0 \tag{2.5}$$

problémának van megoldása, az nyilván megoldása (2.2)-nek is, és ekkor ismét csak készen vagyunk. Ha (2.5)-nek nincs megoldása, úgy a

$$P'x_0' + A'x_1' = b,\ x_1' \geq 0 \tag{2.6}$$

rendszernek van (indukció miatt). Jelölje (x_0, x_1) azt a vektort, amely úgy keletkezik (x_0', x_1')-ből, hogy az a_1-nak megfelelő komponenst x_0'-ből x_1'-be helyezzük (ami persze azt jelenti, hogy (x_0', x_1') ugyanazt az $n_0 + n_1$ dimenziós vektort jelöli, mint (x_0, x_1)).

Állítjuk, hogy (x_0, x_1) megoldása (2.1)-nek. Ehhez csak azt kell igazolnunk, hogy $x_1(1)$ (az a_1-nek megfelelő komponens) nemnegatív. Valóban, ha ez negatív lenne, akkor x_1 is és $y'A$ is olyan, hogy első komponensük negatív, a többi pedig nem az. Emiatt $(y'A)x_1 > 0$ és így $0+0 < 0+(y'A)x_1 = (y'P)x_0 + (y'A)x_1 = y'[(P,A)x] = y'b < 0$, ami lehetelen. •

Egyszerű technikai fogással a 2.2 tételt még általánosabb alakra hozhatjuk.

TÉTEL 2.3

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0 \tag{2.7}$$

primál rendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha az

$$y_0P + y_1Q = 0,\ y_0A + y_1B \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ yb := y_0b_0 + y_1b_1 < 0 \tag{2.8}$$

duális rendszernek van.

Biz. Jelölje az x_0, x_1, y_0, y_1 dimenzióját rendre n_0, n_1, m_0, m_1. Új, nemnegatív változók bevezetésével az egyenlőtlenség-rendszert egyenlőség-rendszerré alakítjuk. Legyen $B' := (B, I), A' := (A, 0)$ (ahol az I egy $m_1 \times m_1$-os egység-mátrixot, a 0 pedig egy $m_0 \times m_1$-os nulla mátrixot jelöl). Most (2.7) (x_0, x_1) megoldásai és

$$Px_0 + A'x_1' = b_0,\ Qx_0 + B'x_1' = b_1,\ x_1' \geq 0 \tag{2.9}$$

(x_0, x_1') megoldásai között egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn. Nevezetesen (x_0, x_1) az (x_0, x_1')-ből keletkezik az utolsó m_1 komponens kihagyásával, míg (x_0, x_1)-ből úgy kapjuk (x_0, x_1')-t, hogy x_1-t helyettesítjük az $x_1' := (x_1, b_1 - (Qx_0 + Bx_1))$ vektorral.

A (2.9)-hez tartozó

$$y_0P + y_1Q = 0,\ y_0A' + y_1B' \geq 0,\ yb < 0 \tag{2.10}$$

duál probléma és (2.8) ekvivalensek, hiszen csak arról van szó, hogy a (2.8)-ban explicit szereplő $y_1 \geq 0$ előjel megkötést (2.10)-ben az $y_0A' + y_1B' \geq 0$ egyenlőtlenség-rendszerben rejtettük el. A (2.9) primál feladatra felírva a 2.2 tételt az abban szereplő (2.2) duál feladat éppen a (2.10) alakot ölti. •

Megjegyezzük, hogy a Farkas lemmát még általánosabb alakban is fel lehetne írni. Például a primál feladatban lehetnek fordított irányú egyenlőtlenségek, vagy nempozitív változók. De a megfelelő egyenlőtlenség negálásával és feltételi mátrix megfelő oszlopának negálásával könnyen a (2.1)-es alakra juthatunk.

Gyakorlat 2.1 *Írjuk fel a Farkas lemmát az alábbi speciális alakokra: (i) $Bx \leq b$, (ii) $Qx \leq b, x \geq 0$.*

További kézenfekvő megjegyzés, hogy a Farkas lemmát olyan alakban is használhatjuk, amikor a rendszer balról szorzással van adva. (Egy későbbi alkalmazás miatt néhány vektort és mátrixot vesszős betűvel jelölünk.)

TÉTEL 2.4

$$y_0P + y_1Q = c_0,\ y_0A' + y_1B' \geq c_1',\ y_1 \geq 0 \tag{2.11}$$

primál rendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha a

$$Px_0 + A'x_1' = 0,\ Qx_0 + B'x_1' \leq 0,\ x_1' \geq 0,\ c_0x_0 + c_1'x_1' > 0 \tag{2.12}$$

duális rendszernek van megoldása. •

Gyakorlat 2.2 *Az $\{yA \leq c\}$ rendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha nincs olyan $x \geq 0$, amelyre $Ax = 0, cx < 0$.*

Feladat 2.3 *Tekintsük a (2.2)-ben előforduló $\{yP = 0,\ yA \geq 0,\ yb = -1\}$ rendszert, mint primál problémát és fogalmazzuk meg erre a Farkas lemmát. Mutassuk meg, hogy a felírt duális ekvivalens (2.1)-gyel.*

Feladat 2.4 *Tegyük fel van egy szubrutinunk, amely vagy az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszernek vagy a duális $\{yA \geq 0,\ yb = -1\}$ rendszernek kiszámít egy megoldását. Hogyan használhatjuk fel ezt a (2.1) vagy (2.2) rendszer megoldására?*

Feladat 2.5 *Tegyük fel van egy szubrutinunk a $\{Bx \leq b, x \geq 0\}$ rendszer megoldására. Hogyan használhatjuk fel ezt a $\{Qx \leq b\}$ rendszer megoldására?*

A bázis-megoldásról tanultakat ötvözhetjük a Farkas lemmával. Csak példaként említjük az alábbit.

TÉTEL 2.5 *Az $\{Ax = b,\ x \geq 0\}$ rendszernek akkor és csak akkor van olyan megoldása, amelyben az x pozitív változóinak megfelelő A-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ha nem létezik olyan y, amelyre $yA \geq 0,\ yb < 0$ és A-nak létezik $r(A, b) - r(b)$ lineárisan független oszlopa, amelyekre y merőleges.* •

2.2 A DUALITÁS TÉTEL

Rátérünk a lineáris programozás alapkérdésének tárgyalására: Adott c vektorra határozzuk meg, hogy egy nemüres R poliédernek mely pontja (illetve pontjai) maximalizálják a cx lineáris célfüggvényt. Röviden, maximalizáljuk cx-t R felett. Geometriailag ez avval ekvivelens, hogy a c vektor irányában keressük az R legtávolabbi pontját, vagyis egy olyant, ahol egy c normálisú hipersíkot kívülről a poliédernek tolva, az megérinti. Tegyük fel, hogy R a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{2.13}$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldás-halmaza

2.2.1 Korlátosság

Kiindulásul két kérdést kell tisztáznunk. Az elsőre, hogy az R poliéder mikor nemüres, a Farkas lemma már meg is adta a választ. A második kérdésre, hogy cx mikor korlátos felülről, az 1.19 tétel szintén adott már egyfajta választ. Ennek alapján tudjuk, hogy ha cx nem korlátos felülről, akkor erre létezik egyszerű tanúsítvány, nevezetesen a karakterisztikus kúpnak egy olyan q eleme, amelyre $cq > 0$. Másrészt, ha cx felülről korlátos, akkor legnagyobb értékét egy erős bázis-megoldáson eléri, vagyis létezik maximum. Ez ugyan igen lényeges tulajdonság, de jó lenne, ha cx korlátosságának volna egy ahhoz hasonló jellegű tömör bizonyítéka is, mint amilyen bizonyíték az előbb említett q volt a cx nem-korlátosságára. Ezt adja meg az alábbi tétel, az 1.19 tétel megismétlése mellett.

TÉTEL 2.6 *Tegyük fel, hogy a (2.13) rendszer R megoldás-halmaza nemüres, és legyen c egy n-dimenziós vektor. A következők ekvivalensek.*
(1) Minden $z \in R$ elemre létezik (2.13)-nek olyan x^* erős bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.
(2) A $\{cx\}$ lineáris függvény R-n felülről korlátos.
(3) Nem létezik olyan x vektor, amelyre $cx > 0$, és $Px = 0, Qx \leq 0$.
(4) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre

$$y_0P + y_1Q = c,\ y_1 \geq 0. \tag{2.14}$$

Biz. Az első három állítás ekvivalenciáját mondta ki az 1.19 tétel. Ha most (4) igaz, akkor tetszőleges $x \in R$ esetén $cx = (y_0P)x + (y_1Q)x = y_0(Px) + y_1(Qx) \leq y_0b_0 + y_1b_1$, vagyis a jobboldal felső korlát cx-re, így (2) teljesül. Megfordítva, ha (4) nem teljesül, akkor a Farkas lemma (2.4 tételbeli alakja) szerint létezik olyan x vektor, amelyre $Px = 0,\ Qx \leq 0, cx > 0$, vagyis ilyenkor (3) nem teljesül. •

Egy egyszerű fogással a 2.6 tételt kiterjeszthetjük arra az esetre, amikor R a

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0 \tag{2.15}$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldás-halmazát jelöli.

TÉTEL 2.7 *Tegyük fel, hogy R nemüres, és legyen $c = (c_0, c_1)$ adott vektor. A következők ekvivalensek.*
(1) Minden $z \in R$ elemre létezik (2.15)-nek olyan x^* erős bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.
(2) A $\{cx\}$ lineáris függvény R-n felülről korlátos.
(3) Nem létezik olyan $x = (x_0, x_1)$ vektor, amelyre $cx > 0$, és $Px_0 + Ax_1 = 0, Qx_0 + Bx_1 \leq 0$.
(4) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre

$$y_0P + y_1Q = c_0,\ y_0A + y_1B \geq c_1,\ y_1 \geq 0. \tag{2.16}$$

Biz. Az $x_1 \geq 0$ kívánalmat explicit beírhatjuk az egyenlőtlenségek közé $0x_0 + (-I)x_1 \leq 0$ alakban. Erre alkalmazva a 2.6 tételt, az ottani feltételek éppen az itteniekbe mennek át. •

2.2.2 Optimalitási feltételek

Tegyük most fel, hogy R nemüres és cx felülről korlátos R felett. A fő kérdésünk mindezek után az, hogy mennyi $\max\{cx : x \in R\}$, illetve, hogy miként lehetne az optimum helyeket jellemezni. Az utóbbi kérdéssel kezdjük.

TÉTEL 2.8 *Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ poliéder nemüres, $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos, és x^* az R egy eleme. Jelölje $Q^=_*$ a Q mátrix azon sorai által alkotott részmátrixot, amelyeknek megfelelő egyenlőtlenségeket x^* egyenlőséggel teljesíti. Legyen $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$. A következő állítások ekvivalensek.*
(1) $cx^* \geq cx$ minden $x \in R$, azaz x^* maximalizálja a cx függvényt az R-n.
(2) Nem létezik olyan x' elem, amelyre $Px' = 0$, $Q^=_* x' \leq 0$, és $cx' > 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$, $yM = c$ és $y(b - Mx^*) = 0$. (Miután mind y_1, mind $b_1 - Qx^*$ nemnegatív, az utolsó egyenlőség azt jelenti, hogy ha y_1 valamely komponense pozitív, akkor a neki megfelelő primál egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, és így $cx^* = by$).

Biz. (1) $\Rightarrow$ (2) Ha létezik a szóbanforgó x', akkor kicsiny pozitív λ-ra a $x^* + \lambda x'$ vektor R-ben van, ami cx' pozitívsága miatt ellentmond x^* maximalitásának.

(2) $\Rightarrow$ (3) Ha az $(y_0, y^=_*)\begin{pmatrix} P \\ Q^=_* \end{pmatrix} = c$ rendszernek létezik olyan megoldása, amelyben $y^=_* \geq 0$, akkor ezt nullákkal kiegészítve az előírt (y_0, y_1)-t kapjuk. Ha nem létezik ilyen $(y_0, y^=_*)$, akkor a Farkas lemma szerint létezik olyan x', amelyre $Px' = 0$, $Q^=_* x' \leq 0$, $cx' > 0$, ellentétben (2)-vel.

(3) $\Rightarrow$ (1) Tetszőleges $x \in R$ esetén $cx = (yM)x = y(Mx) \leq yb$. Másrészt (3) szerint $y(b - Mx^*) = 0$, azaz $y(Mx^*) = yb$ és így $cx^* = (yM)x^* = y(Mx^*) = yb \geq cx$, vagyis x^* valóban maximalizálja cx-t R felett. •

Ismét csak kiterjeszthetjük a tételt az általános alakra.

TÉTEL 2.9 *Tegyük fel, hogy a*

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0 \tag{2.17}$$

rendszerrel definiált R poliéder nemüres, $\{cx = c_0x_0 + c_1x_1 : x \in R\}$ felülről korlátos, és legyen $x^* = (x_0^*, x_1^*)$ az R egy eleme. Jelölje $(Q^=_*, B^=_*)$ a (Q, B) mátrix azon sorai által alkotott részmátrixot, amelyeknek megfelelő egyenlőtlenségeket x^* egyenlőséggel teljesíti. A következő állítások ekvivalensek.
(1) $cx^* \geq cx$ minden $x \in R$, azaz x^* maximalizálja a cx függvényt az R-n.
(2) Nem létezik olyan $x' = (x'_0, x'_1)$, amelyre $x'_1 \geq 0$, $Px_0 + Ax_1 = b_0$, $Q^=_* x_0 + B^=_* x_1 \leq b^=_*$ és $cx' > 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$, $y_0P + y_1Q = c_0$, $y_0A + y_1B \geq c_1$, az y_1 valamely komponense csak akkor lehet pozitív, ha a neki megfelelő primál egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül továbbá az x_1 valamely komponense csak akkor lehet pozitív, ha a neki megfelelő duál egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül (és így $cx^* = by$). •

2.2.3 Dualitás tétel

Miután jellemeztük az optimum helyeket tekintsük a lineáris programozási optimalizálási probléma legáltalánosabb alakját. A primál probléma a következő:

$$\{\max(c_0x_0 + c_1x_1) : Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0\}. \tag{2.18}$$

A 2.7 tételben láttuk, hogy a maximumra a (2.16) poliédernek tetszőleges $y = (y_0, y_1)$ eleme egy felső korlátot biztosít, melynek értéke $cy = c_0y_0 + c_1y_1$. A legerősebb (azaz legkisebb) felső korlátot persze úgy kapjuk, ha ezt a cy-t minimalizáljuk. Célszerű tehát a primál optimalizálási problémához hozzárendelni egy úgynevezett duális optimalizálási feladatot:

$$\{\min(c_0y_0 + c_1y_1) : y_0P + y_1Q = c_0,\ y_0A + y_1B \geq c_1,\ y_1 \geq 0\}. \tag{2.19}$$

A (2.19)-ban szereplő poliédert R^*-gal jelöljük és **duális** poliédernek hívjuk. (Figyelem: R^* az $m := m_1 + m_2$ dimenziós térben van, míg R az $n := n_1 + n_2$ dimenziósban. Az R^* nem csak az R primál poliédertől függ, hanem a c-től is, sőt az R megadásától is.)

TÉTEL 2.10 (Dualitás tétel) *Tegyük fel, hogy a (2.18) rendszer által definiált R primál poliéder nemüres. Tegyük fel továbbá, hogy a $cx = c_0x_0 + c_1x_1$ célfüggvényre nézve $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos (vagy ekvivalensen a duális R^* poliéder nemüres). Ekkor a primál optimalizálási feladatban a maximum egyenlő a duál feladatban szereplő minimummal.*

A korábban látott redukció szerint elég a tételt a következő speciális esetére igazolni.

TÉTEL 2.11 (Dualitás tétel speciális alak) *Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ primál poliéder nemüres és hogy az $R^* := \{y = (y_0, y_1) : yM = c, y_1 \geq 0\}$ duális poliéder nemüres (ami avval ekvivalens, hogy $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos), ahol M ismét a $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrixot jelöli. Ekkor* $\max(cx : x \in R) = \min(by : y \in R^*)$.

Biz. Tetszőleges $x \in R$ és $y \in R^*$ elemekre $cx = (yM)x = y(Mx) \leq y_0b_0 + y_1b_1 = yb$. Így $\max \leq \min$. Az egyenlőség igazolásához egy olyan $x^* \in R$ és $y^* \in R^*$ primál és duál megoldás-párt kell találnunk, amelyekre $cx^* = by^*$. Az 1.21 következmény szerint, ha $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos, akkor a maximum egy x^* erős bázis-megoldáson felvétetik. A 2.8 tétel szerint létezik olyan $y^* \in R^*$ vektor, amelyre $y^*(b - Mx^*) = 0$, amiből $y^*b = cx^*$ következik. •

Feladat 2.6 *Irjuk fel a $\min\{\alpha : Ax - \alpha b = b, (x, \alpha) \geq 0\}$ lineáris program duálisát, igazoljuk mind a primál, mind a duál rendszer megoldhatóságát, és a dualitás tételből vezessük le a Farkas lemmát (2.1 tétel).*

Feladat 2.7 *Tegyük fel, hogy az $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ poliéder nem üres. Az A egy a_i oszlopát* **érdektelennek** *mondjuk, ha a poliéder minden x elemére $x(i) = 0$. Igazoljuk, hogy van olyan y vektor, amelyre $yb = 0$, $yA \geq 0$ és ya_i pontosan akkor pozitív, ha a_i érdektelen!*

Azt mondjuk, hogy egy $c'x$ célfügvény vagy a c' vektor valamely R poliéderre nézve **neutrális** (semleges), ha R minden x elemére $c'x$ értéke ugyanaz. Két vektort (célfüggvényt) akkor mondunk **ekvivalensnek,** ha különbségük neutrális.

Feladat 2.8 *Tekintsük az $\{\min cx : Ax = b, x \geq 0\}$ lineáris programot. Legyen A' az A érdekes oszlopai által alkotott részmátrix és jelölje c' a c megfelelő részét. Igazoljuk hogy c akkor és csak akkor neutrális, ha létezik olyan y, amelyre $yA' = c'$.*

Feladat 2.9 *Az $R := \{Ax = b, x \geq 0\}$ poliéder valamely x_0 eleme akkor és csak akkor minimalizálja cx-t R-n, ha létezik egy olyan c-vel ekvivalens nemnegatív vektor, amely merőleges x_0-ra.*

Feladat 2.10 *Tekintsük az $R := \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ primál és $R^* = \{y : yA \geq c, y \geq 0\}$ duál poliédereken definiált $\max\{cx : x \in R\}$ és $\min\{by : y \in R^*\}$ primál-duál lineáris program párt, és tegyük fel, hogy R és R^* nem üres. Igazoljuk, hogy az A-nak van olyan A' nemszinguláris részmátrixa (mindegy milyen méretű), amelyre az $A'x' = b'$ egyértelmű x' megoldásából nullák hozzávételével keletkező x_1 eleme R-nek (ahol b' azon része b-nek, amely az A' sorainak felel meg) továbbá az $y'A' = c'$ egyértelmű y' megoldásából nullák hozzávételével keletkező y_1 eleme R^*-nak. Mutassuk meg, hogy x_1 primál optimum, y_1 duál optimum.*

2.2.4 Lineáris és logikai következmény

Vizsgáljuk meg, hogy egy (nemüres) poliéder mikor fekszik teljesen egy adott zárt féltérben. Tekintsük a (2.15) rendszer által definiált R poliédert, és tegyük fel, hogy R nemüres. Legyen $c = (c_0, c_1)$ adott vektor. Az (x_0, x_1) vektort néha röviden x-szel jelöljük, és hasonlóképp a $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ vektort b-vel. Azt mondjuk, hogy a

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 \leq \gamma \tag{2.20}$$

egyenlőtlenség **logikai következménye** a (2.15) rendszernek, ha (2.15) minden megoldása teljesíti (2.20)-t. Ez nyilván avval egyenértékű, hogy az R poliéder benne van az $\{x : cx \leq \gamma\}$ féltérben. A (2.20) egyenlőtlenség **lineáris következménye** (2.15)-nek, ha létezik olyan $y := (y_0, y_1)$, amelyre

$$y_1 \geq 0,\ y_0 P + y_1 Q = c_0,\ y_0 A + y_1 B \geq c_1,\quad yb \leq \gamma. \tag{2.21}$$

Abban a speciális esetben, amikor A és B üres, az R-t definiáló rendszer a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{2.22}$$

alakra egyszerűsödik, és ilyenkor a $cx \leq \gamma$ egyenlőtlenség definíció szerint akkor lineáris következmény, ha létezik olyan $y := (y_0, y_1)$, amelyre

$$y_1 \geq 0,\ y_0 P + y_1 Q = c,\ yb \leq \gamma. \tag{2.23}$$

TÉTEL 2.12 *Feltéve, hogy R nemüres, (2.20) akkor és csak akkor lineáris következménye (2.15)-nek, ha logikai. Speciálisan, $cx \leq \gamma$ akkor és csak akkor lineáris következménye (2.22)-nek, ha logikai.*

Biz. Először a speciális esetet bizonyítjuk, és ebből majd egyszerű fogással következik az általános.

Tegyük fel először, hogy $cx \leq \gamma$ lineáris következmény, azaz létezik a szóbanforgó y. Ekkor (2.22) bármely x megoldására $cx = [(y_0, y_1)\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}]x = y_0(Px) + y_1(Qx) \leq y_0 b_0 + y_1 b_1 = yb \leq \gamma$, azaz $cx \leq \gamma$ valóban logikai következmény.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $cx \leq \gamma$ logikai következmény. Jelölje A' azt az $m_0 \times 1$-es mátrixot, melynek egyetlen oszlopa a $-b_0$ vektor, míg B' azt az $m_1 \times 1$-es mátrixot, amelynek egyetlen oszlopa a $-b_1$ vektor. Legyen $c' := (c, -\gamma)$ és $x' := (x, \alpha)$ (itt tehát γ a tételben megadott szám, míg α egy új változó, amellyel az x vektort kiegészítettük).

Tekintsük a (2.23) rendszert. Ha ennek van y megoldása, akkor az teljesíti a tétel által (a speciális esetben) megkívánt tulajdonságokat. Tegyük fel indirekt, hogy nem létezik ilyen y. Ekkor a 2.4 tétel szerint létezik olyan $x' = (x, \alpha)$, amelyre

$$\alpha \geq 0, Px - \alpha b_0 = 0, Qx - \alpha b_1 \leq 0, cx - \alpha\gamma > 0. \tag{2.24}$$

Ha most $\alpha = 0$, akkor ez a következő alakot ölti:

$$Px = 0,\ Qx \leq 0,\ cx > 0. \tag{2.25}$$

Ebből következik, hogy az R poliéder egy z elemére bármilyen pozitív λ esetén $z + \lambda x$ benne van R-ben, ugyanakkor $c(z + \lambda x)$ bármilyen nagy lehet, ha λ nő, vagyis (2.23) nem volna logikai következmény.

Amennyiben α pozitív, úgy feltehető, hogy $\alpha = 1$, mert α-val végigoszthatunk. Most (2.24) azzal ekvivalens, hogy

$$Px = b_0,\ Qx \leq b_1,\ cx > \gamma, \tag{2.26}$$

vagyis az x létezése cáfolja, hogy $cx \leq \gamma$ logikai következmény volna.

Az általános eset bizonyításához legyen $B^* := \begin{pmatrix} B \\ -I \end{pmatrix}$, $Q^* := \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix}$, ahol I egy $n_2 \times n_2$-es egységmátrix, míg 0 egy $n_2 \times n_1$-es nulla-mátrix. Legyen $b_1^* := \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ahol 0 most egy n_2 dimenziós 0-vektor. Könnyen ellenőrizhető, hogy a tétel speciális esete, a P, Q^*, A, B^* mátrixokra felírva a $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1^* \end{pmatrix}$ jobboldallal, éppen az általános alakkal ekvivalens. •

A megelőző szakaszban megmutattuk, hogy a dualitás tétel miképp vezethető le a Farkas lemmából és abból a tételből, hogy a maximum (erős bázis-megoldáson) felvétetik. A 2.12 tétel bizonyítása csak a Farkas lemmáre támaszkodott. Most megmutatjuk, hogy a dualitás tétel könnyen levezethető a 2.12 tételből.

TÉTEL 2.13 (Dualitás tétel speciális alak) *Tegyük fel, hogy mind az* $R := \{Bx \leq b, x \geq 0\}$ *primál, mind az* $R^* := \{yB \geq c, y \geq 0\}$ *duál poliéder nem-üres. Ekkor* $cx \leq by$ *fennáll minden* $x \in R, y \in R^*$ *esetén, és van olyan* $x^* \in R, y^* \in R^*$ *melyekre egyenlőség érvényes, azaz* $\max(cx : x \in R) = \min(by : y \in R^*)$.

Biz. Az x és y nem-negatívitása miatt $x \in R, y \in R^*$ esetén $cx \leq (yA)x = y(Ax) \leq yb$, így mindenesetre cx felülről korlátos R-n, by pedig alulról R^*-n. Legyen $\gamma_s := \sup(cx : x \in R)$ és $\gamma_i := \inf(by : y \in R^*)$. Ekkor tetszőleges $x \in R, y \in R^*$ esetén $cx \leq \gamma_s \leq \gamma_i \leq by$. A tételhez azt kell belátnunk, hogy létezik $x^* \in R$, amelyre $cx^* = \gamma_i$ és létezik $y^* \in R^*$, amelyre $by^* = \gamma_s$. Szimmetria miatt elég y^* létezését belátnunk, x^*-é analóg módon következik.

Most tehát a $cx \leq \gamma_i$ egyenlőtlenség logikai következménye a $Bx \leq b, x \geq 0$ egyenlőtlenségrendszernek, így a 2.12 tétel szerint létezik olyan $y^* \geq 0$, amelyre $y^*B \geq c$ és $y^*b \leq \gamma_i$. De itt a γ_i definíciója miatt nem szerepelhet szigorú egynelőtlenség, azaz $y^*b = \gamma_i$. •

2.2.5 Neumann tétele

A játékelméletben fontos alkalmazásra lel a következő tétel. Egy vektor **tetején** értsük a legnagyobb koordinátájának az értékét. A vektor **alja** legyen a legkisebb koordinátájának az értéke.

TÉTEL 2.14 (Neumann János) *Tetszőleges nemüres* A *mátrixra az* A *oszlopvektorai által feszített politopban lévő elemek tetejének a minimuma egyenlő az* A *sorvektorai által feszített politopban lévő elemek aljának maximumával. Formálisabban* $\min[(\max Ax) : x \geq 0, 1x = 1] = \max[(\min yA) : y \geq 0, 1y = 1]$.

Biz. A primál feladat egy olyan minimális w szám keresésével ekvivalens, amelyre létezik $x \geq 0$ vektor úgy, hogy $1x = 1$ és $Ax \leq (w, w, \ldots, w)$ érvényes. Ez viszont éppen a

$$\{\min w : -Ax + (w, w, \ldots, w) \geq 0, x \geq 0, 1x = 1\} \tag{2.27}$$

lineáris programmal egyenértékű.

A duális feladat egy olyan maximális z szám keresésével ekvivalens, amelyre létezik $y \geq 0$ vektor úgy, hogy $1y = 1$ és $yA \geq (z, z, \ldots, z)$ érvényes. Ez viszont éppen a

$$\{\max z : y(-A) + (z, z, \ldots, z) \leq 0, y \geq 0, 1y = 1\} \tag{2.28}$$

lineáris programmal egyenértékű. Miután a (2.28) program duálisa éppen a (2.27) program, így a dualitás tételből adódik, hogy a w minimális értéke egyenlő a z maximális értékével. •

December 28, 2001

2.3 JÁTÉKELMÉLETI ALKALMAZÁS

Sári és Oszi a következő játékot játsszák. Egyszerre elrejtenek a kezükben egy vagy két forintot és egyúttal tippelnek, hogy a másik egy vagy két forintot rejtett-e el. Amennyiben mindkettejük tippje helyes, avagy mindkettejük tippje hibás, úgy a játék döntetlen. Ha viszont pontosan az egyikük tippje helyes, úgy a jól tippelő elnyeri a kettejük által elrejtett pénz **összegét** (ami tehát 2,3 vagy 4 forint). Ez a játék egy fordulója. Kérdés, hogy ha N fordulót játszanak, milyen stratégiát érdemes követni.

Mindkét játékos egy lehetséges fordulóbeli játékát egy számpárral lehet megadni, amelynek első tagja azt jelenti, hogy hány forintot rejtett, a második tagja pedig azt, hogy hány forintot tippelt. Vagyis egy fordulóban mindkét játékos előtt négy lehetséges választás van: $[1,1]$, $[1,2]$, $[2,1]$, $[2,2]$. Nevezzük ezeket **elemi** vagy **tiszta** stratégiának. A későbbiekben ezen sorrend szerint fogunk rájuk hivatkozni (tehát pl. a 3-dik elemi stratégia $[2,1]$).

Ha Sári például mindig az $[1,1]$ párt választja, akkor könnyen rosszul járhat, mert ezt ellenfele hamar kifigyelheti, és akkor a $[2,1]$ választással mindig nyer. Sári persze ravaszabbul is eljárhat, például mindig ugyanúgy rejt és tippel, mint ahogy Oszi tette a megelőző fordulóban, de ennek a stratégiának is az a hátulütője, hogy Oszi előbb-utóbb rájöhet az alkalmazott szabályra és akkor már könnyen nyer. Ez a veszély minden determinisztikusan meghatározott választási szabály esetén fennáll. Ezt elkerülendő Sári minden fordulóban a véletlentől teszi függővé a választását. Természetesen az a kérdés, hogy milyen valószínűséggel válasszon a négy lehetőség közül.

Tételezzük fel, hogy a lejátszott N forduló során Oszi c_i-szer játszotta meg az i-dik elemi stratégiát ($i = 1, \ldots, 4$), azaz $\sum c_i = N$. Tegyük fel, hogy Sári a következő stratégiát alkalmazta: mindig az ellenkezőjét mondja annak, mint amit tippel és ezen belül $1/2$ valószínűséggel rejt 1 vagy 2 forintot. Másként szólva a $(0, 1/2, 1/2, 0)$ valószínűségek szerint választ minden fordulóban a négy elemi stratégiából. Várható értékben mekkora nyereségre számíthat?

Oszi c_1-szer játszott $[1,1]$-t. Átlagosan ezen c_1 eset felében Sári $[1,2]$-t játszik, amikoris Sári 2 forintot veszít, a másik $c_1/2$ esetben Sári $[2,1]$-t játszik, és ekkor 3 forintot nyer. Tehát Sári várható nyeresége $3c_1/2 - 2c_1/2 = c_1/2$.

$c_2 + c_3$ esetben Oszi mást tippel, mint rejt, ezek a fordulók tehát mind döntetlenek.

Végül Oszi c_4 esetben játszik $[2,2]$-t. Ezeknek átlagosan a felében Sári $[1,2]$-t játszik és nyer 3 forintot, míg a másik felében Sári $[2,1]$-t játszik és veszít 4 forintot. Ezen c_4 esetben tehát Sári várható össz-nyeresége $3c_4/2 - 4c_4/2 = -c_4/2$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az N forduló során Sári várható össz-nyeresége $(c_1 - c_4)/2$ forint, ami persze veszteség, ha $c_4 > c_1$. Vagyis a fent választott $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ valószínűségi választás mellett Sári akkor jár a legrosszabbul, ha $c_4 = N$ és $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Ekkor Sári teljes vesztesége várhatólag $N/2$ forint, azaz fordulónként átlagosan $1/2$ Ft. Azaz Sári ezzel a stratégiával azt tudja biztosítani magának, hogy átlagos vesztesége Oszi bármilyen játéka esetén se haladja meg az $1/2$ forintos fordulónkénti átlagot.

Az $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ valószínűségek helyett természetesen választhatunk más eloszlást is. Nevezzünk egy y vektort **sztochasztikusnak**, ha nem-negatív és $1 \cdot y = 1$. Minden sztochasztikus vektor egy **kevert stratégiát** definiál. Természetesen a fentiek mintájára tetszőleges kevert stratégiára rögzített $c := (c_1, \ldots, c_4)$ gyakoriságok esetén kiszámíthatjuk Sári várható nyereségét. Könnyű ellenőrizni, hogy ez éppen az $(yA)c$ szám lesz, ahol A az úgynevezett kifizetési mátrix (Sári szempontjából). Azaz A egy $4 \cdot 4$-s mátrix, amelynek a_{ij} eleme Sári nyereségét (másszóval Oszi veszteségét) jelzi, ha Sári az i-dik, míg Oszi a j-dik elemi stratégiát játssza.

Sári akkor fogja egy másik kevert stratégiáját jobbnak tekinteni, mint a $(0, 1/2, 1/2, 0)$ kevert stratégia, ha a fordulónkénti átlagos nyeresége nagyobb, mint az előbb adódott $-1/2$ forint. Van-e ilyen jobb stratégia és hogyan lehet a legjobbat megtalálni?

Általánosabban fogalmazva legyen adva egy A $n \times m$-es mátrix. A sorjátékos Sári és az oszlopjátékos Oszi azt játsszák, hogy minden fordulóban Sári kiválasztja A-nak egy i sorát, míg Oszi A-nak egy j oszlopát, és ennek megfelelően Oszi fizet Sárinak a_{ij} forintot (ami persze azt jelenti, hogy ténylegesen Sári fizet, amennyiben a_{ij} negatív.) Az előbbi játékhoz például a következő mátrix tartozik.

$$\begin{array}{c} \\ [1,1] \\ [1,2] \\ [2,1] \\ [2,2] \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [1,1] & [1,2] & [2,1] & [2,2] \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sári egy kevert stratégiáját egy y (m-dimenziós) sztochasztikus vektor definiálja éspedig úgy, hogy Sári minden fordulóban $y(i)$ valószínűséggel választja az i-dik sort.

Tegyük fel, hogy N forduló során Oszi c_j-szer játszotta meg a j-dik oszlopot ($\sum c_j = N$). Ekkor a j-dik oszlop gyakorisága $x_j := c_j/N$. Nyilván a gyakoriságok $x := (x_1, \ldots, x_n)$ vektora sztochasztikus.

Mennyire jó Sárinak egy rögzített y sztochasztikus vektor mint kevert stratégia? Adott x gyakoriság esetén Sári össz-nyeresége várható értékben $(yA)c$, vagyis fordulónkénti átlagos nyeresége $(yA)x$. Ez azon x gyakoriság mellett a legrosszabb Sárinak, amelyre $(yA)x$ legkisebb. Vagyis egy y kevert stratégia $f(y)$ jóságát az $f(y) := \min((yA)x : x$ sztochasztikus) érték méri. Sárinak tehát az az y a legjobb, amelyre $f(y)$ maximális.

Rögzített y esetén nagyon könnyű $f(y)$-t megállapítani, hiszen ez az $\min(a_y x : x \geq 0, 1 \cdot x = 1)$ lineáris programnak az optimuma, ahol $a_y := yA$. Mivel az optimum csúcsokban vétetik fel és az $\{x : x \geq 0, 1 \cdot x = 1\}$ poliéder csúcsai épp a $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ alakú egységvektorok (n darab), ezért $f(y)$ nem más, mint az yA vektor legkisebb komponense.

Sári optimális kevert stratégiájának megkeresése tehát egy olyan sztochasztikus y vektor megkeresésével egyenértékű, amelyre az yA vektor legkisebb komponense a lehető legnagyobb. Tehát egy olyan maximális z számot kell keresnünk, amelyre létezik $y \geq 0$ úgy, hogy $1 \cdot y = 1$ és $yA \geq (z, z, \ldots, z)$. Ez viszont éppen a következő lineáris programozási feladat.

$$\max(z : y(-A) + (z, \ldots, z) \leq 0, y \geq 0, 1 \cdot y = 1) \qquad (P)$$

A duális lineáris program

$$\min(w : -Ax + (w, w, \ldots, w) \geq 0, x \geq 0, 1 \cdot x = 1). \qquad (D)$$

Ez az előbbiek mintájára azzal ekvivalens, hogy keressünk olyan sztochasztikus x vektort, amelyre az Ax vektor legnagyobb komponense a lehető legkisebb. Egy ilyen x vektor nem csak a sorjátékos, Sári szempontjából elképzelhető leghátrányosabb gyakoriságként értelmezhető (ahogy eddig tettük), hanem az oszlopjátékos, Oszi optimális kevert stratégiájaként is. Tekintettel arra, hogy mind a primál, mind a duál lineáris programnak van megoldása, a szóbanforgó minimum és maximum létezik és a dualitás tétel szerint egymással egyenlők. Ebből kapjuk a következő tételt.

TÉTEL 2.15 (Neumann János) *Tetszőleges A mátrix által meghatározott mátrixjáték esetén a sorjátékos várható nyereségének maximuma egyenlő az oszlopjátékos várható veszteségének minimumával.*

Visszatérve a kiindulási mátrixjátékhoz, kiszámítható (például a szimplex módszer segítségével), hogy a legjobb kevert stratégia $[0, 3/5, 2/5, 0]$. Ennek alkalmazásával Sári biztosíthatja, hogy várható értékben nem veszít.

Ha ténylegesen játszani akarjuk a játékot, meg kell állapodni abban, hogy egy fordulóban ki mondja ki először a tippjét. Oszi nagyvonalú akar lenni és felajánlja, hogy mindig ő mondja ki először. Tehát mindketten rejtenek, majd Oszi kimondja a tippjét, utána Sári is kimondja a tippjét. Feltéve, hogy Sári gondolkodhat Oszi tippjének ismeretében (de persze azon már nem változtathat, amennyit rejtett), ki tudja-e aknázni Sári ezt a látszólagos előnyt? Ránézésre azt gondolhatnánk, hogy ez nem jelenthet valódi előnyt, hiszen az elrejtett forintok száma minden fordulóban azelőtt kerül meghatározásra mielőtt akármelyik tipp elhangzik. Mindenesetre a fenti általános model segítségével a kérdést precízen meg lehet válaszolni. Az eredeti mátrixot még kiegészítjük négy sorral, mivel Sárinak négy új tiszta stratégiája adódott. Nevezetesen: A: Sári 1-t rejt és ugyanazt tippeli, mint Oszi, B: Sári 1-t rejt és az ellenkezőjét tippeli, mint Oszi, C: 2-t rejt és ugyanazt tippeli, mint Oszi, D: 2-t rejt és az ellenkezőjét tippeli, mint Oszi. A szimplex módszer segítségével ki lehet számítani, hogy Sári optimális kevert stratágiáját a következő sztochasztikus vektor adja meg: $[0, 56/99, 40/99, 0, 0, 2/99, 0, 1/99]$.

Ennek alkalmazásával Sári (Oszi bármilyen játéka esetén is) átlagosan $4/99$ forint nyereségre számolhat fordulónként.

Végül külön is megfogalmazzuk Neumann fenti min-max tételét, immár játékelméleti fogalmak nélkül. Tetszőleges z vektorra jelölje $\min z$ illetve $\max z$ a z vektor komponenseinek minimumát illetve maximumát.

NEUMANN TÉTELE *Tetszőleges A mátrix esetén* $\max(\min(yA) : y \geq 0, 1 \cdot y = 1) = \min(\max(Ax) : x \geq 0, 1 \cdot x = 1)$.

Biz. A baloldal optimuma épp a fenti (P) primál program optimuma, a jobboldalé pedig a (D) duál program optimuma. •

December 28, 2001

2.3.1 ELIMINÁCIÓS ELJÁRÁS

Az alábbiakban megadunk egy eléggé kézenfekvő eliminációs eljárást a

$$Bx \leq b \tag{2.29}$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldására. A módszer Fouriertől származik, amelyet később Motzkin újra felfedezett, így az irodalomban Fourier-Motzkin eliminációként hivatkozzák. Egyúttal megadjuk a megoldhatóság szükséges és elegendő feltételét.

TÉTEL 2.16 (Farkas lemma, változat) *(2.29)-nek akkor és csak akkor létezik megoldása, ha nincs megoldása az*

$$yB = 0, y \geq 0, yb < 0 \tag{2.30}$$

rendszernek.

Biz. Nyilván (2.29) és (2.30) mindegyike nem oldható meg, mert akkor $0 = (yB)x = y(Bx) \leq yb < 0$.

Annak kimutatására, hogy a két rendszer egyike megoldható az oszlopok n száma szerinti indukciót alkalmazunk. $n = 1$-re a tétel könnyen ellenőrizhető. Rögzített oszlopszám esetén az első oszlopban szereplő nemnulla elemek száma szerinti indukciót használunk. Amennyiben ez a szám nulla, azaz $b_1 = 0$, úgy az első oszlopot eltörölve mind a primál, mind a duál feladat megoldhatósága szempontjából ekvivalens feladatot kapunk, és így indukcióval készen vagyunk.

Legyen most $b_1 \neq 0$ és tegyük fel először, hogy b_1-nek van pozitív és negatív komponense is. Mivel egy egyenlőtlenség-rendszer egy sorát pozitív számmal szorozva ekvivalens rendszert kapunk, feltehetjük, hogy b_1 minden eleme $(0, \pm 1)$-értékű. Legyen mondjuk $b_{1,1} = 1$. Minden olyan i sorra, amelyre $b_1(i) = -1$, vegyük az egyenlőtlenség-rendszerhez a ${}_{i'}bx' \leq b(i')$ egyenlőtlenséget, ahol ${}_{i'}b := ({}_1b +_i b)$ és $b(i') := b(1) + b(i)$, majd töröljük el az első sort. Jelölje a kapott rendszert $B'x' \leq b'$. A B' első oszlopában kevesebb nemnulla elem van, mint b_1 -ben, hiszen minden új sor első eleme nulla és a kitörölt első sor első eleme nemnulla volt. Így $B'x' \leq b'$-re indukció miatt érvényes a tétel.

Amennyiben $B'x' \leq b$-nek létezik megoldása, úgy ezt válasszuk olyannak, amelyben $x'(1)$ a lehető legkisebb. Ekkor létezik egy olyan i index, amelyre $b_1(i) = -1$ és ${}_ibx' = b(i)$. Miután $({}_1b +_i b)x' \leq b(1) + b(i)$, következik, hogy ${}_1bx' \leq b(1)$, azaz x' automatikusan kielégíti (2.29)-t. Ha $B'x' \leq b$-nek nincs megoldása, akkor indukció miatt létezik olyan $y' \geq 0$, amelyre az $y'B' = 0$ és $y'b' < 0$. Legyen most $y(1) := \sum\{y(i') : b_1(i) = -1\}$, $y(i) := y'(i)$ ha $i \geq 2, b_1(i) \geq 0$ és $y(i) := y'(i) + y'(i')$, ha $b_1(i) = -1$. Könnyen látszik, hogy az így definiált y kielégíti (2.30)-t.

Az az eset marad hátra, amikor b_1 nemnegatív, de nem nulla. (Ha b_1 nem-pozitív, helyettesíthetjük a negatívjával). Amennyiben b_1 minden komponensében pozitív, úgy kellően kicsiny λ számra $\lambda b_1 \leq b$, és így az n-dimenziós $x = (\lambda, 0, 0, \ldots, 0)$ vektorra $Bx \leq b$. Ha b_1-nek vannak 0 komponensei, úgy jelölje B' a B azon részmátrixát, amely b_1 oszlop valamint a b_1 pozitív komponenseinek megfelelő sorok eltörlésével áll elő. Amennyiben $B'x' \leq b'$-nek létezik megoldása, akkor ezt egy alkalmasan kicsiny λ komponenssel kibővítve a $Bx \leq b$ egy megoldását kapjuk. Ha $B'x' \leq b$-nek nincs megoldása, akkor indukció alapján létezik $y' \geq 0$, amelyre $y'B' = 0$ és $y'b' < 0$. Ekkor az y'-t 0 komponensekkel kiegészítve (2.30)-nek kapjuk egy megoldását. •

A bizonyítást induktívan mondtuk el, de valójában ez egy véges algoritmust eredményez. Nevezetesen, a leírt eljárás ismétlésével meg tudunk szabadulni az első oszloptól, másszóval eliminálják az első változót (persze azon az áron, hogy számos új egyenlőtlenséget a rendszerhez veszünk). Majd ezt ismételgetve egymás után eliminálják a változókat, amíg egyetlen változónk marad. Ha az erre kapott ("igen sok") egyenlőtlenségnek van megoldása (ezt egy változó esetén triviális eldönteni), akkor a fentiek alapján visszafelé haladva meg tudjuk határozni (2.29)-nek egy megoldását.

Az eljárás hátránya, hogy egyetlen változó eliminálása sok új egyenlőtlenséget hoz be, vagyis menet közben az egyenlőtlenségek száma nagyon felszaporodhat. Sajnos ez nem csak elvi lehetőség, amint a következő példa mutatja. Legyen p pozitív egész és $n := 2^p + p + 2$. n darab változónk lesz: $x_1, \ldots, x_n$. $8\binom{n}{3}$ egyenlőtlenségünk van, mindegyik $\pm x_i \pm x_j \pm x_k \leq b_{ijk}$ alakú, ahol b_{ijk} adott számok. t szerinti indukcióval látható, hogy t változó kiejtése után az új egyenlőtlenségek között szerepelni fog az összes $\pm x_{j_1} \pm x_{j_2}, \ldots, \pm x_{j_s} \leq b_{j_1,\ldots,j_s}$ alakú, ahol $s = 2^t + 2$ és $t + 1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_s \leq n$. Így p lépés után a megmaradt változók száma $n' = n - p = 2^p + 2$ míg az egyenlőtlenségek száma legalább $2^{2^p+2} = 2^{n'}$.

Tapasztalat szerint a FM elimináció legfeljebb csak kis példákon használható, nagyobbakon tipikusan ténylegesen kezelhetetlenül sok egyenlőtlenség keletkezik.

A példában olyan egyenlőtlenség rendszer szerepelt, amelynek minden sorában három 1 abszolút értékű együttható volt. Érdekes, hogy ha csak két 1 abszolút értékű együttható van minden sorban, akkor a Fourier-Motzkin eljárás polinomiális futásidejű. Egy (sor)vektort nevezzünk szimplának, ha vagy egy nemnulla eleme van (és erről feltehető, hogy 1 abszolút értékű), vagy kettő, melyek mindegyike 1 abszolút értékű. Könnyű megfigyelni, hogy ha a kiindulási mátrix minden sora szimpla, akkor a fentebb leírt FM eljárás során keletkező új sorok is szimplák lesznek. Miután szimpla vektor csak kevés lehet, ilyen esetben az FM eljárás polinomiális. (Természetesen menetközben a redundáns egyenlőtlenségeket ki kell dobni: ha például az $x_1 + x_2 \leq 3$ és az $x_1 + x_2 \leq 4$ egyenlőtlenségek adódnak ki, akkor az utóbbi felesleges.)

Szimpla sorokból álló mátrixokra, egészértékű b esetén azt is el lehet dönteni, hogy a $Bx \leq b$ rendszernek létezik-e egész értékű megoldása. Az az egyetlen különbség, hogy ha menetközben keletkezik mondjuk egy $2x_i \leq \beta$ alakú egyenlőtlenség, akkor ezt az $x_i \leq \lfloor \beta/2 \rfloor$ egyenlőtlenséggel kell helyettesíteni.

Gyakorlat 2.11 *Tekintsük négy változóban az $x_i \geq 0$, $x_i + x_j = 1$ $(1 \leq i < j \leq 4)$ rendszert. Döntsük el az FM eliminációval, hogy van-e megoldása és hogy van-e egész megoldása.*

Feladat 2.12 *Legyen M a G irányítatlan gráf egy teljes párosítása. Fejlesszünk ki (polinomiális futásidejű) algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e olyan Z stabil ponthalmaz, amely minden párosítás él egyik végpontját tartalmazza.*

Abban a speciális esetben, amikor a mátrix minden sorában vagy egyetlen nemnulla elem szerepel és ennek az abszolút értéke 1, vagy pedig egy $+1$-es és egy -1-es, akkor az FM elimináció automatikusan fenntartja ezt az alakot. Következik, hogy ha a jobboldali b vektor egészértékű, és a $Bx \leq b$ rendszernek van megoldása, akkor van egész megoldása is (és az FM egy ilyet meg is talál).

Feladat 2.13 *Igazoljuk, hogy egy élsúlyozott irányított gráfban akkor és csak akkor van negatív összsúlyú irányított kör, ha nincsen olyan $\pi := V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ fennáll minden uv élre. Továbbá, ha a c súlyfüggvény egészértékű, akkor π is választható annak.*

2.4 KÚPOK ÉS POLIÉDEREK ELŐÁLLÍTÁSAI

A 1.5 szakaszban láttuk (a Farkas lemma vagy a dualitás tétel használata nélkül), hogy tetszőleges metszet-kúp előáll generált kúpként (1.42 tétel). Most megmutatjuk ezen eredmény megfordítását. Egy (m sorú) A mátrix esetén jelölje M_A az $\{y : yA \leq 0\}$ metszet-kúpot és G_A az $\{Ax : x \geq 0\}$ generált kúpot.

TÉTEL 2.17 *Minden $K := G_A$ generált kúp metszet-kúp.*

Biz. Először a tételt abban a speciális esetben látjuk be, amikor A sorai lineárisan függetlenek. Tekintsük azon $y_i \neq 0$ m-dimenziós vektorokat, amelyekre $y_iA \leq 0$ és y_i ortogonális A-nak $m-1$ lineárisan független oszlopára. Ezen oszlopok konstans szorzó erejéig egyértelműen meghatározzák y_i-t. Tehát ha y_i egység hosszú, akkor az $m-1$ oszlop által feszített hipersík normálisa. Ezért ilyen y_i vektorból csak véges sok van. Az ezekből, mint oszlopvektorokból készített mátrixot jelölje B. A definíció szerint A minden a oszlopára $aB \leq 0$ és így az A oszlopai által G_A kúp minden z elemére $zB \leq 0$, azaz $G_A \subseteq M_B$.

Tegyük most fel indirekt, hogy itt nem egyenlőség áll, azaz létezik egy $b \in M_B$ vektor, amely nincs G_A-ban. Ez azt jelenti, hogy az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszer nem oldható meg, és így a Farkas lemma 2.5 tételben kimondott erősebb változata szerint a B-nek az egyik y oszlop olyan, hogy $yA \leq 0$ és $yb > 0$, tehát b nem volna M_B-ben, ellentmondás.

Az általános esetre térve válasszunk ki $m_1 := r(A)$ darab lineárisan független sorát A-nak, és jelölje A_1 az ezek által alkotott részmátrixot. Ekkor A maradéka előáll ZA_1 alakban (ami azt fejezi ki, hogy az A_1-ben nem lévő A-beli sorok mindegyike az A_1 sorainak lineáris kombinációja). Amint már beláttuk, a $K_1 := G_{A_1}$ kúp előáll M_{B_1} alakban valamely m_1 sorú B_1 mátrix segítségével. Jelölje B azt az m sorú mátrixot, amely B_1-ből és az aláírt ZB_1-ből áll. Könnyű ellenőrizni, hogy egy q_1 vektor egyrészt akkor és csak akkor van K_1-ben, ha $q := (q_1, Zq_1)$ K-ban van, továbbá, hogy q_1 akkor és csak akkor van M_{B_1}-ben, ha q M_B-ben van. Így azután $K_1 = M_{B_1}$-ből következik, hogy $K = M_B$. •

Érdekességként megjegyezzük, hogy az 2.17 tételből levezethető a 1.42 következmény, a következőképpen. Legyen A és B két m-sorú mátrix. B oszlopainak index halmazát jelölje I, míg A oszlopaiét J.

Lemma 2.18 *Ha $G_A \subseteq M_B$, akkor $G_B \subseteq M_A$.*

Biz. $G_A \subseteq M_B$-ből következik, hogy A minden oszlopa M_B-ben van, azaz $b_ia_j \leq 0$ minden $i \in I, j \in J$ indexre. Vagyis B minden oszlopa M_A-ban van. Így a B oszlopai által generált G_B kúp is teljesen M_A-hoz tartozik. •

Lemma 2.19 *Ha $G_A \supseteq M_B$, akkor $G_B \supseteq M_A$.*

Biz. Legyen $a \in M_A$, azaz $aA \leq 0$. A $G_A \supseteq M_B$ feltevés miatt tetszőleges $y \in M_B$ vektorhoz van olyan $\bar{x} \geq 0$, amelyre $y = A\bar{x}$. De ekkor $ay = a(A\bar{x}) = (aA)\bar{x} \leq 0$, vagyis minden olyan y-ra, amelyre $yB \leq 0$ fennáll, hogy $ya \leq 0$, és így a Farkas lemma miatt a $Bx = a, x \geq 0$ rendszer megoldható, azaz $a \in G_B$. •

Következmény 2.20 *Ha $G_A = M_B$, akkor $M_A = G_B$.*

(Az A és B szerepének felcserélésével látható, hogy itt az "akkor" helyett "akkor és csak akkor" is írható.) Az alábbi tétel tehát a 1.42 tétel ismétlése.

TÉTEL 2.21 *Minden M_A metszet-kúp generált kúp.*

Biz. Tekintsük a G_A generált kúpot. Az előbbi tétel szerint ez előáll M_B metszet-kúpként valamely B mátrixra. A 2.20 következmény miatt $M_A = G_B$. •

Láttuk már korábban (1.41 következmény), hogy minden poliéder előáll mint egy politop és egy generált kúp vektor-összege. Ennek is igaz a megfordítása:

TÉTEL 2.22 *Egy Q politop és egy K generált kúp összege poliéder.*

Biz. Tegyük fel, hogy a Q az $x_1, \ldots, x_k$ elemek konvex burka, míg K az $y_1, \ldots, y_l$ által generált kúp. Tekintsük az eggyel magasabb dimenziós térben a $\{\sum_i \lambda_i(x_i, 1) + \sum_j \mu_j(y_j, 0) : \lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0\}$ generált kúpot. Ez a 2.17 tétel szerint előáll metszet-kúpként, azaz egy $\{Ax - \lambda b \leq 0, \lambda \geq 0\}$ rendszer megoldás halmazaként. De ekkor $K + Q$ nem más, mint az $\{x : Ax \leq b\}$ poliéder. •

Következmény 2.23 *Vektorok egy halmaza akkor és csak akkor politop, ha korlátos poliéder.*

Tetszőleges K kúpra definiálhatjuk a $K^* := \{x : xy \leq 0, \text{ minden } y \in K\text{-ra}\}$ **poláris kúpot**.

TÉTEL 2.24 *Ha K generált vagy metszet-kúp, akkor $K^{**} = K$.*

Biz. Tegyük fel K G_A alakban van adva. Akkor definíció szerint $K^* = M_A$. Ez előáll $K^* = G_B$ alakban. Ekkor $K^{**} = M_B$. De ha $M_A = G_B$, akkor $M_B = G_A$, azaz $K^{**} = K$. •
Megjegyzés. Tetszőleges K kúpra könnyen igazolható, hogy $K^{**} \supseteq K$, de ha K nem zárt, akkor itt nem állhat egyenlőség, mert egy kúp polárisa bizonyíthatóan mindig zárt. Érvényes, hogy tetszőleges zárt kúp polárisának polárisa zárt.

Feladat 2.14 *Ha egy kúp bővebb egy másiknál, akkor a polárisa szűkebb a másik polárisánál. Két kúp összegének polárisa a polárisaik metszete.*

A teljesség kedvéért a 1.41 következményt újra megfogalmazzuk, és egy új bizonyítást adunk rá:

TÉTEL 2.25 *Egy $P := \{x : Ax \leq b\}$ nemüres poliéder előáll egy Q politop és egy K generált kúp vektor-összegeként.*

Biz. Tekintsük az eggyel magasabb (azaz $n + 1$) dimenziós térben az $M := \{Ax - \lambda b \leq 0, \lambda \geq 0\}$ metszet-kúpot. Ez előáll generált kúpként is. Feltehető, hogy a generáló elemek utolsó (λ-nak megfelelő) koordinátáinak mindegyike 1 vagy 0. Legyenek a generáló elemek eszerint szétválasztva: $(x_1, 1), \ldots, (x_k, 1)$, $(y_1, 0), \ldots, (y_l, 0)$. Tekintsük $\mathbf{R}^n$-ben ax x_i-k konvex burkaként definiált Q politopot valamint az y_j vektorok által generált K kúpot.

Azt állítjuk, hogy $P = Q + K$. Valóban, legyen először $z \in P$. Ekkor $(z, 1) = \sum_i \lambda_i(x_i, 1) + \sum_j \mu_j(y_j, 0)$, ahol $\lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0$. Most tehát $\sum_i \lambda_i = 1$ és ezért $z_1 := \sum_i \lambda_i x_i$ benne van Q-ban és $z_2 := \sum_j \mu_j y_j$ benne van K-ban. Így z valóban előáll egy Q-beli z_1 és egy K-beli z_2 elem összegeként.

Megfordítva, legyen most $z_1 \in Q$, $z_2 \in K$. Ekkor $(z, 1) = (z_1, 1) + (z_2, 0)$ benne van M-ben, azaz $Az - 1 \cdot b \leq 0$ vagyis z benne van P-ben. •

2.5 POLIÉDEREK OLDALAI

Egy háromdimenziós poliédert lapok, élek illetve csúcsok határolnak. Ezeket a fogalmakat szeretnénk magasabb dimenzióra általánosítani. A megfelelő fogalmat oldalnak fogjuk nevezni. (Valójában a csúcs fogalmát korábban már bevezettük a csúcsot a poliéder olyan pontjaként definiálva, amely nincs a poliéderhez tartozó szakasz belsejében, vagy ekvivalensen, nem áll elő tőle különböző poliéderbeli pontok konvex kombinációjaként).

Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ (nemüres) poliéder F **oldala** (face) R-nek egy

$$F := \{x \in R : cx = \delta\} \tag{2.31}$$

alakú nemüres részhalmaza, ahol $\delta := \max\{cx : x \in R\}$ valamely cx célfüggvényre, melyre a maximum létezik. Vagyis a poliéder oldala az optimum helyek halmaza valamely célfüggvényre nézve, másként szólva a poliédernek az a része, amely egy hipersíkkal érintkezik, amikor azt kívülről a poliéderhez toljuk.

Az oldal definiálására egy másik természetes lehetőség az lehet, hogy az oldal az R poliédernek egy olyan nemüres (**!**) része, amelyet akkor kapunk, ha az R-t definiáló egyenlőtlenségek közül bizonyosakra (megengedve, hogy egyre sem vagy esetleg az összesre) egyenlőséget követelünk meg. Az első definíció előnye, hogy független a poliéder megadásától. A második definíció előnye, hogy rögtön mutatja, hogy *egy R poliéder oldalának oldala R-nek is oldala* vagy azt, hogy *két oldal metszete, ha nem üres, akkor oldal.* Hiányossága viszont, hogy látszólag függ a poliéder megadásától (azaz Q-tól és b-től). Szerencsére az előnyök egyesíthetők:

TÉTEL 2.26 *Poliéder oldalának fenti két definíciója ekvivalens.*

Biz. Legyen először F a (2.31) által definiált halmaz. Tekintsük a $\min\{yb : yQ = c, y \geq 0\}$ duális lineáris programnak egy y' optimális megoldását. $cx = (y'Q)x = y'(Qx) \leq y'b$, amiből következik, hogy egy $x' \in R$ vektor akkor és csak akkor primál optimum (azaz eleme F-nek), ha az y' minden pozitív komponensére a neki megfelelő primál feltétel egyenlőséggel teljesül (azaz $y'(i) > 0$-ból ${}_iqx = b(i)$ következik.) Így tehát, ha Q' illetve b'-vel jelöljük a Q ill. b azon részét, amely az y' pozitív komponenseinek felel meg, akkor $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$.

Fordítva, legyen Q' a Q bizonyos sorai által alkotott mátrix, és b' a b megfelelő része. Jelölje c a Q' sorainak összegét (azaz $c = 1 \cdot Q'$), míg δ a b' komponenseinek összegét ($\delta := 1 \cdot b'$). Most $cx = (1 \cdot Q')x = 1(Q'x) \leq 1b' = \delta$. Ebből adódóan valamely x vektorra $x \in R, Q'x = b'$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in R, cx = \delta$, amiből a tétel következik. •

Az R poliéder maga is oldal (pl. $c = 0$ célfüggvényre az R minden pontja maximalizálja cx-t, vagy másként, amikor semmilyen egyenlőtlenséget nem kötünk meg egyenlőségként.) A poliédernek egy önmagától különböző oldalát **valódi oldalnak** nevezzük. Egy tartalmazásra nézve maximális valódi oldalt **lapnak** hívunk. Fontos szerepet játszanak a (tartalmazásra nézve) **minimális oldalak**, vagyis az olyan oldalak, melyek valódi részhalmazként már nem tartalmaznak más oldalt.

Tekintsük az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ nemüres poliédert. Az alábbiakban megvizsgáljuk az R néhány tulajdonságát a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{2.32}$$

leíró rendszer függvényében. Fontos lesz azt is megtudni, hogy két egyenlőtlenség-rendszer mikor határozza meg ugyanazt a poliédert. Az eredményeket a jobb áttekinthetőség kedvéért néha csak arra az alakra fogalmazzuk meg, amikor R az $\{x : Qx \leq b\}$ alakban van adva.

A Q mátrix i-dik oszlopát q_i-vel, j-dik sorát pedig ${}_jq$-vel jelöljük. A $Qx \leq b_1$ rendszer egy $qx \leq \beta$ egyenlőtlenségéről azt mondjuk, hogy **implicit egyenlőség**, ha R minden eleme egyenlőséggel teljesíti (azaz, ha a fordított $qx \geq \beta$ egyenlőtlenség logikai következménye az R-t meghatározó rendszernek, másszóval, ha az R poliéder teljesen az $\{x : qx = \beta$ hipersíkban fekszik.) Az implicit egyenlőségek által alkotott egyenlőség-rendszert $Q^{=}x = b^{=}$-vel jelöljük. Egy nem implicit egyenlőtlenséget **valódinak** mondunk, és az általuk alkotott rendszert $Q^{<}x \leq b_1^{<}$-vel jelöljük. (Az explicit $Px = b_1$ egyenlőségrendszer tagjait automatikusan implicit egyenlőségeknek tekintjük.)

A $Qx \leq b_1$ egyenlőtlenség-rendszer egyik $qx \leq \beta$ tagját **feleslegesnek** vagy **lényegtelennek** nevezzük (a (2.32)-re nézve), ha az elhagyásával keletkező rendszer ugyanazt a poliédert definiálja. (Másszóval, $qx \leq \beta$ logikai következménye annak a rendszernek, amelyet (2.32-ből kapunk $qx \leq \beta$

kihagyásával.) Egy nem felesleges egyenlőtlenség neve **lényeges.** Hasonlóképpen beszélhetünk arról, hogy egy $Px = b_0$-beli egyenlőség **lényeges** vagy **felesleges** annak megfelelően, hogy kihagyása R-nél bővebb poliédert eredményez-e vagy R-t változatlanul hagyja.

Egy poliéder leírásából egymás után kihagyva az (aktuálisan) felesleges egyenlőtlenségeket és egyenlőségeket olyan leírást kapunk, amelyben már minden egyenlőség és egyenlőtlenség lényeges. Ez persze függhet az elhagyás sorrendjétől, hiszen egy eredetileg felesleges egyenlőtlenség egy másik felesleges egyenlőtlenség elhagyásakor lényegessé válhat. Például, ha a poliéder a három dimenziós tér egy e egyenese, amely három (különböző) e-t tartalmazó sík metszeteként van adva, akkor e ezek közül bármelyik kettő metszeteként is megadható. Azt is feltehetjük, hogy minden szereplő $qx \leq \beta$ egyenlőtlenség valódi, mert különben helyettesíthetjük az $yx = \beta$ explicit egyenlőséggel. Nevezzük az R (2.32) alakú leírását **minimálisnak,** ha minden egyenlőség és egyenlőtlenség lényeges és minden egyenlőtlenség valódi. Az kaptuk tehát, hogy létezik minimális leírás.

Lemma 2.27 *Ha $qx \leq \beta$ valódi, lényeges egyenlőtlensége (2.32)-nek, akkor R-nek van olyan z pontja, amelyre $qz = \beta$.*

Biz. Miután $qx \leq \beta$ valódi, létezik olyan $x' \in R$, amelyre $qx' < \beta$. Miután $qx \leq \beta$ lényeges, létezik olyan x'', amely (2.32)-ből a $qx \leq \beta$ egyenlőtlenség kivételével mindent kielégít. Az $x'x''$ szakasz egyik vége R-ben van, másik nincs, így a szakasznak van olyan z pontja, amely R-ben van és $qz = \beta$. •

TÉTEL 2.28 *Tegyük fel, hogy egy R poliéder egy minimális (2.32) alakú rendszerrel van adva. A következő állítások ekvivalensek.*
(i) R affin altér.
(ii) R-nek nincs valódi oldala.
(iii) Q üres (azaz 0 sora van).

Biz. Tegyük fel, hogy R affin altér. Ekkor van $\{x : Ax = d\}$ alakú leírása. A 2.26 tétel szerint az oldal fogalma nem függ a poliéder leíró rendszerétől. Mivel itt csak egyenlőségek szerepelnek, R-nek nem lehet valódi oldala.

Tegyük most fel, hogy (ii) teljesül. Ha indirekt (iii) nem állna, akkor a (2.32)-ben létezne egy $qx \leq \beta$ valódi, lényeges egyenlőtlenség. Ehhez R-nek van olyan x' pontja, amelyre $qx' < \beta$, és a 2.27 lemma szerint olyan z pontja is, amelyre $qz = \beta$. De ekkor $\{x \in R : qx = \beta$ valódi (nemüres) oldala lenne R-nek.

A $(iii) \to (i)$ irány triviális. •

Miután minimális oldalnak nincsen valódi oldala, az előző tételből kapjuk:

Következmény 2.29 *Minden minimális oldal affin altér.* •

Hasznos a következő lemma.

Lemma 2.30 *Az R poliédernek van olyan eleme, amely minden valódi egyenlőtlenséget szigorúan teljesít.*

Biz. Minden valódi egyenlőtlenséghez van R-nek olyan eleme, amely azt szigorúan teljesíti. Ezen elemek számtani közepe (vagy bármely pozitív együtthatós konvex kombinációja) R-ben van és valamennyi valódi egyenlőtlenséget szigorúan teljesíti. •

TÉTEL 2.31 *Tegyük fel, hogy (2.32) minimális leírása R-nek. Az R akkor és csak akkor van benne egy $H := \{x : ax = \beta\}$ hipersíkban (másszóval $ax = \beta$ akkor és csak akkor logikai következménye (2.32)-nek), ha létezik olyan y_0, amelyre $y_0P = a$ és $y_0b_0 = \beta$ (azaz, $ax = \beta$ lineáris következménye $Px = b_0$-nak.*

Biz. Ha létezik y_0, akkor persze R minden x elemére $ax = \beta$, azaz R benne van a H hipersíkban. Tegyük most fel, hogy R benne van H-ban, azaz mind az $ax \leq \beta$, mind az $ax \geq \beta$ egyenlőlenség logikai következménye a (2.32) rendszernek. Korábban láttuk (2.12 tétel), hogy ha $ax \leq \beta$ logikai következmény, akkor létezik olyan $y = (y_0y, y_1)$, amelyre $y_1 \geq 0$, $y_0P + y_1Q = a$, és $yb \leq \beta$. Itt nem állhat szigorú egyenlőtlenség, hiszen akkor $ax < \beta$ is következne (2.32)-ből, holott $ax \geq \beta$ következik. Tehát $yb = \beta$.

Belátjuk, hogy $y_1 = 0$. Valóban, a 2.30 lemma szerint R-nek van olyan x_0 eleme, amelyre $Qx_0 \ll b_1$. Mivel $x_0 \in R \subseteq H$, így $\beta = qx_0 = (y_0P + y_1Q)x0 = y_0(Px_0) + y_1(Px_0) \leq y_0b_0 + y_1b_1 = yb = \beta$. Szükségképpen az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, ami $Qx_0 \ll b_1$ miatt azt jelenti, hogy $y_1 = 0$. •

Feladat 2.15 *Igazoljuk, hogy ha egy nemüres poliéder minimális leírásában lévő $px = \beta$ egyenlőséget helyettesítjük a $px \leq \beta, -px \leq -\beta$ egyenlőtlenségekkel, akkor ezek lényegesek.*

Jelölje $Q^{=}_{F}$ a Q azon sorai által alkotott részmátrixot, amelyeknek megfelelő egyenlőtlenséget az F minden eleme egyenlőséggel teljesíti. Ezeket hívjuk **implicit F-egyenlőségeknek**.

Lemma 2.32 *Tegyük fel, hogy R egy minimális (2.32) rendszerrel van megadva. Legyen F az R-nek egy oldala. Legyen Q' a Q-nak egy $m' \times n$-es részmátrixa. A Q' által meghatározott $F' := \{x \in R : Q'x = b'_1\}$ oldal akkor és csak akkor ugyanaz mint F, ha Q' része $Q^{=}_{F}$-nek és $r(Q') = r(Q^{=}_{F})$.*

Biz. Tegyük fel először, hogy $F = F'$. Miután F-nek a 2.30 lemma alapján van olyan eleme, amely minden valódi F-egyenlőtlenséget szigorúan teljesít, a $Q'x \leq b'_1$ minden sora implicit F-egyenlőség, azaz Q' része $Q^{=}_{F}$-nek. Ha indirekt $r(Q') < r(Q^{=}_{F})$, akkor van olyan x', amelyre $Q'x' = 0$, és a $Q^{=}_{F}$ valamely ${}_iq$ sorára ${}_iqx' < 0$. Ekkor kicsiny pozitív ε-ra és az F' valamely z elemére a $z + \varepsilon x'$ pont F'-ben van, de szigorúan teljesíti a ${}_iqx \leq b(i)$ egyenlőtlenséget, ellentmondásban ennek implicit F-egyenlőség voltával.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy Q' részmátrixa $Q^{=}_{F}$-nek és $r(Q') = r(Q^{=}_{F})$. Mivel $Q'x = b'$ egyenletei implicit egyenlőségek, ezért F minden eleme kielégíti őket és így $F \subseteq F'$. A fordított tartalmazás igazolásához legyen $x' \in F'$. Az $r(Q') = r(Q^{=}_{F})$ feltevés miatt $Q^{=}_{F}x' = b^{=}_{F}$, amiből speciálisan $Q^{=}_{F}x' = b^{=}_{F}$ adódik, azaz $x' \in F$. •

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy pontosan megmondjuk a bázis-megoldások geometriai jelentését.

TÉTEL 2.33 *A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha eleme az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy minimális oldalának.*

Biz. Tekintsük az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy minimális F oldalát. Miután az előbb láttuk, hogy F affin altér, ezért $F = \{x : Q^{=}_{F}x = b^{=}_{F}\}$. Az F minimalitásából következik, hogy F minden x elemére $Q^{<}_{F}x \ll b^{<}_{F}$. Tehát F tetszőleges z elemére éppen a $Q^{=}_{F}x \leq b^{=}_{F}$ rendszer az, amelynek tagjait a z egyenlőséggel teljesíti.

Állítjuk, hogy $r(Q) = r(Q^{=}_{F})$. Valóban, ha a ${}_jq$ sor lineárisan független volna $Q^{=}_{F}$ soraitól, akkor volna olyan x', amelyre $Q^{=}_{F}x' = 0$, ${}_jqx' = 1$. De ekkor egyrészt $f + \lambda x'$ tetszőleges λ-ra teljesíti a $Q^{=}_{F}x = b^{=}_{F}$ egyenlőséget, azaz benne van F-ben, és így R-ben is, másrészt viszont alkalmas λ-ra $f + \lambda x'$ nem teljesíti az ${}_jqx \leq b(j)$ egyenlőtlenséget, azaz még sincs R-ben. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $r(Q) = r(Q^{=}_{F})$, tehát az F minden eleme valóban bázis-megoldás.

Legyen most z bázis-megoldás és tekintsük a $Qx \leq b$ rendszernek a z által egyenlőséggel teljesített $Q^{=}_{z}x \leq b^{=}_{z}$ részét. Tekintsük az $F_z := \{x : Qx \leq b, Q^{=}_{z}x = b^{=}_{z}\}$ oldalát R-nek. Belátjuk, hogy ez minimális oldal. Ha indirekt létezne valódi oldala, akkor az $Qx \leq b$ rendszerben volna olyan $qx \leq \beta$ egyenlőtlenség, amelyre $qz < \beta$, de F_z valamely x' elemére $qx' = \beta$. Miután z bázis-megoldás, $r(Q) = r(Q^{=}_{z})$, és így létezik egy y', amelyre $q = y'Q^{=}_{z}$. De akkor $0 = \beta - \beta > qx' - qz = q(x' - z) = (y'Q^{=}_{z})(x - z) = y'(Q^{=}_{z}x) - y'(Q^{=}_{z}z) = y'b' - y'b' = 0$, amely ellentmondás mutatja, hogy F_z-nek nem lehet valódi oldala. •

2.6 DIMENZIÓ, CSÚCSOK, LAPOK

Egy altér **dimenziója** a belőle kiválasztható lineárisan független elemek maximális száma. A Z affin altér, definíció szerint, egy altér eltoltja. Az első fejezetben szerepelt, hogy az affin altér előállítható $Z = \{x : Qx = b\}$ alakban és az altér, amelynek eltolásából Z keletkezett egyértelmű, éspedig $\{x : Qx = 0\}$ (ami tehát Z karakterisztikus altere). A Z affin altér **dimenziója** az őt meghatározó altér dimenziója. Például a pont nulla dimenziós, az egyenes egy dimenziós, stb. Affin alterek metszete

is affin altér, feltéve, hogy nem üres. Az is rögtön látszik, hogy minden affin altér hipersíkok metszete (egy **hipersík** valamely $qx = \beta$ egyenlet megoldás halmaza.)

Az $\{x : Qx = 0\}$ altér tekinthető a Q sorai által generált altér ortogonális kiegészítő alterének, így ennek dimenziója $n - r(Q)$. Ebből kapjuk, hogy az $\{x : Qx = b\}$ affin altér dimenziója $n - r(Q)$. Egy tetszőleges $\mathbf{R}^n$-beli R nemüres halmaz **dimenzióján** az R-t tartalmazó legszűkebb affin altér dimenzióját értjük. (A legszűkebb affin altér nem más, mint az R-t tartalmazó affin elterek metszete.)

TÉTEL 2.34 *Tegyük fel, hogy a nemüres R poliédert definiáló (2.32) rendszer minimális. Ekkor a legszűkebb R-t tartalmazó affin altér $Z := \{x : Px = b_0\}$*

Biz. Nyilvánvaló, hogy $R \subseteq Z_R$. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy Z_R-nél szűkebb affin altér, amely tartalmazza R-t. Ekkor van olyan $H := \{x : qx = \beta\}$ hipersík, amelyre $R \subseteq H$, $Z_R \not\subseteq H$. A 2.31 tétel szerint $R \subseteq H$ azt jelenti, hogy létezik y_0, amelyre $q = y_0 P$ és $\beta = y_0 b_0$, amiből következik, hogy bármely olyan x'-re, amelyre $Q^= x' = b^=$ teljesül, fennáll $qx' = \beta$, azaz $Z_R \subseteq H$, ellentmondás. •

Következmény 2.35 *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliédert tartalmazó legszűkebb affin altér $Z_R := \{x : Q^= x = b^=\}$, ahol $Q^=$ jelöli az implicit egyenlőségeknek megfelelő részmátrixot. A poliéder dimenziója $n - r(Q^=)$.* •

A tételt alkalmazhatjuk a poliéder egy F oldalára.

Következmény 2.36 *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy F oldalát tartalmazó legszűkebb affin altér $\{x : Q^=_F x = b^=_F\}$. Az F oldal dimenziója $n - r(Q^=_F)$. Minimális oldal dimenziója $n - r(Q)$.* •

Egy c vektort illetve az általa emghatározott cx célfüggvényt akkor mondjuk **semlegesnek** (vagy neutrálisnak) az $R : \{x : Qx \leq b\}$ poliéderre nézve, ha R minden x elemére cx értéke ugyanannyi. A semleges vektorok nyilván alteret alkotnak, melyet jelöljünk S_R-rel.

TÉTEL 2.37 *A semleges vektorok S_R altere éppen a Q-t tartalmazó legszűkebb Z_R affin altér A_R karakterisztikus alterének ortogonális kiegészítője. Egy c vektor akkor és csak akkor semleges, ha benne van $Q^=$ sorterében.*

Biz. A 2.35 tétel szerint $A_R = \{x : Q^= x = 0\}$. Mivel $Q^=$ sortere $\{x : Q^= x = 0\}$ altér ortogonális kiegészítője, a tétel két állítása egymással ekvivalens.

Ha $c = yQ^=$ valamilyen y-ra, azaz c benne van A_R-ben, akkor nyilván R minden x elemére $cx = (yQ^=)x = y(Q^= x) = yb^=$. Mivel a jobboldal független x-től, c valóban semleges. Fordítva, ha c nincs benne $Q^=$ sorterében, akkor létezik egy olyan x', amelyre $Q^= x' = 0$ és $cx' \neq 0$. Az R egy x_0 elemére és kicsiny $\lambda > 0$ számra $x_0 + \lambda x'$ benne van R-ben. Mivel $cx' \neq 0$, kapjuk, hogy $cx_0 \neq c(x_0 + \lambda x')$, azaz c nem semleges. •

Korábban beláttuk, hogy az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliédernek akkor van csúcsa, ha Q oszlopai lineárisan függetlenek (azaz $r(Q) = n$), és a csúcsoknak megadtuk egy jellemzését. Ezt megismételjük és egy újjal egészítjük ki:

TÉTEL 2.38 *Az R csúcsos poliéder egy z elemére a következők ekvivalensek.*
(i) z csúcs.
(ii) z bázis-megoldás.
(iii) Létezik olyan c vektor, amelyre $cz > cx$ fennáll R minden z-től különböző x elemére.

Biz. Az első két tulajdonság ekvivalenciáját már láttuk a 1.30 tételben. Ha (iii) fennáll, akkor $\{z\}$ egy egyelemű oldal, ami persze minimális, és így z a 2.33 tétel szerint bázis-megoldás, tehát (ii) következik. Ha most z bázis-megoldás (azaz csúcs), akkor $\{x : Qx \leq b, Q^=_z x = b^=_z\}$ a poliédernek egy oldala, amelynek egyetlen eleme van, z. A 2.26 tétel szerint van olyan c, amelyre $\{cx : x \in R\}$ maximuma éppen az adott oldal elemein vétetnek fel, tehát az egyértelmű z-n. •

Egy poliéder két csúcsát nevezzük **szomszédosnak**, ha az összekötő szakaszuk a poliéder oldala. (Három dimenzióban ez annak felel meg, hogy az összekötő szakaszuk a poliédernek éle.)

TÉTEL 2.39 *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ csúcsos poliéder u és v csúcsaira a következők ekvivalensek.*
(i) u és v szomszédosak.
(ii) A Q azon soraiból alkotott $Q^{=}_{uv}$ részmátrix, melyeknek megfelelő egyenlőtlenségeket mind u, mind v egyenlőséggel teljesíti, $n-1$ rangú.
(iii) Léteznek Q-nak olyan Q_u és Q_v $n \times n$-es nemszinguláris részmátrixai, amelyekre u a $Q_u x = b_u$ rendszer, míg v a $Q_v x = b_v$ rendszer egyértelmű megoldásai, és amelyeknek $n-1$ soruk közös.

Biz. $(i) \to (ii)$ Legyenek u és v szomszédosak, vagyis az összekötő F szakaszuk oldal. Ekkor F előáll $F = \{x : Qx \leq b, Q^{=}_{F} x = b_F\}$ alakban. Mivel szakasz dimenziója 1, a 2.36 következményből kapjuk, hogy $r(Q^{=}_{F}) = n-1$. Mivel u, v benne vannak F-ben, így $Q^{=}_{uv}$ tartalmazza $Q^{=}_{F}$-t, tehát $r(Q^{=}_{uv}) \geq n-1$. Itt egyenlőségnek kell állnia, mert ha $r(Q^{=}_{uv}) = n$ volna, akkor a $Q^{=}_{uv} x = b_{uv} =$ rendszernek nem lehetne két különböző megoldása (mármint u és v.)
$(ii) \to (iii)$ Válasszunk ki a $Q^{=}_{uv}$ mátrixnak $n-1$ lineárisan független sorát, majd ezt egészítsük ki a $Q^{=}_{u}$ egy sorával egy nemszinguláris Q_u mátrixszá, illetve a $Q^{=}_{v}$ egy sorával egy nemszinguláris Q_v mátrixszá. A $Q_u x = b_u$ rendszernek ekkor létezik egyértelmű megoldása és u megoldása, és ugyanígy $Q_v x = b_v$-nek v a megoldása.
$(iii) \to (i)$ Az $n-1$ közös sor által alkotott mátrixot jelöljük Q'-vel. Ekkor az $F := \{x : Qx \leq b, Q'x = b'\}$ poliéderben u is, v is benne van, tehát F oldala R-nek, melynek dimenziója 1, vagyis F az u-t és v-t összekötő szakasz. •

Fentebb láttuk, hogy az implicit egyenlőségek éppen az R-t tartalmazó legszűkebb affin alteret határozzák meg. Mi a valódi egyenlőtlenségek geometriai tartalma?

TÉTEL 2.40 *Tegyük fel, hogy a $\{Px = b_0,\ Qx \leq b_1\}$ rendszer minimális, és hogy az R megoldás halmaz nemüres. Ekkor az R-t tartalmazó legszűkebb affin altér $\{x : Px = b_0\}$. Továbbá egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn az R lapjai és a $Qx \leq b_0$ egyenlőtlenségei között, azaz $\{x \in R :\ _i qx = b_1(i)\}$ lapot alkot, és minden lap előáll ilyen alakban.*

Biz. Először tegyük fel, hogy F lapja R-nek. Ekkor $F = \{x \in R : Q^{=}_{F} x = b^{=}_{F}\}$. Mivel $F \subset R$, létezik egy $x_0 \in R - F$ pont. Ez az $Q^{=}_{F} x \leq b^{=}_{F}$ rendszer egyik $qx \leq \beta$ egyenlőtlenségét szigorúan teljesíti: $qx_0 < \beta$. Tehát $qx \leq \beta$ a $Qx \leq b$ rendszernek valódi egyenlőtlensége, így $F' := \{x \in R : qx = \beta\}$ valódi oldala R-nek, amely tartalmazza F-t, és miután F tartalmazásra nézve maximális oldal, $F = F'$ következik. Tehát R lapja előáll a kívánt alakban.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $qx \leq \beta$ a $Qx \leq b$ rendszernek valódi egyenlőtlensége. Jelölje $Q'x \leq b'$ azt a részét $Q^{<}x \leq b^{<}$-nak, amelyet az $qx \leq \beta$ kihagyásával kapunk. A feltevés szerint $qx \leq \beta$ lényeges, így létezik $x_2 \in R$, amelyre $Q'x_2 \leq b'$ és $qx_2 > \beta$. Másrészt láttuk már, hogy létezik olyan $x_1 \in R$, amelyre $Q^{<}x_1 \ll b^{<}$. Az x_1 és x_2 alkalmas konvex kombinációját véve kapjuk, hogy létezik olyan $x_0 \in R$, amelyre $Q'x_0 < b'$ és $qx_0 = \beta$. Ebből következik, hogy $F := \{x \in R : qx = \beta\}$ valódi oldal. Mivel pedig egyetlen olyan eredetileg valódi egyenlőtlenség van, amely implicit F-egyenlőség, F maximális valódi oldal. •

Következmény 2.41 *Minden valódi oldal lapok metszete.* •

Következmény 2.42 *Tegyük fel, hogy mind a $\{Px = b_0,\ Qx \leq b_1\}$ rendszer, mind a $\{P'x = b'_0,\ Q'x \leq b'_1\}$ rendszer minimális. Az ezek által definiált nemüres R és R' poliéderek akkor és csak akkor egyenlők, ha P és P' sortere ugyanaz, továbbá a $Qx \leq b_1$ és $Q'x \leq b'_1$ rendszer egyenlőtlenségei között egy-egy értelmű kapcsolat van, amelyben az egymának megfelelő $qx \leq \beta$ és $q'x \leq \beta'$ egyenlőtlenségekre fennáll, hogy a $(q, \beta) - (q', \beta')$ vektor benne van a (P, b_0) mátrix sorterében (ami ugyanaz, mint a (P', b'_0) mátrix sortere).* •

Feladat 2.16 *Egy poliéder minden lapjának dimenziója eggyel kisebb, mint a poliéder dimenziója.*

Feladat 2.17 *Igazoljuk, hogy ha két rendszer ugyanazt a poliédert definiálja, akkor erős bázis-megoldásaik halmaza ugyanaz.*

2.7 A SZIMPLEX ALGORITMUS

2.7.1 MEGENGEDETTSÉG

Ebben a szakaszban megismerkedünk a Farkas lemma illetve a dualitás tétellel kapcsolatos fő algoritmikus eredményekkel. Azt már korábban láttuk, hogy egy lineáris célfüggvény metszet-poliéder feletti optimalizálására van véges algoritmus, hiszen ha cx felülről korlátos, akkor a maximum erős bázis-megoldáson is felvétetik, és ezekből csak véges sok van. Ezzel a megközelítéssel az a baj, hogy erős bázis-megoldásból igen sok lehet (exponenciálisan sok). Például, ha a poliéder, amely felett a cx célfüggvényt akarjuk maximalizálni, egy n-dimenziós egységkocka kocka, azaz $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$, akkor ezt a feladatot mind a 2^n csúcs cx szerinti sorbarendezésével már a nem túlságosan nagy $n = 100$-as méretnél sincs semmilyen esélyünk megoldani, a legjobb számítógépet használva sem, ugyanakkor a problémát ránézésre rögtön meg lehet oldani.

A szimplex algoritmus George Dantzigtól származik. Az a lényege, hogy a poliéder csúcsait szisztematikusan, javuló sorrendben tekinti át. Óriási felhalmozott tapasztalat mutatja, hogy a szimplex algoritmus a gyakorlatban nagyon hatékony, tipikusan lineáris számú csúcs átvizsgálása után megtalálja az optimumot. Annál szomorúbb, hogy konstruáltak olyan példa sorozatot, ahol a szimplex algoritmus végiglátogatja az összes, exponenciálisan sok csúcsot, mielőtt az optimálisat megtalálná. Ez azt jelenti, hogy matematikai szempontból a szimplex algoritmus nem tekinthető hatékonyabbnak, mint a durva, összes csúcsot számba vevő algoritmus. (Kimutatták azonban, hogy ha nem a legrosszabb előforduló esettel akarjuk az algoritmus hatékonyságát mérni, hanem az átlagos lépésszámot tekintjük, akkor a szimplex algoritmus polinomiális futás idejű.)

Kezdjük a Farkas lemmával, annak a 2.5 tételben megfogalmazott erősebb változatával, amely tehát azt mondja ki, hogy az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ primál és az $\{yA \geq 0, yb = -1\}$ duál feladatok közül pontosan az egyiknek van bázis-megoldása:

TÉTEL 2.43 *Az $\{Ax = b,\ x \geq 0\}$ rendszernek akkor és csak akkor van olyan megoldása, amelyben az x pozitív változóinak megfelelő A-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ha nem létezik olyan y, amelyre $yA \geq 0$, $yb < 0$ és A-nak létezik $r(A,b) - r(b)$ lineárisan független oszlopa, amelyekre y merőleges.* •

Bizonyítás a szimplex algoritmussal. Már a Farkas lemma bizonyításánál láttuk, hogy a két lehetőség kizárja egymást. Azt látjuk be algoritmikusan, hogy legalább az egyik lehetőség fennáll. A Gauss-eliminációval először eldöntjük, hogy az $Ax = b$ rendszernek van-e egyáltalán megoldása. Ha nincs, akkor a Gauss-elimináció egy olyan y vektort szolgáltat, amelyre $yA = 0$ és $yb \neq 0$. Itt -1-gyel történő esetleges szorzás után feltehetjük, hogy $yb < 0$ azaz a (b) alternatívára jutottunk. (Most $t = r(A,b) = r(A) + 1$).

Tegyük fel tehát, hogy $Ax = b$ megoldható. Feltehetjük, hogy A sorai lineárisan függetlenek, mert ha nem, akkor az A soraiból kiválasztunk $r(A)$ lineárisan lineárisan független sort (ezt valójában a Gauss-elimináció már meg is tette) és csak az ezek által alkotott részmátrixszal dolgozunk tovább. Válasszunk ki az A oszlopaiból egy B_1 bázist (ami tehát egy $m \times m$-es részmátrix) és tekintsük a $B_1 x = b$ egyértelmű x_1 megoldását (ezeket tehát az előbbi Gauss-elimináció meghatározta.) Ha x_1 nemnegatív, akkor ez a primál feladat bázis-megoldása.

Tegyük fel most, hogy x_1-nek van negatív komponense. Az alapalgoritmus itt egy tetszőleges negatív komponenst választ. Példával kimutatható, hogy ilyenkor az algoritmus végtelen ciklusba eshet, ezért ennek elkerülésére indokolt valamilyen megkötést tenni. Jelölje i_1 a legkisebb indexet, amelyre $x_1(i_1) < 0$. (Ez a Bland féle legkisebb index szabály). Legyen y_1 olyan vektor, amely B minden oszlopára merőleges, kivéve, hogy $y_1 a_{i_1} = 1$. (Az $yB_1 = d$ minden m-dimenziós d-re egyértelműen megoldható.) Most $q = 1$-re

$$y_q b = y_q(B_q x_q) = (y_q B_q)x_q = x_q(i_q) < 0. \tag{2.33}$$

Amennyiben minden a_i-re $y_1 a_i \geq 0$, úgy a duális feladat bázis-megoldását kaptuk.

Tegyük fel tehát, hogy valamely j_1 indexre $y_1 a_{j_1} < 0$ és válasszuk j_1-t a lehető legkisebbnek. (Ismét a legkisebb index szabályt alkalmazzuk). Természetesen ekkor a_{j_1} nincs a B_1 bázisban, és az is látható, hogy B_1-ben a_{i_1}-t a_{j_1}-re cserélve egy másik bázist kapunk, amit jelöljünk B_2-vel. (Valóban, az a_{j_1} vektor nem függhet lineárisan a B_1-nek a_{i_1}-től különböző oszlopaitól, hiszen az y_1 vektor ezen utóbbiak mindegyikére merőleges, míg a_{j_1}-re nem.) Iteráljuk az eljárást most a B_2 bázissal kezdve, ameddig csak lehet.

Igazolnunk kell, hogy az eljárás véges sok lépésben véget ér. Tegyük indirekt fel, hogy nem ez a helyzet. Mivel csak véges sok bázis-megoldás van, lesznek olyan oszlopvektorok, melyek időről időre ki- majd újra bekerülnek a bázisba. Legyen a_r a legnagyobb ilyen indexű. Tehát az r-nél nagyobb indexű oszlopok egy bizonyos időponttól fogva már nem változtatják helyzetüket: vagy egyszer és mindenkorra benn vannak a bázisban, vagy kívül. Legyen egy ezutáni pillanatban B_p egy olyan előforduló bázis, amelyben a_r benne van, de B_{p+1}-ben nincs. Legyen B_q $(q > p)$ egy olyan későbbi bázis, amelyben a_r nincs benne, de B_{q+1}-ben benne van. Ekkor tudjuk, hogy y_q a B_{q+1} minden oszlopára merőleges, kivéve a_r-t, amelyre $y_q a_r < 0$. A második választási szabályból az is következik minden a_r előtti a_i oszlopra, hogy $y_q a_i \geq 0$.

Az első választási szabály miatt x_p minden r-nél kisebb indexű komponense nem-negatív. Így tehát az $1 \leq i < r$ indexekre $(y_q a_i)x_p(i) \geq 0$ és $(y_q a_r)x_p(r) > 0$. A B_q mátrixnak egyetlen olyan a_j oszlopa van, amelyre y_q nem merőleges, de mivel éppen ez az oszlop esik ki a B_q bázisból, az a_j szükségképpen megelőzi a_r-t. Tehát y_q merőleges a B_q-nak a_r utáni oszlopaira, de mivel az r-nél nagyobb indexű oszlopokon a B_q és a B_p bázis megegyezik (itt használva r maximális választását), y_q merőleges B_p minden r-nél nagyobb indexű oszlopára. Így felhasználva (2.33)-t, kapjuk, hogy $0 > y_q b = y_q(B_p x_p) = (y_q B_p)x_p \geq 0$, és ez az ellentmondás a tételt és egyúttal az algoritmus végességét is bizonyítja. •

Az algoritmus kissé általánosabb alakban is használható. Például, ha a $\{Px_0 + Ax_1 = b, x_1 \geq 0\}$ rendszer megoldhatóságát akarjuk eldönteni, akkor az előző eljárást a következőképpen kell módosítani. A kezdeti B_1 bázist úgy határozzuk meg, hogy a P maximálisan sok lineárisan független oszlopát egészítjuk ki A oszlopaiból $r(P, A)$ darab lineárisan független oszloppá. Az eljárást úgy módosítjuk, hogy csak az A-beli bázis elemeket cserélhetjük, a kezdeti B_1 bázis P-ből kiválasztott elemei végig fixen maradnak. Rögtön látható, hogy az így módosított eljárás új bizonyítást ad a 2.2 tételre. A még általánosabb 2.3 alakra is kiterjeszthető az algoritmus, ha a tétel bizonyításában leírt visszavezetést alkalmazzuk. Megállapíthatjuk tehát, hogy a fenti eljárás bármely alakban adott lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldására alkalmas.

Miért hívják a fenti algoritmust szimplex algoritmusnak? Az m-dimenziós térben, ha veszünk úgy $m + 1$ pontot, hogy ezek egyike sincs benne a többi konvex burkában, akkor az $m + 1$ pont konvex burka definíció szerint egy **szimplex**-et alkot. Egy dimenzióban ez egy szakasz, két dimenzióban háromszög, három dimenzióban tetraéder.

Tegyük fel, hogy a síkban adottak a $p_1, \ldots, p_n$ pontok, és el akarjuk dönteni, hogy ezek konvex burkában benne van-e egy megadott b' pont. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy nincs három pont egy egyenesen. Készítsünk el egy $2 \times n$-es A' mátrixot, melynek i-edik oszlopa a p_i pont koordinátáit tartalmazza. Legyen A az a mátrix, amely A'-ből keletkezik egy csupa egyesből álló harmadik sor hozzávételével. A b'-t is egészítsük ki egy egyessel egy három dimenziós b vektorrá. Ekkor a feladat azzal ekvivalens, hogy az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszernek van-e megoldása. Egy bázis-megoldáshoz tatozó három oszlopvektor három olyan p_i pontnak felel meg, amelyek egy b'-t tartalmazó háromszöget alkotnak. Egy duális bázis-megoldás egy olyan egyenesnek felel meg (miért?), amely két p_i ponton átmegy, és az általa meghatározott egyik zárt félsik tartalmazza az összes p_i pontot, de nem tartalmazza b'-t. Mármost a szimplex algoritmus ezen a geometriai nyelven a következőképpen fut. Induljunk ki egy tetszőleges B_1-gyel jelölt háromszögből, melynek csúcsai mondjuk p_1, p_2, p_3. Állapítsuk, meg, hogy b' benne van-e B_1-ben. Ha benne van akkor készen vagyunk: b' benne van a p_i pontok konvex burokában. Ha b' nincs benne a háromszögben, akkor a háromszögnek az egyik e_1 oldalegyenese, mondjuk p_2p_3, elválasztja b'-t p_1-től. (A háromszögnek egy vagy két ilyen elválasztó oldalegyenese lehet, a b' elhelyezkedésétől függően: az általános algoritmus ezek egyikét választja, a Bland féle szabály pontosan előírja, hogy melyiket kell választani.) Amennyiben az e' egyenes által határolt, a b'-t tartalmazó nyílt félsíkban nincsen p_i pont, akkor készen vagyunk; megkaptuk az elválasztó egyenest. Ha van, mondjuk a p_4 pont, akkor p_1-t becseréljük p_4-re és a keletkező $\{p_2, p_3, p_4\}$ háromszöggel folytatva iteráljuk az eljárást.

A fenti algoritmus szemléletesesn tehát azt jelenti, hogy a p_i pontok által alkotott háromszögek segítségével mintegy letapogatjuk a sík egy darabját, és eközben vagy ráakadunk a b' pontra vagy megtalálunk egy elválasztó egyenest. Magasabb dimenzióban ez azt jelenti, hogy a p_i pontjaiból készített szimplexekkel tapogatjuk a teret, hogy megtaláljuk a b' pontot. Innen tehát az elnevezés.

A következő példa mutatja, hogy ha a futás során nem alkalmazzuk a Bland féle szabályt, akkor az algoritmus ciklizálhat. Legyen b' az origó és $n = 6$. Az origó középpontú egységkörön legyen p_1, p_3, p_5 egy egyenlő oldalú háromszög három csúcsa. E pontokat az origóval összekötő szakaszok felező pontjait

az origó körül az óramutató járása szerint csöppnyit elforgatva kapjuk rendre a p_2, p_4, p_6 pontokat. Ha most B_i jelöli a p_i, p_{i+1}, p_{i+2} pontok által alkotott háromszöget (modulo 6 tekintve), akkor a szimplex algoritmus egymás után ezen háromszögeket választhatja (ezt ellenőrizzük le!), míg vissza nem ér a kiindulási B_1-be.

Feladat 2.18 *Hol tér el először az előbbi példában a szimplex algoritmus, ha ugyanazzal a B_1 háromszöggel kezdünk és alkalmazzuk a Bland féle legkisebb index szabályt?*

Feladat 2.19 *Tegyük fel, hogy csak a bázisba bekerülő új oszlop kiválasztásánál alkalmazzuk a legkisebb index szabályt, a bázisból kikerülő oszlop meghatározásánál nem. Ciklizálhat-e ilyenkor az algoritmus vagy már ilyenkor is bizonyíthatóan mindig véges lesz?*

Feladat 2.20 *Tekintsük a Farkas lemma következő alakját: Az $yA \leq c$ rendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha létezik olyan $x \geq 0$, amelyre $Ax = 0$ és $cx < 0$. Tegyük fel, hogy A sorai lineárisan függetlenek. Igazoljuk, hogy a következő algoritmus véges. (A bizonyításban vagy a fenti bizonyítás lépéseit imitáljuk, vagy pedig azt mutassuk ki, hogy az alábbi algoritmus nem más, mint a fenti algoritmus adaptációja):*

Legyen B_1 az A egy $m \times m$-es nemszinguláris részmátrixa és legyen y_1 az $yB_1 = c_{B_1}$ egyértelmű megoldása. Amennyiben $y_1 A \leq c$, akkor készen vagyunk, megtaláltuk a kívánt y-t. Ha $y_1 A \not\leq c$, úgy legyen a_j az A mátrix legkisebb indexű oszlopa, amelyre $y_1 a_j < c(j)$. Tekintsük a $B_j x = -a_j$ egyértelmű x_1' megoldását, és jelölje x_1 azt a vektort, amely x_1'-ből keletkezik az $x_1(j)$ helyen 1-gyel, a többin pedig 0-val kiegészítve. Ekkor $Ax_1 = 0$ és $cx_1 = c_{B_1} x_1' + c(j) = (y_1 B_1)x_1' + c(j) < (y_1 B_1)x_1' + y_1 a_j = (y_1 A)x_1 = 0$. Így ha $x_1 \geq 0$, akkor x_1 teljesíti a Farkas lemma második alternatíváját. Amennyiben $x_1 \not\geq 0$, úgy legyen i a legkisebb index, amelyre $x_1(i) < 0$, és cseréljük ki a B_1-beli a_i oszlopot az a_j oszlopra. A keletkező B_2 mátrixszal folytava iteráljuk az eljárást.

Feladat 2.21 *Terjesszük ki a fenti algoritmust a Farkas lemma következő változatára. Az $\{yP = c_0, yA \leq c_1\}$ rendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha létezik olyan $x = (x_0, x_1)$, amelyre $(P, A)x = 0$, $x_1 \geq 0$ és $cx < 0$.*

2.7.2 OPTIMALIZÁLÁS

Térjünk rá arra, hogy a fenti eljárás hogyan használható a $\min\{cx : Ax = b, x \geq 0\}$ primál lineáris program és $\max\{by : yA \leq c\}$ duális lineráris program megoldására. Jelölje $R := \{x : Ax = b, x \geq 0)$ a primál, $R^* := \{y : yA \leq c\}$ pedig a duál poliédert. Feltesszük, hogy A sorai lineárisan függetlenek, ami azt jelenti, hogy R^* csúcsos.

A megengedettségre vonatkozó szimplex algoritmussal először megkeresünk R^*-nak egy y_0 csúcsát (azaz $yA \leq c$ egy bázis-megoldását). Amennyiben R^* üres, úgy az eljárás egy olyan $x' \geq 0$ vektort szolgáltat, amelyre $Ax' = 0$, $cx' < 0$, és ilyenkor vagy a primál poliéder is üres, vagy ha van is egy x_0 pontja, akkor $x_0 + \lambda x'$ minden pozitív λ-ra R-ben van, így cx nem korlátos alulról. Ekkor tehát az algoritmus futása befejeződik.

Tegyük fel tehát, hogy rendelkezésünkre áll y_0. Jelölje $A_0^=$ az A-nak azon a_i oszlopai által alkotott részmátrixát, amelyekre $y_0 a_i = c(i)$, míg a maradék oszlopok részmátrixa legyen $A_0^<$. A fenti eljárással döntsük el, hogy az $\{A_0^= x' = b, x' \geq 0\}$ rendszernek létezik-e megoldása. Amennyiben létezik, úgy x'-t nulla komponensekkel kiegészítve R-nek egy olyan x_0 elemét kapjuk, amely teljesíti az optimalitási feltételeket (azaz, ha valamely i-re $x_0(i)$ szigorúan pozitív, akkor $y_0 a_i = c(i)$). Ekkor x_0 primál optimum, y_0 duál optimum és az eljárás véget ér.

Ha a szóbanforgó x' nem létezik, akkor a fenti eljárás megtalálja $A_0^=$-nak egy $m-1$ lineárisan független oszlopból álló A_0' részmátrixát valamint egy olyan y' vektort, amelyekre $y' A_0^= \leq 0, y' A_0' = 0$ és $y'b > 0$.

(Figyelem! Az $\{y' A_0^= \leq 0, y'b \geq 1\}$ rendszer egy bázis-megoldása azt jelenti, hogy y' az $A_0^=$ mátrixnak $m-1$ lineárisan független oszlopára merőleges. Az $yA \leq c$ rendszer egy bázis megoldása azt jelenti, hogy A-nak van m lineárisan független a_i oszlopa, amelyre $ya_i = c(i)$.)

Amennyiben $y' A_0^< \leq 0$, úgy az adódik, hogy $y'A \leq 0$, $y'b > 0$ és így (a Farkas lemma triviális irányát alkalmazva) a primál feladat nem megoldható, vagy ekvivalensen a duál feladat nem korlátos. Ilyenkor az algoritmus véget ér.

Tegyük most fel, hogy $y'A_0^{\leq} \not\leq 0$. Válasszuk λ-t a legnagyobb olyan számnak, amelyre $(y_0+\lambda y')A \leq c$ teljesül, azaz $(y_0+\lambda y')a_i \leq c(i)$ fennáll az $A_0^{\leq}$ mindegyik a_i oszlopára. Vagyis λ a legnagyobb szám, amelyre $\lambda y'a_i \leq c(i) - y_0 a_i$ teljesül az $A_0^{\leq}$ valamennyi olyan a_i oszlopára, amelyre $a_i y' > 0$. Egyszóval legyen $\lambda_0 := \min(c(i) - y_0 a_i)/y'a_i)$, ahol a minimum az $A_0^{\leq}$ olyan a_i oszlopaira megy, melyekre $a_i y' > 0$.

Legyen $y_1 := y_0 + \lambda_0 y'$. A λ_0 választásából adódóan y_1 eleme R^*-nak.

Lemma 2.44 *y_1 csúcsa R^*-nak.*

Biz. Azt kell látni, hogy A-nak van m lineárisan független oszlopa, melyekre $y_1 a_i = c(i)$. Mindenesetre $y'A_0' = 0$ miatt A_0'-nak az $m-1$ oszlopa ilyen. Legyen a_j egy olyan oszlop, ahol a λ_0 definíciójában szereplő minimum felvétetik. Ekkor nyilván $y_1 a_j = c(j)$, így csak azt kell látnunk, hogy a_j lineárisan független az A_0' oszlopaitól. De ez valóban így van, hiszen $y'A_0' = 0$ és $y'a_j \neq 0$. •

Az y_1 tehát valóban csúcsa R^*-nak, és ráadásul y_0-nál jobb csúcsa, hiszen $y'b > 0$ miatt $y_1 b > y_0 b$. Miután R^*-nak véges sok csúcsa van, az eljárás véges sok iteráció után befejeződik.

A algoritmusban a Farkas lemmára vonatkozó algoritmust szubrutinként használtuk, aminek belsejében persze alkalmazzuk a Bland féle legkisebb index szabályt. A fenti algoritmusban azonban, amikor az y_0-ról áttértünk y_1-re, a szóban forgó a_j oszlop meghatározásánál nem volt szükség a Bland-szabályra.

3. Fejezet

OPTIMALIZÁLÁS GRÁFOKON

3.1 TELJESEN UNIMODULÁRIS MÁTRIXOK

Az alábbiakban egy mátrixot vagy egy vektort akkor nevezünk egésznek vagy egészértékűnek, ha minden elemük (komponensük) egész szám. Gyakran előfordul, hogy egy lineáris egyenlőtlenségrendszernek egész megoldására vagy egy lineáris programnak egész optimális megoldására van szükségünk. Bebizonyították, hogy mindkét feladat NP-teljes, így általánosságban olyan típusú megoldást nem várhatunk, mint amilyent a Farkas lemma vagy a dualitás tétel nyújt. Speciális feltételi mátrixok esetén azonban szavatolható egészértékű megoldás vagy optimum létezése.

Valamely A mátrixot akkor nevezünk **teljesen unimodulárisnak** (TU: totally unimodular), ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű. Speciálisan, ilyen mátrix minden eleme $0, +1$ vagy -1. Világos, hogy TU-mátrix transzponáltja is az. Sorokat vagy oszlopokat -1-gyel szorozva vagy elhagyva ismét TU-mátrixot kapunk. Továbbá, egységvektorokat sorként vagy oszlopként egy TU-mátrixhoz illesztve TU-mátrixot kapunk. Így, ha az A TU-mátrixot kiegészítjük egy I egység-mátrixszal, akkor a keletkező (A, I) mátrix is TU-mátrix. Ha A TU-mátrix, úgy $(A, -A)$ is az. (De ha mondjuk egy csupa 1 oszloppal egészítjük ki A-t, akkor nem feltétlenül kapunk TU-mátrixot: legyen A az $\{1, 2, 3, 4\}$ pontokon az $\{12, 13, 14\}$ élekből álló gráf $4 * 3$-as incidencia mátrixa.)

Példaképp, legyen A egy $D = (V, E)$ irányított gráf incidencia mátrixa, azaz A sorai a V-nek, oszlopai E-nek felelnek meg, és az $a_{v,e}$ elem akkor $+1$ illetve -1, ha az e él belép illetve kilép v-ből (egyébként 0).

TÉTEL 3.1 *(a) Digráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris. (b) Páros gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.*

Biz. (a) Vegyünk egy A' négyzetes részmátrixot, amelyről be akarjuk látni, hogy determinánsa $0, \pm 1$. Amennyiben ennek van olyan oszlopa, amelyben legfeljebb csak egy nem-nulla elem van, akkor ezen oszlop szerint kifejtve a determinánst, indukcióval kész vagyunk. Így feltehetjük, hogy minden oszlopban pontosan két nem-nulla van (merthogy több nem lehet). Ezek közül az egyik $+1$, a másik -1, vagyis a sorokat összeadva 0-t kapunk, azaz A' sorai lineárisan függőek, így a determináns 0.

(b) Szorozzuk meg -1-gyel a mátrix azon sorait, amelyek a páros gráf egyik osztályában lévő pontoknak felelnek meg. Ekkor egy irányított gráf incidencia mátrixát kapjuk, amiről az előbb láttuk, hogy TU. •

Hipergráfon egy $(V, \mathcal{F})$ párt értünk, ahol V adott alaphalmaz, $\mathcal{F}$ pedig V részhalmazainak egy rendszere, amelyben ugyanaz a részhalmaz több példányban is szerepelhet. Az $\mathcal{F}$ tagjai a hipergráf **hiperélei**. Egy H hipergráfot akkor nevezzünk **teljesen unimodulárisnak,** ha H incidencia mátrixa teljesen unimoduláris. Ez egy olyan $0-1$ értékű mátrix, amelyben a soroknak a V elemei felelnek meg, az oszlopoknak az $\mathcal{F}$ elemei, és a mátrix egy eleme pontosan akkor egy, ha az oszlopának megfelelő hiperél tartalmazza a mátrix-elem sorának megfelelő V-beli elemet. A gráfok speciális hipergráfok, ahol minden hiperél kételemű. Ezek közül már láttuk, hogy a páros gráfok teljesen unimodulárisak. Más gráfok viszont sohasem azok, hiszen egy páratlan kör incidencia mátrixának determinánsa ± 2.

Mint láttuk, minden D digráf ± 1-es incidencia mátrixa TU. Ezt általánosítja a **hálózati mátrix.** Legyen D olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő és legyen F egy feszítő fa.

Az A mátrix sorai az F éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az F-en kívüli éleknek. Minden uv nem-fa élre a fában egy egyértelmű (nem biztosan irányított) út vezet v-ből u-ba. ennek egy f elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha f iránya megegyezik az útéval és -1-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix minden más eleme 0.

Lemma 3.2 *Hálózati mátrix részmátrixa is az. Hálózati mátrix sorát vagy oszlopát -1-gyel szorozva hálózati mátrixot kapunk.*

Biz. Egy oszlop eltörlése annak felel meg, hogy a megfelelő nem-fa élt a digráfból kihagyjuk. Egy sor törlése annak felel meg, hogy a megfelelő fa-élt a digráfban összehúzzuk. Egy sor vagy oszlop -1-gyel való szorzása annak felel meg, hogy a megfelelő élt (akár fa-él, akár nem-fa él) átirányítjuk. •

TÉTEL 3.3 *Az A hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

Biz. A lemma alapján elég belátni, hogy egy négyzetes hálózati mátrix determinánsa $0, 1$ vagy -1. Tekintsük a fának egy v végpontját. Ha az F fa v-vel szomszédos éléhez tartozó sorban lévő nem-nulla elemek α száma legfeljebb 1, akkor a determináns kifejtési szabály alapján indukcióval készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $\alpha > 1$, vagyis v szomszédos legalább két nem-fa éllel. Átirányítás miatt feltehető, hogy ezek közül pontosan egy van v felé irányítva. Legyen ez sv és legyen vt egy másik nem-fa él. Ha az sv-nek megfelelő oszlopot, hozzáadjuk a vt-nek megfelelő oszlophoz, akkor egyrészt persze a determináns értéke nem változik, másrészt ismét hálózati mátrixot kapunk, éspedig azé a gráfét, amelyben a vt él helyett az st él szerepel.

Ilyen átalakításokkal egy olyan gráfot kaphatunk, amelyben az F feszítő fa változatlan, egyetlen nem-fa él (nevezetesen sv) szomszédos v-vel, vagyis a hozzátartozó hálózati mátrix v-nek megfelelő sorában egy nem-nulla elem van. Ilyen hálózati mátrixról pedig már láttuk, hogy a determinánsa $0, \pm 1$, ugyanakkor a fenti operációk nem változatták a determináns abszolút értékét. •

Következmény 3.4 *Egy olyan hipergráf, amely egy irányított fa élhalmazán van definiálva és a hiperélek irányított utak, teljesen unimoduláris.*

Egy hipergráfot **lamínárisnak** mondunk, ha bármely két hiperéle vagy diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Például, ha $F = (V, E)$ egy s gyökerű fenyő és minden $e = uv$ éléhez tekintjük a v-ből a fenyőben elérhető pontok halmazát, akkor ezen halmazok lamináris rendszert alkotnak. Valójában nem nehéz bebizonyítani ezen állítás megfordítását is, mely szerint minden lamináris halmazrendszer lényegében ilyen alakban áll elő.

Legyen $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ két lamináris hipergráf az S alaphalmazon. Jelölje A_i $(i = 1, 2)$ az incidencia mátrixukat, amelyben az oszlopok S elemeinek felelnek meg, míg a sorok $\mathcal{F}_i$ elemeinek, és legyen $M := \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$.

TÉTEL 3.5 *M teljesen unimoduláris.*

Biz. Vegyük M-nek egy négyzetes részmátrixát. Az ebben lévő egyesek száma szerinti indukcióval ennek determinánsáról kimutatjuk, hogy 0 vagy ± 1. Mivel A_i bármely részmátrixa is egy lamináris rendszer incidencia mátrixa (miért?!), így feltehetjük, hogy a vizsgált részmátrix maga M. Ha M-ben minden elem nulla, akkor persze a determináns is nulla. Ha M-nek van olyan sora vagy oszlopa, amelyben legfeljebb egy nem-nulla elem van, akkor indukcióval (és kifejtési szabállyal) készen vagyunk.

Ha $\mathcal{F}_1$ is és $\mathcal{F}_2$ is partíció, akkor A_1 sorösszege is és A_2 sorösszege is a csupa 1 vektor, tehát A sorai lineárisan függőek, így $\det(M) = 0$. Tegyük, most fel, hogy mondjuk $\mathcal{F}_1$ nem partíció. Ekkor van egy olyan minimális Z tagja, amely része $\mathcal{F}_1$ egy másik tagjának. Ha most $\mathcal{F}_1$-nek valamennyi Z-tartalmazó tagjából kivonjuk Z-t, ami azzal ekvivalens (a laminaritás miatt), hogy a megfelelő sorokból kivonjuk Z sorát, akkor a determináns értéke nem változik. Viszont a keletkező mátrixban kevesebb egyes szerepel, így indukcióval készen vagyunk. •

Feladat 3.1 *Igazoljuk, hogy a 3.5 tételben szereplő M mátrix hálózati mátrix!*

Feladat 3.2 *Igazoljuk, hogy az alábbi mátrix teljesen unimoduláris, de sem ő, sem a transzponáltja nem az:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 A FARKAS LEMMA ÉS A DUALITÁS TÉTEL TU-MÁTRIXOKRA

Az erős bázis-megoldás fogalma már eddig is hasznos volt (mert csak véges sok volt belőlük, és mert minden, a poliéderen felülről korlátos cx célfüggvény esetén $\max cx$ erős bázis-megoldáson felvétetett.) E fogalom most újabb fontos szerephez jut.

Lemma 3.6 *Tetszőleges M TU-mátrixszal megadott egyenlőtlenség-rendszer esetén, ha a jobboldali korlátozó b vektor egész, akkor minden erős bázis-megoldás egész.*

Biz. Legyen $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ és tekintsük a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{3.1}$$

rendszert. A Bázis-megoldások című szakaszban megfigyeltük, hogy minden erős bázis-megoldás előáll valamely $M'x' = b'$ egyenletrendszer egyértelmű megoldásának nulla komponensekkel való kiegészítéseként, ahol M' az M egy $[(r(M) \times (r(M)]$-es nem-szinguláris részmátrixa és b' jelöli a b azon részét, amely az M' sorainak felel meg. Mármost, ha M TU-mátrix, akkor a nem-szinguláris M' determinánsa $+1$ vagy -1. A Cramer szabály szerint, miután b' egész, az egyértelmű x' megoldás is az. •

Lemma 3.7 *Legyen c tetszőleges (nem feltétlenül egészértékű) vektor. Bármely M TU-mátrixszal megadott K metszet-kúpnak, ha van olyan x' eleme, amelyre $cx' > 0$, akkor K-nak van ilyen $(0, \pm 1)$-értékű eleme is.*

Biz. Legyen $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ és tegyük fel, hogy a K kúp a $Px = 0, Qx \leq 0$ rendszer megoldás-halmaza. Mivel x' pozitív számszorosa is K-ban van, feltehető, hogy x' maga olyan, hogy minden komponense a $[-1, +1]$ zárt intervallumba esik. Vagyis a

$$(-1, \ldots, -1) \leq x \leq (1, \ldots, 1),\ Px = 0, Qx \leq 0 \tag{3.2}$$

rendszer által meghatározott korlátos poliédernek x' olyan eleme, amelyre $cx' > 0$. Ekkor az 1.19 tétel szerint van olyan x^* erős bázis-megoldása (3.2)-nek, amelyre $cx^* \geq cx'$. A 3.6 lemma miatt x^* egészértékű, azaz minden komponense $0, \pm 1$. •

TÉTEL 3.8 *Tegyük fel, hogy az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris. Ha a (3.1) primál probléma oldható meg és a korlátozó b vektor egész, akkor (3.1)-nek van egész megoldása is. Ha az*

$$y_1 \geq 0, yM = 0, yb < 0 \tag{3.3}$$

duális probléma oldható meg, ahol $y = (y_0, y_1)$, akkor van $(0, \pm 1)$-értékű y megoldás is (függetlenül b egészértékűségétől).

Biz. A tétel első fele következik a 3.6 lemmából, és abból korábbi eredményből, hogy ha létezik megoldás, akkor létezik erős bázis-megoldás is. A tétel második fele pedig a 3.7 lemma közvetlen folyománya. •

TÉTEL 3.9 *Ha a $\max(cx : Px = b_0, Qx \leq b_1)$ lineáris programozási problémának létezik megoldása, az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris és b egész, akkor az optimum egész vektoron is felvétetik (függetlenül attól, hogy c egészértékű vagy sem).*

Biz. Miután az optimum erős bázis-megoldáson is felvétetik, a 3.6 lemmából az eredmény következik. •

Az alábbi tételek ugyanígy következnek a 1.36 és 2.8 tételekből a 3.6 és 3.7 lemmák segítségével.

TÉTEL 3.10 *Tegyük fel, hogy $R = \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ nemüres, b egész vektor, és M teljesen unimoduláris. A következők ekvivalensek.*
(1) $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos.
(2) Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$-értékű x' vektor, amelyre $Px' = 0, Qx' \leq 0$, és $cx' > 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$ és $yM = c$, és amely egész, amennyiben c egész. •

TÉTEL 3.11 *Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1)\}$ poliédernek x^* egy eleme, az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris és b egész. Jelölje $Q_*^=$ azon részmátrixát Q-nak, amely sorainak megfelelő egyenlőtlenségeket x^* egyenlőséggel teljesíti. A következők ekvivalensek.*
(1) x^* maximalizálja cx-t R fölött.
(2) Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$-értékű x' vektor, amelyre $Px' = 0$, $Q_*^= x' \leq 0$, és $cx' > 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$ $yM = c$, $y(B - Mx^*) = 0$, és y egész, amennyiben c egész. •

Alkalmazásként levezetjük Kőnig Dénes tételét:

TÉTEL 3.12 (Kőnig) *Páros gráfban a független élek maximális ν száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával.*

Biz. Nyilván minden gráfra $\nu \leq \tau$. Az egyenlőség igazolásához azt kell kimutatnunk, hogy páros gráfban létezik olyan párosítás és olyan lefogó pontrendszer, melyek elemszáma megegyezik.

A páros gráf incidencia mátrixát jelölje A, amelyben a soroknak a gráf pontjai, az oszlopoknak a gráf élei felelnek meg. Tekinsük a következő primál-duál lineáris program párt:

$$\max(1x : Ax \leq 1, x \geq 0), \tag{3.4}$$

$$\min(1y : yA \geq 1, y \geq 0). \tag{3.5}$$

A 3.9 tétel szerint mindkét programnak az optimuma egészen felvétetik. Jelöljük ezeket rendre x_0-lal és y_0-lal. (3.4) minden egészértékű megoldása $0-1$ értékű, és rögtön látszik, hogy (3.5) minden optimális egészértékű megoldása is $0-1$ értékű. Legyen M azon élek halmaza, melyeken x_0 az 1 értéket vesz fel, és legyen T azon pontok halmaza, amelyeken y_0 egyet vesz fel. Az $Ax \leq 1$ feltétel azt jelenti, hogy M párosítás a gráfban, míg az $yA \geq 1$ feltétel azt jelenti, hogy T az éleket lefogó pontrendszer. A primál és duál optimum értékek egyenlősége pedig azt jelenti, hogy $|M| = |T|$, ami a célunk volt. •

Természetesen a primál programban az azonosan 1 célfüggvény helyett választhatunk tetszőleges c célfüggvényt. Ekkor a fenti módszer a Kőnig tétel Egerváry Jenőtől származó általánosítását adja:

TÉTEL 3.13 (Egerváry) *Páros gráfban egy párosítás maximális költsége egyenlő* $\min(\sum_{v \in V} \pi(v) : \pi \geq 0, \pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ *minden uv élre). Ha c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.* •

További általánosításokat kaphatunk, ha a primál feladatban a jobboldalt valamilyen (nem-negatív) b vektornak választjuk. Ennek az a kombinatorikus jelentése, hogy maximális költségű fokszám-korlátozott részgráfot keresünk. Természetesen alsó korlátokat is kitűzhetünk a fokszámokra, mint ahogy korlátozhatjuk alulról és felülről azt, hogy egy élt hány példányban vehetünk be a keresett részgráfba. Valójában nem is érdemes megfogalmazni a különböző lehetőségekre vonatkozó min-max tételeket, mert a dualitás tétel és a páros gráf incidencia mátrixának teljes unimodularitása már magában hordozza a szükséges információt.

3.3 KEREKÍTÉS ÉS EGYENLETES SZÍNEZÉS

Akkor mondjuk, hogy egy z egész szám az x **szám kerekítése,** ha $|x - z| < 1$. (Tehát az $1,01$-nek az 11 és a 2 is kerekítése.) Ez speciálisan azt jelenti, hogy ha x egész, akkor $x = z$. A z vektor az x **vektor kerekítése**, ha minden komponense kerekítés. Egy x nem-egész szám $\lfloor x \rfloor$ alsó egész részén a legnagyobb x-nél kisebb egész számot értjük, míg $\lceil x \rceil$ felső egész részen a legkisebb x-nél nagyob számot. Egész x-re $\lfloor x \rfloor := \lceil x \rceil := x$. Amennyiben x egy vektort jelöl, úgy $\lfloor x \rfloor$ azt a vektort jelöli, amelyet x-ből nyerünk a komponenseinek alsó egész részét véve. Az x vektor $\lceil x \rceil$ felső egész részét analóg módon definiáljuk.

Lemma 3.14 *Legyen A teljesen unimoduláris mátrix és x_0 egy vektor. Ekkor létezik egy olyan q egészértékű vektor, amelyre $\lfloor x_0 \rfloor \leq q \leq \lceil x_0 \rceil$ és $\lfloor Ax_0 \rfloor \leq Aq \leq \lceil Ax_0 \rceil$. Más szóval az x_0-nak van olyan q kerekítése, hogy az A minden a sorára aq kerekítése ax_0-nak.*

Biz. A feltevés szerint az $\lfloor x_0 \rfloor \leq z \leq \lceil x_0 \rceil$ és $\lfloor Ax_0 \rfloor \leq Az \leq \lceil Ax_0 \rceil$ rendszernek van megoldása, így a 3.8 tétel szerint van egész megoldása is. •

Érdemes megfogalmazni az alábbi következményt: *Ha $(S, \mathcal{F})$ teljesen unimoduláris hipergráf, úgy bármely $x_0 : S \to \mathbf{R}$ függvénynek létezik olyan q kerekítése, hogy minden $A \in \mathcal{F}$ hiperélre a $(\sum q(v) : v \in A)$ szám kerekítése $(\sum x_0(v) : v \in A)$-nak.*

TÉTEL 3.15 *Tetszőleges $m \times n$-es B mátrixnak van olyan kerekítése, hogy a következő mennyiségek mind egynél kevesebbel változnak: minden sorösszeg, minden oszlopösszeg, az első j sor elemeinek összege $(j = 1, 2, \ldots, m)$, az első i oszlop elemeinek összege $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Biz. Legyen S a B mátrix mezőinek halmaza. B minden sorához legyen a sorban lévő mezők halmaza tagja $\mathcal{F}_1$-nek valamint minden i-re $(2 \leq i \leq m)$ az első i sor mezőinek halmaza legyen tagja $\mathcal{F}_1$-nek (összesen tehát $2m - 1$ tagja van $\mathcal{F}_1$-ben). $\mathcal{F}_2$ analóg módon van definiálva az oszlopok segítségével. Ekkor $\mathcal{F}_i$ lamináris, így a 3.5 tétel és a 3.14 lemma alapján készen vagyunk. •

A teljesen unimoduláris mátrixok egy másik érdekes alkalmazása hipergráfok egyenletes színezésével foglalkozik.

TÉTEL 3.16 *Legyen A TU-mátrix, b egész vektor, k pozitív egész. Legyen z olyan egész vektor, amelyre $Az \leq kb$. Ekkor z előáll olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegeként, melyekre $Az_i \leq b$.*

Biz. k szerinti indukció alapján elég egy olyan egész z_1 egész vektort találni, amelyre $Az_1 \leq b$ és $A(z - z_1) \leq (k-1)b$. Ugyanis ilyen z_1 létezése esetén $z' := z - z_1$ olyan, amelyre $Az' \leq (k-1)b$ és az indukciós feltevés alkalmazható $(k-1)$-re.

A fenti z_1 létezéséhez csak azt kell látni, hogy az $Az - (k-1)b \leq Ax \leq b$ poliédernek van egész pontja. A poliéder mindenesetre nemüres, hiszen z/k benne van. Továbbá a feltételek egy TU-mátrixszal adhatók meg, így létezik a kívánt egész pont is. •

A fenti tétel kiterjeszthető arra az esetre, amikor z nemnegativitását is megköveteljük, és az Ax-re nemcsak felső korlát van, hanem alsó is. Valóban, ha A TU-mátrix, akkor az $(A, -A, I)$ mátrix is teljesen unimoduláris. Kapjuk a következőt.

Következmény 3.17 *Ha $z \geq 0$ olyan egész vektor, amelyre $kb_1 \leq Az \leq kb_2$, akkor z felbomlik olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegére, melyekre $z_i \geq 0$, és $b_1 \leq Az_i \leq b_2$.*

Ezt felhasználhatjuk TU-mátrixok oszlopainak egyenletes k-színezésére. Az A oszlopainak egy partícióját ("színezését") $A_1, A_2, \ldots, A_k$ részre akkor nevezzük **egyenletesnek**, ha A minden a sorára érvényes, hogy a sornak az egyes A_i részekbe eső elemeinek összege minden A_i-re lényegében ugyanaz, tehát $\lfloor 1a/k \rfloor$ vagy $\lceil 1a/k \rceil$.

TÉTEL 3.18 *Az A TU-mátrix oszlopainak létezik egyenletes k színezése.*

Biz. Legyen d az A oszlopainak az összege. Legyen $b_1 := \lfloor d/k \rfloor$, $b_2 := \lceil d/k \rceil$. Ekkor a $z :\equiv 1$ benne van a $\{kb_1 \leq Ax \leq kb_2, x \geq 0\}$ poliéderben. Az előbbi következmény szerint z felbomlik $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegére, melyekre $z_i \geq 0$, és $b_1 \leq Az_i \leq b_2$. Világos, hogy a z_i-k $0-1$ vektorok. Legyen A_i az oszlopoknak azon halmaza, melyeknek megfelelő komponense z_i-nek 1. Ezek éppen a kívánt egyenletes színezést adják. •

Következmény 3.19 *Egy páros gráf éleit meg lehet k színnel úgy színezni, hogy minden v csúcsra és mindegyik j színre ($j = 1, \ldots, k$) a v-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe j. Ha k-t a maximális fokszámnak választjuk, akkor megkapjuk Kőnig élszínezési tételét, amely szerint páros gráf kromatikus indexe (élszínezési száma) a maximális fokszámmal egyenlő. Ha k-t a minimális δ fokszámnak választjuk, akkor Gupta egy tételét kapjuk, amely szerint G páros gráf élhalmaza felbontható δ részre úgy, hogy mindegyik rész fedi az összes pontot.* •

Következmény 3.20 *Adott egy F irányított fa (speciális esetben irányított út) és F irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat F-élek egy részhalmazának tekintünk. $\mathcal{P}$ tagjai megszínezhetők k színnel (minden k pozitív egészre) úgy, hogy F minden e élére az e-t tartalmazó egyszínű utak száma minden színre lényegében ugyanannyi, ahol a "lényegében ugyanannyi" azt jelenti, hogy bármely két színosztályra az eltérés legfeljebb egy lehet.* •

Ha a hálózati mátrix transzponáltjára alkalmazzuk a színezési tételt, akkor a következőt kapjuk.

Következmény 3.21 *Adott egy F irányított fa és F irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat F-élek egy részhalmazának tekintünk. Az F élei megszínezhetők k színnel (minden k pozitív egészre) úgy, hogy $\mathcal{P}$ minden tagjában a színek lényegében egyenletes számban fordulnak elő.* •

Feladat 3.3 *Egy egyszerű mohó algoritmus megadásával közvetlenül bizonyítsuk be a 3.21 következményt.*

3.4 ÁRAMOK ÉS FOLYAMOK

A teljesen unimoduláris mátrixok szép tulajdonságainak legfontosabb felhasználási területe a hálózati folyamok (network flows) elmélete. Ez olyan lineáris programozási feladatok megoldásával és alkalmazásaival foglalkozik, amelyekben a feltételi mátrix egy irányított gráf incidencia mátrixa avagy annak transzponáltja. Mostani célunk azt megmutatni, hogy az alapvető megengedettségi és optimalitási tételek, hogyan következnek a TU-mátrixok tulajdonságaiból. Egy R poliédert **egésznek** nevezünk, ha minden c célfügvényre, amelyre cx felülről korlátos R-en a $\max(cx : x \in R)$ egész vektoron (is) felvétetik.

Jelöljön $D = (V, E)$ egy irányított gráfot. Legyen $f : E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : E \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Valamely $x : E \to \mathbf{R}$ vektorra és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in E, uv$ belép S-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$. Az x vektort **áramnak** (circulation) nevezzük, ha teljesül a rá **megmaradási szabály** (conservation rule), azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (Figyelem: az f-ben megengedünk $-\infty$ komponenst, ami persze csak annyit jelent, hogy az illető élen az áram értéke nincs alulról korlátozva. Ez azt is jelenti, hogy csak az olyan e élen rendelünk majd az $f(e) \leq x(e)$ egyenlőtlenséghez duál változót, amelyen az $f(e)$ korlát véges. Analóg módon a g-nek lehetnek $+\infty$ komponensei, de az x áram komponensei mindig valósak. Az f alsó korlátban $+\infty$-t, a g felső korlátban pedig $-\infty$-t nem engedünk meg. Néha előírjuk, hogy az f vagy a g komponensei egészértékűek legyenek; ebbe beleértjük a $\pm\infty$-t is.)

Gyakorlat 3.4 *(a) Igazoljuk, hogy x akkor és csak akkor áram, ha $\varrho_x(v) \leq \delta_x(v)$ fennáll minden v csúcsra. (b) Ha x áram, akkor $\varrho_x(Z) = \delta_x(Z)$ minden $Z \subseteq V$ részhalmazra is fennáll.*

Az x áramot **megengedettnek** (feasible) mondjuk, ha

$$f \leq x \leq g. \tag{3.6}$$

TÉTEL 3.22 *Tegyük fel, hogy f és g egész. A megengedett áramok halmaza, amennyiben nemüres, egész poliéder.*

Biz. Miután irányított gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris, a 3.9 tételből az állítás következik. •

TÉTEL 3.23 (Alan Hoffman, 1960) *Akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{3.7}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (3.7) fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett áram is.

Biz. A szükségesség igazolásához, tegyük fel, hogy x megengedett áram. Ekkor $\delta_g(X) - \varrho_f(X) \geq \delta_x(X) - \varrho_x(X) = 0$, amiből (3.7) következik.

Az elegendőséghez tekintsük az $Ax \leq 0, x \leq g, -x \leq -f$ rendszert. Figyeljük meg, hogy a jelen esetben egy x vektorra akkor és csak akkor teljesül az $Ax \leq 0$ egyenlőtlenség, ha $Ax = 0$. (Ezt kellett bizonyítani a 3.4 gyakorlat (a) részében.) A 3.8 tételt alkalmazva kapjuk, hogy ha a fenti rendszernek nincs megoldása, akkor van olyan (y, u, v) $(0,1)$-értékű vektor amelyre $(*)$ $yA + u - v = 0$ és $(**)$ $ug - vf < 0$. Mivel $f \leq g$, így minden élre feltehető, hogy $u(e)$ és $v(e)$ közül legalább az egyik nulla (ha ugyanis mindkettő 1, akkor mindkettőt helyettesíthetjük nullával.)

Jelölje Z azon z pontok halmazát, ahol az $y(z) = 1$. Ekkor $(*)$ miatt minden olyan e élre, amelynek mindkét vége vagy Z-ben vagy $V - Z$-ben van, $u(e) = v(e) = 0$. Továbbá minden Z-be belépő e élre $v(e) = 1$, $u(e) = 0$ és minden z-ből kilépő élre $v(e) = 0, u(e) = 1$. Miután $ug = \delta_g(Z)$ és $vf = \varrho_f(Z)$, így $(**)$ ellentmond a (3.7) feltételnek. •

Az általános elméletből szépen kiadódott Hoffman tétele. Természetes azonban az igény, hogy egy rövid, direkt bizonyítás is rendelkezésünkre álljon. Íme:

Direkt bizonyítás (a (3.7) feltétel elegendőségére). Tekintsük a következő függvényt. $\gamma(X) := \delta_g(X) - \varrho_f(X)$. Most (3.7) azzal ekvivalens, hogy γ nem-negatív. Az $X, Y \subseteq V$ halmazokra jelölje $d_x(X, Y)$ az $x(e)$ értékek összegét mindazon e élekre, melyek $X - Y$ és $Y - X$ egy-egy pontját kötik össze (mindegy melyik irányban). A bizonyítás kulcsa a következő lemma.

Lemma 3.24 $\gamma(X)+\gamma(Y)=\gamma(X\cap Y)+\gamma(X\cup Y)+d_{g-f}(X,Y)$.

Biz. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy minden lehetséges él hozzájárulása a két oldalhoz ugyanannyi. •

A Hoffman tétel bizonyításához visszatérve nevezzünk egy olyan e élt **pontosnak**, amelyre $f(e)=g(e)$. Nevezzünk **pontosnak** csúcsok egy Z részhalmazát, amelyre $\gamma(Z)=0$. Tegyük fel indirekt, hogy a D digráfra nem igaz a tétel, és válasszunk egy olyan ellenpéldát (adott D), amelyben a pontos élek és a pontos halmazok együttes száma maximális. Az nem lehet, hogy minden él pontos, mert akkor $x:=f(=g)$, a (3.7) miatt, megengedett áram volna. Legyen $a=st$ olyan él, amelyre $f(a)<g(a)$.

Állítjuk, hogy a belép egy pontos T halmazba. Valóban, ha nem lépne be, akkor $f(a)$-t meg tudnánk úgy növelni, hogy a módosított f' alsó korlátra továbbra is fennállna $f'\le g$ és $\varrho_{f'}(Z)\le\delta_g(Z)$ minden $Z\subseteq V$-re, továbbá vagy az a él válna pontossá, vagy pedig egy olyan halmaz, amelybe az a él belép. Ez a lehetőség azonban ellentmondana a pontos élek és halmazok maximális együttes számára tett feltevésünknek. Tehát az a él valóban belép egy T pontos halmazba. Analóg módon látható, hogy a kilép egy S pontos halmazból.

Az a él létezése folytán tudjuk, hogy a $d_{g-f}(S,T)$ érték szigorúan pozitív. A lemmát és (3.7)-t alkalmazva kapjuk, hogy $0+0=\gamma(S)+\gamma(T)>\gamma(S\cap T)+\gamma(S\cup T)\ge 0+0$, amely ellentmondás mutatja, hogy nem létezhet ellenpélda, és így a tétel következik. Ugyanez a gondolatmenet azt is mutatja, hogy ha f és g egészértékű, akkor van egészértékű megengedett áram is. • •

Miután egy TU-mátrix transzponáltja is TU, érvényes a Hoffman tétel alábbi ellenpárja.

TÉTEL 3.25 *Akkor és csak akkor létezik olyan $\pi:V\to\mathbf{R}$ vektor (amely ráadásul egészértékű, ha f és g is az), amelyre $f(uv)\le\pi(v)-\pi(u)\le g(uv)$ minden $e=uv$ élre, ha a c'-vel élsúlyozott D' segédgráfban nincsen negatív kör, ahol uv akkor eleme D'-nek, ha vagy $uv\in E$ és ekkor $c'(uv):=g(uv)$, vagy $vu\in E$ és ekkor $c'(uv):=-f(vu)$.*

A tétel következik az alább megfogalmazott speciális alakjából, amikor csak felső korlátok vannak adva a $\pi(v)-\pi(u)$ különbségekre. Valóban,, az $e=uv$ élre adott $f(uv)\le\pi(u)-\pi(v)$ alsó korlát ekvivalens egy újonnan behúzott vu élre vonatkozó $\pi(u)-\pi(v)\le-f(vu)$ felső korláttal.

TÉTEL 3.26 *Adott $c:E\to\mathbf{R}$ költség-függvényre akkor és csak akkor létezik olyan (***megengedett potenciálnak** *nevezett) $\pi:V\to\mathbf{R}$ vektor, amelyre $\pi(v)-\pi(u)\le c(uv)$ minden $e=uv$ élre, ha nem létezik negatív költségű irányított kör. Amennyiben c egészértékű, úgy a potenciál is választható annak.*

Biz. Legyen A a digráf incidencia mátrixa. A 3.8 tétel miatt vagy létezik a $\pi A\le c$ rendszernek megoldása (amely egész, ha c az) vagy létezik a duális $Ax=0, x\ge 0, cx<0$ rendszernek egy $(0,\pm1)$-es megoldása. Az első eset épp egy megengedett potenciál létezését jelenti, míg a második esetben, $x\ge 0$ miatt, x egy $(0,1)$ értékű, negatív költségű áram, amely élidegen körökre bomlik és így e körök egyike is negatív. •

Tekintsük most a költséges áram problémát, azaz adott $c:E\to\mathbf{R}$ költségfüggvény esetén keressünk minimális költségű megengedett áramot, más szóval oldjuk meg a

$$\min(cx: Ax=0, f\le x\le g) \tag{3.8}$$

lineáris programot. (Természetesen az $x\le g$ egyenlőtlenség itt azt jelenti, hogy $x(e)\le g(e)$ az olyan élekre, ahol $g(e)$ véges. Duális változó tehát csak ilyen egyenlőtlenségekhez tartozik.)

Először vizsgáljuk meg, hogy cx mikor korlátos alulról. Készítsünk el egy $D'=(V,E')$ digráfot, és élein definiáljuk a c' költségfüggvényt a következőképpen. D'-ben uv akkor él, ha vagy $vu\in E, f(vu)=-\infty$, és ekkor $c'(uv)=-c(vu)$, vagy pedig $uv\in E, g(uv)=\infty$, és ekkor $c'(uv)=c(uv)$.

TÉTEL 3.27 *Feltéve, hogy létezik megengedett áram, a következők ekvivalensek.*
(a) cx korlátos alulról,
(b) nincs negatív összköltségű irányított kör D'-ben,
(c) létezik egy olyan $\pi:V\to\mathbf{R}$ függvény, amelyre

$$\pi(v)-\pi(u)\le c(uv),\ ha\ uv\in E\ és\ g(uv)=\infty,$$

és

$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } f(uv) = -\infty.$$

Biz. A (b) és (c) feltételek ekvivalenciája következik a 3.25 tételből

Tekintsük a megengedett áramok $P := \{x : Ax \leq 0, f \leq x \leq g\}$ poliéderét és alkalmazzuk a 3.10 tételt. Eszerint $\{cx : x \in P\}$ akkor és csak akkor korlátos alulról, ha nem létezik olyan $(0, \pm 1)$ értékű x áram, amelyre $cx < 0$, $x(e) \leq 0$, ha $g(e)$ véges, és $x(e) \geq 0$, ha $f(e)$ véges. Ilyen x létezése pedig épp a D'-beli negatív kör létezésével ekvivalens. •

Tegyük most fel, hogy x megengedett áram. Készítsünk el egy $D_x = (V, E_x)$ digráfot és az élhalmazán egy c_x költségfüggvényt a következőképpen. Az uv él akkor tartozzék E_x-hez, ha vagy $uv \in E, x(uv) < g(uv)$, és ekkor legyen $c_x(uv) := c(uv)$, vagy pedig $vu \in E, x(vu) > f(vu)$, és ekkor legyen $c_x(uv) := -c(vu)$. A 3.11 tételt specializálva kapjuk a következőt.

TÉTEL 3.28 *Adott x megengedett áram esetén a következők ekvivalensek.*
(a) x optimális megoldása (3.8)-nak,
(b) D_x-ben nem létezik negatív összköltségű irányított kör,
(c) létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } x(uv) < g(uv),$$

és

$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } x(uv) > f(uv). \bullet$$

Feladat 3.5 *Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a 3.27 és a 3.28 tételek megengedett potenciálokra vonatkozó ellenpárját.*

Feladat 3.6 *Fogalmazzuk meg a 3.25 tétel általánosítását, ha minden v pontban a $\pi(v)$-re alsó és felső korlát is ki van tűzve.*

Fontos megjegyezni, hogy a hálózati mátrixokkal megadott lineáris programok megoldhatók áram problémaként. Legyen $D = (V, E)$ irányított gráf, F feszítő fa és legyen $N := E - F$ a nem-fa élek halmaza. Legyen adott $f = (f_F, f_N)$ és $g = (g_F, g_N)$ korlát, melyekre $f \leq g$. Legyen továbbá $c = (c_F, c_N)$ egy olyan vektor, amelyre $c_F = 0$. Jelölje az F-hez tartozó $(0, \pm 1)$-es hálózati mátrixot A, míg a D digráf $(0, \pm 1)$-es pont-él incidencia mátrixát B. Legyen továbbá $x = (x_F, x_N)$. Tekintsük a $\max(c_N x_N : f_F \leq Ax_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N)$ lineáris programot. Belátjuk, hogy ez ekvivalens a $\max(cx : Bx = 0, f \leq x \leq g)$ maximális költségű áram feladattal.

Amennyiben $x = (x_F, x_N)$ áram (azaz $Bx = 0$), úgy könnyen látszik, hogy $x_F = Ax_N$, és persze $cx = c_N x_N$. Emiatt $f \leq x \leq g$ ekvivalens a $f_F \leq Ax_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N$ feltételekkel. Fordítva, tegyük fel, hogy x_N kielégíti ezen utóbbi egyenlőtlenségeket. Minden $e \in N$ nem-fa élhez legyen χ_e az $(1, a_e)$ vektor, ahol a_e az A mátrix e-hez tartozó oszlopa. (Másszóval χ_e az e élhez tartozó C_e alapkör $0, \pm 1$-es incidencia vektora.) Ekkor persze χ_e áram, és így az $x := \sum(x_N(e)\chi_e : e \in N)$ is áram, méghozzá olyan, hogy $x(e) = x_N(e)$, ha $e \in N$. Látható, hogy $f_F \leq Ax \leq g_F$ azzal ekvivalens, hogy $f_F(e) \leq z(e) \leq g_F(e)$ minden $e \in F$ élre fennáll. •

Gyakran az áramnál általánosabb fogalmat tekintenek. Például az x vektorra azt írjuk elő, hogy minden v pontra $\varrho_x(v) - \delta_x(v) = b(v)$, ahol $b : V \to \mathbf{R}$ előre adott vektor. Vagy még általánosabban, adott $p : V \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b : V \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ esetén $(p \leq b)$ minden v csúcsra legyen

$$p(v) \leq \varrho_x(v) - \delta_x(v) \leq b(v). \tag{3.9}$$

Egy egyszerű fogással azonban ez a feladat áram problémává alakítható. Nevezetesen, vegyünk fel egy új s csúcsot, és D valamennyi pontjából vezessünk egy-egy élt s-be. Egy új vs élen legyen $f(vs) := p(v), g(vs) := b(v)$. Jelölje a kibővített élek halmazát E'. Tetszőleges $x : E \to \mathbf{R}$ vektorhoz legyen $x' : E' \to \mathbf{R}$ a következőképpen definiálva: $x'(e) := x(e)$ ha $e \in E$, és $x'(e) := \varrho_x(v) - \delta_x(v)$ ha $e' = vs$ $(v \in V)$. Hasonlóképp terjesszük ki f-t és g-t az új élekre: $f(us) := p(u), g(us) := b(u)$. Könnyen látszik, hogy x akkor és csak akkor teljesíti (3.6)-t és (3.7)-t, ha x' megengedett áram.

Feladat 3.7 *Hoffman tételének általánosításaként igazoljuk, hogy akkor és csak akkor létezik a (3.6)-t és (3.9)-t kielégítő x vektor, ha $\varrho_f(X) - \delta_g(X) \leq \min(p(X), b(V - X))$ fennáll minden $X \subseteq V$-re.*

Legyen adott egy s forráspont és egy t nyelőpont úgy, hogy s-be nem lép be él és t-ből nem lép ki él. Ha az előbbi általánosított áram fogalmat arra az esetre specializáljuk, amikor $p(v) = b(v) = 0$ ha $v \in V - \{s,t\}$, $f \equiv 0$, $p(s) = 0$, akkor st-folyamról, vagy röviden folyamról beszélünk. Másszóval, **folyamon** egy olyan nemnegatív $x : E \to R_+$ vektort értünk, amely minden, s-től és t-től különböző pontra teljesíti a megmaradási szabályt. Amennyiben még az $x \leq g$ feltétel is teljesül, **megengedett folyamról** beszélünk. Egy s-t tartalmazó, de t-t nem tartalmazó X halmazt nevezzünk $s\bar{t}$-halmaznak.

Tetszőleges S $s\bar{t}$-halmaz és x folyam esetén $\delta\varrho_x(S) - \varrho_x(S) = \sum(\delta_x(v) - \varrho_x(v) : v \in S) = \delta_x(s) - \varrho_x(s) = \delta_x(s)$. Vagyis minden S $s\bar{t}$-halmazra a $\delta_x(S) - \varrho_x(S)$ értékkel definiált **tiszta kiáramlás** független S választásától. Ezt a közös, $\delta_x(s)$-sel egyenlő értéket nevezzük az x folyam **nagyságának.** Az $x(uv)$ szám a folyam **értéke** az $uv \in A$ élen. Az x folyamot **út-folyamnak** (**kör-folyamnak)** nevezzük, ha x csak egy s-ből t-be vezető út (irányított kör) mentén pozitív.

Gyakorlat 3.8 *Igazoljuk, hogy minden nem-negatív folyam kör- és út-folyamok nem-negatív kombinációja.*

Alapvető az alábbi, L.R. Fordtól és D.R. Fulkersontól származó Maximális-Folyam Minimális-Vágás tétel (Max Flow Min Cut; MFMC).

TÉTEL 3.29 (Maximális-Folyam Minimális-Vágás) *Akkor és csak akkor létezik k nagyságú megengedett folyam, ha minden S $s\bar{t}$-halmazra $\delta_g(S) \geq k$. Ha e feltétel teljesül, és g egészértékű, k pedig egész, úgy a folyam is választható egészértékűnek.*

A tételt néha az alábbi ekvivalens alakban említik.

TÉTEL 3.30 *A megengedett st-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\delta_g(S)$ értékek minimumával, ahol a minimum az összes $s\bar{t}$-halmazra megy. Ha g egészértékű, úgy a maximum egészértékű folyamon is felvétetik.*

Biz. Legyen x megengedett st-folyam és S $s\bar{t}$-halmaz. Ekkor $\delta_x(s) = \delta_x(S) - \varrho_x(S) \leq \delta_g(S)$, amiből $max \leq min$ következik.

A fordított irány igazolásához jelölje m_g a szóbanforgó minimum értékét. (Ez a minimum nyilvánvalóan létezik, merthogy véges sok szám minimumáról van szó. Az viszont még ezen a ponton nem világos, hogy létezik maximális nagyságú folyam.) Adjunk D-hez egy új $e = ts$ élt és definiáljuk $f(e) = m_g, g(e) := \{\infty\}$. Az eredeti éleken legyen f mindenhol nulla.

Könnyen látszik, hogy most (3.7) fennáll, és így a 3.23 tétel szerint létezik megengedett áram (amely ráadásul egészértékű, ha g az). Kihagyva a hozzávett e élt, m_g nagyságú folyamot kapunk. •

A fenti bizonyítás előnye, hogy nem csupán egész vagy racionális kapacitásokra működik. Hátránya viszont, hogy nem konstruktív.

Feladat 3.9 *Az MFMC tételből vezessük le Menger tételének irányított élidegen változatát. (Azaz egy irányított gráfban akkor és csak akkor van egy s pontból egy t pontba k élidegen út, ha minden $s\bar{t}$-halmazból lép ki legalább k él.)*

Nemcsak a maximális folyam feladat vezethető vissza megengedett áramokra, hanem megfordítva, a Hoffman tétel is levezethető az MFMC tételből. Ennek érdekében minden $v \in V$ csúcsra legyen $\lambda(v) := \varrho_f(v) - \delta_f(v)$. (Az itt következő levezetésben feltesszük, hogy f, g véges értékű: kis gyakorló feladat az általános eset kezelése.) Ha λ mindenhol nulla, akkor f megengedett áram, és készen vagyunk.

Ha λ nem azonosan nulla, akkor az $S = (v : \lambda(v) > 0)$ és $T = (v : \lambda(v) < 0)$ halmazok nem-üresek. Készítsük el a $D' = (V', A')$ digráfot úgy, hogy $V' = V \cup \{s,t\}$ és $A' = A \cup (s,v) : v \in S \cup ((v,t) : v \in T)$. Definiáljuk a g' kapacitás függvényt a következőképpen. $g'(sv) := \lambda(v)$ ha $v \in S, g'(vt) := -\lambda(v)$ ha $v \in T$, és $g'(a) := g(a) - f(a)$ ha $a \in A$. Legyen $M = \sum(\lambda(v) : v \in S)$. A következő lemma a kapcsolatot írja le egyrészt D megengedett áramai és D' megengedett st folyamai között, másrészt D' M-nél kisebb vágásai és D (5.1)-et megsértő halmazai között.

Lemma 3.31 *(a) Ha x M-nagyságú megengedett st-folyam D'-ben (a g' kapacitásra vonatkozóan), akkor $f + x$ (az eredeti A-ra megszorítva) megengedett áram.*

(b) Ha $\delta_{g'}(X + s) < M$ valamely $X \subseteq V$ halmazra, akkor X megsérti a Hoffman féle (3.7) feltételt.

Biz. (a) A megengedettség, azaz $f \leq f + x \leq g$, következik a konstrukcióból. A megmaradási szabály nyilván fennáll $V - (S \cup T)$ pontjaiban. Mivel x nagysága M, minden s-ből kilépő él telített. Így S-nek bármely v pontjára az eredeti gráfban érvényes, hogy $x(sv) + \varrho_x(v) = \delta_x(v)$, azaz $\varrho_f(v) - \delta_f(v) + \varrho_x(v) = \delta_x(v)$, és így $\varrho_{f+x}(v) = \delta_{f+x}(v)$, vagyis a megmaradási szabály érvényes S pontjaiban is. A bizonyítás T pontjaira analóg módon végezhető el.

(b) $\lambda(S) = M > \delta_{g'}(X + s) = \delta_{g-f}(X) + \lambda(S - X) - \lambda(T \cap X)$, amibe $\lambda(S - X) = \lambda(S) - \lambda(S \cap X)$-t helyettesítve kapjuk, hogy $0 > \delta_{g-f}(X) - \lambda(S \cap X) - \lambda(T \cap X) = \delta_{g-f}(X) - \lambda(X) = \delta_{g-f}(X) + \delta_f(X) - \varrho_f(X)$, vagyis $\delta_g(X) < \varrho_f(X)$. •

Feladat 3.10 *Vezessük le Hoffman tételét az MFMC tételből, ha f-nek lehetnek $\{-\infty\}$, g-nek pedig $\{+\infty\}$ komponensei.*

A fenti redukció azt is mutatja, hogy egy maximális folyam illetve minimális vágás meghatározására szolgáló algoritmus segítségével el lehet dönteni, hogy teljesül-e (3.7), és ha igen, akkor tudunk találni megengedett áramot.

3.5 LEGRÖVIDEBB SÉTÁK ÉS UTAK

Adott a $D = (V, E)$ n pontú, m élű irányított gráf élein egy $c : E \to \mathbf{R}$ költség- (vagy másnéven súly-) függvény. **Sétán** egy olyan $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ sorozatot értünk, amelyben felváltva következnek pontok és élek, és mindegyik e_i él a v_{i-1} pontból vezet a v_i pontba. A séta **zárt,** ha $v_0 = v_k$. A szereplő élek száma a séta **hossza.** Azt mondjuk, hogy v_0 a séta kezdőpontja, v_k a séta végpontja. Amenyiben nincs ismétlődés, **útról** beszélünk. Rövidség kedvéért egy s-ből v-be vezető utat sv-útnak fogunk hívni.

Fő célunk minimális össz-költségű, másnéven legolcsóbb sv-utat találni. Ha a költség negatív is lehet, akkor a feladat már az azonosan -1 súlyozás esetén is NP-teljes, ugyanis ekkor a legrövidebb út feladat magában foglalja a Hamilton út problémának az előírt végpontú változatát, ami a tetszőleges végpontú Hamilton út problémához hasonlóan NP-teljes.

3.5.1 NEMNEGATÍV KÖLTSÉGEK: DIJKSTRA ALGORITMUSA

Tegyük fel először, hogy a c súlyozás nemnegatív. Egy s **gyökerű fenyőn**, röviden s-fenyőn egy olyan irányított fát értünk, amelynek minden pontja az s-ből irányított úton elérhető. Amennyiben a fenyő minden v pontjára az s-ből odavezető út a D digráf egy legolcsóbb s-ből v-be vezető útja, úgy **legolcsóbb utak** egy s-**fenyőjéről** beszélünk. Jelölje $w_n(v)$ az s-ből v be vezető legolcsóbb út költségét.

Lemma 3.32 *Legyen T egy legolcsóbb utak s-fenyője és tegyük fel, hogy az $m_T := \min(w_n(u)+c(uv) : uv$ kilép T-ből$)$ minimum valamely $a = u_a v_a$ élen vétetik fel. Ekkor $T' := T + a$ is legolcsóbb utak fenyője.*

Biz. Nyilván csak az s-ből v_a-ba vezető T' beli P' útról kell belátnunk, hogy D-ben legolcsóbb. Legyen P tetszőleges sv út D-ben, és jelölje ennek (s felől indulva) első $V(T)$-ből kilépő $e = u_e v_e$ élét. P-nek az s-től u_e-ig tartó P'' részútjára érvényes, hogy $c(P'') \leq c(P)$, hiszen c nemnegatív. Az a minimális választása miatt, $c(P') \leq c(P'')$ és a lemma következik. •

A 3.32 lemmán alapuló Dijkstra módszer $n-1$ fázisból áll. s-ből kiindulva, élek egyenkénti hozzávételével felépítünk legolcsóbb utaknak egy T s-fenyőjét. Ennek érdekében fenntartunk egy k_T címkét, amely azt mondja meg, hogy az aktuális T-hez tartozó m_T érték mely $v \in V - V(T)$ pontban vétetik fel. Minden fenyőn kívüli $v \in V - V(T)$ pontra fenntartunk egy $l(v) := \min(w_n(u)+c(uv) : uv$ kilép T-ből$)$ címkét. Ezen kívül fenntartunk még egy $a(v)$ címkét is, amely azt mondja meg, hogy az $l(v)$-t meghatározó minimum mely uv élen vétetik fel. Az $l(v)$ szemléletesen azt jelenti, hogy mekkora az s-ből v-be vezető, csak $V(T)$ pontjait használó utak költségének minimuma. Evvel a jelöléssel tehát k_T az $l(v)$ minimum helye.

Ezen címkék segítségével meg tudjuk mondani, hogy melyik a élt kell a soron következő lépésben T-hez venni. Nevezetesen, vesszük a k_T-ban lévő a_v pontot és az $a(a_v)$-ben lévő $a = a_u a_v$ élt vesszük az aktuális T fenyőhöz.

Egyszerű módosításokkal kapjuk meg a keletkező T' fenyőhöz tartozó címkéket. Az $l(v)$ értékeket a következő szabály szerint módosítjuk. $l(v) := \min(l(v), l(v_a) + c(v_a v))$. Amennyiben a minimum a második tagon éretik el, az $a(v)$ címke tartalmát $v_a v$-re cseréljük. Ebben az esetben még azt is megnézzük, hogy a csökkentett $l(v)$ nem kisebb-e m_T-nél, és ha igen, akkor k_T tartalmát az aktuális v pontra cseréljük, m_T-t pedig $l(v)$-re.

Így az összes módosítás kiszámítása $O(n)$ lépést igényel, és a teljes algoritmus bonyolultsága $O(n^2)$.
•

3.5.2 KONZERVATÍV KÖLTSÉGEK

A legolcsóbb út problémája tehát viszonylag egyszerűen megoldható, ha a költségek nemnegatívok, de létezik egy még mindig jól kezelhető általánosabb eset is, amikor negatív élek ugyan előfordulhatnak, de nincsen olyan irányított kör, amelynek össz-költsége negatív (röviden: negatív kör). Az ilyen súlyozást **konzervatívnak** nevezzük. Egy nemnegatív költség-függvény például nyilvánvalóan konzervatív, éppúgy mint egy aciklikus digráf tetszőleges költség-függvénye.

Hogyan lehet hatékonyan eldönteni, hogy egy adott súlyozás konzervatív-e, és ha igen, miként határozzunk meg egy legolcsóbb utat?

TÉTEL 3.33 *Egy c súlyozás akkor és csak akkor konzervatív, ha létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$* **megengedett potenciálnak** *nevezett függvény a csúcsokon, amelyre*

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) \text{ fennáll minden } uv \text{ élre.} \tag{3.10}$$

Továbbá, ha c egészértékű, akkor π is választható annak.

1. Biz. Ha létezik megengedett potenciál, akkor bármely C irányított körre fennáll, hogy $c(C) = \sum_{i=1}^{k} c(v_i v_{i+1}) \geq \sum(\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = 0$, ami azt jelenti, hogy c konzervatív. (Itt $v_1, \ldots, v_k$ a kör pontjait jelöli, és a $v_{k+1} = v_1$ jelölési konvencióval éltünk.)

Megfordítva, tegyük fel, hogy c konzervatív. Be akarjuk látni, hogy létezik megengedett potenciál. Jelölje $\pi_j(v)$ a v-ben végződő legfeljebb j élű séták költségének a minimumát. A definícióból adódik, hogy tetszőleges uv élre

$$\pi_j(v) \leq \pi_{j-1}(u) + c(uv) \tag{3.11}$$

Állítjuk, hogy ha c konzervatív, akkor $\pi_n(v) = \pi_{n-1}(v)$ minden csúcsra (ahol n a pontszám). Ez nyilván igaz, ha egy legolcsóbb legfeljebb n élű séta legfeljebb $n-1$ élű. Ha viszont pontosan n élű, akkor biztosan tartalmaz egy C kört, amit kihagyva egy legfeljebb $n-1$ élű sétát kapunk, melynek költsége $c(C) \geq 0$-val kisebb, mint $\pi_n(v)$. Persze kisebb nem lehet, így $c(C)$ szükségképpen 0, azaz van egy $\pi_n(v)$ költségű legfeljebb $n-1$ élű séta, és így valóban $\pi_n(v) = \pi_{n-1}(v)$.

(3.11)-t használva kapjuk, hogy $\pi_n(v) \leq \pi_{n-1}(u) + c(uv) = \pi_n(v) + c(uv)$, azaz π_n megengedett potenciál, amely ráadásul egészértékű, amennyiben c az volt. •

2. Biz. Jelölje A az irányított gráf incidencia mátrixát. π pontosan akkor megengedett potenciál, ha $\pi A \leq c$. A TU márixokra vonatkozó Farkas lemma szerint, ennek akkor és csak akkor nincs egész megoldása, ha létezik olyan $0-1$ értékű x vektor, amelyre $Ax = 0$ és $cx < 0$. Legyen $F := \{e : s(e) = 1\}$. Az $Ax = 0$ feltétel azzal ekvivalens, hogy $\varrho_F(v) = \delta_F(v)$ minden $v \in V$. Ezért F felbontható élidegen irányított körök egyesítésére, melyek közül az egyik $c(F) < 0$ miatt szükségképpen negatív. •

A $\pi_n(v)$ értékeket igen könnyű kiszámítani, az alábbi rekurzió segítségével. Legyen $\pi_0(v) \equiv 0$ és $\pi_{i+1}(v) = \min[\pi_i(v), \min(\pi_i(u) + c(uv) : uv \in E)]$. Ha most a $\pi_n(v)$ megengedett potenciál immár rendelkezésünkre áll, akkor alkalmazhatjuk Dijkstra algoritmusát minimális költségű P út megkeresésére a $\bar{c}(uv) := c(uv) - \pi_n(v) + \pi_n(u)$ (nemnegatív!) költség-függvényre nézve. Ekkor P automatikusan minimális c-költségű út lesz, hiszen bármely s-ből t-be vezető út c-költségének és $\bar{c}$-költségének az eltérése ugyanaz az úttól független $\pi_n(t) - \pi_n(s)$ szám.

Feladat 3.11 *Adjunk a 3.33 tételre még egy bizonyítást, amely pontszám szerinti indukciót használ az alábbi vázlat alapján. Válasszunk ki egy tetszőleges z pontot, minden uz és zv élpárra vegyünk egy új élt u-ból z-be, amelynek költsége legyen $c(uz) + c(zu)$, majd töröljük a z pontot. A keletkező kisebb pontszámú gráfra alkalmazzunk indukciót.*

Tegyük fel, hogy az s pontból a digráf valamennyi pontja elérhető irányított úton. Jelölje $l(v)$ az s-ből v-be vezető legolcsóbb út költségét egy c konzervatív súlyozásra nézve.

Következmény 3.34 *l megengedett potenciál.*

Biz. Adjunk a digráfhoz egy új s' pontot és egy új $s's$ élt, melynek költsége legyen egy alkalmasan nagy M szám negatívja. Ekkor minden v-re a v-ben végződő legolcsóbb út s'-ben fog kezdődni. A 3.33 tétel bizonyításában láttuk, hogy ezen utak költsége megengedett potenciál. Ez viszont éppen az l függvény M-mel való eltoltja, tehát l is megengedett potenciál. •

Egy uv élt a továbbiakban **pontos**nak fogunk hívni (π-re nézve), ha (3.10)-et egyenlőséggel teljesíti. Tetszőleges π potenciál által definiált $t(uv) := \pi(v) - \pi(u)$ költség-függvényt **potenciálkülönbségnek** vagy **tenziónak** nevezünk.

Feladat 3.12 *Igazoljuk, hogy egy éleken értelmezett költség-függvény akkor és csak akkor tenzió, ha minden kör összköltsége 0.*

TÉTEL 3.35 *Konzervatív c súlyozás esetén az s-ből t-be vezető utak súlyának $l(t)$ minimuma egyenlő $\pi(t) - \pi(s)$ maximumával, ahol a maximum az összes megengedett π potenciálon veendő.*

Biz. Legyen π megengedett potenciál és P tetszőleges út s-ből t-be, melynek pontjai $v_1 = s, v_2, \ldots, v_k = t$. Ekkor $c(P) = \sum c(v_{i+1}v_i) \geq \sum(\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = \pi(t) - \pi(s)$, vagyis a tételben a min $\geq$ max irány következik.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához kell találnunk egy P st-utat és egy π megengedett potenciált, amelyekre $c(P) = \pi(t) - \pi(s)$. E célra viszont egy tetszőleges P legolcsóbb st-út és az l megengedett potenciál megfelel. •

Következmény 3.36 *Ha P olyan st-út, amely valamely megengedett π potenciálra nézve pontos élekből áll, akkor P legolcsóbb st-út.* •

Feladat 3.13 *Adott az éleken egy tetszőleges költség-függvény. Határozzunk meg egy olyan s-ből t-be vezető utat, amelyen a legnagyobb súly a lehető legkisebb.*

Feladat 3.14 *Tegyük fel, hogy az éleken két konzervatív költség-függvényünk adott: c_1 és c_2. Készítsünk algoritmust olyan st út megkeresésére, amely a c_1-re nézve minimális költségű és ezen belül c_2-re nézve minimális költségű.*

Feladat 3.15 *Igazoljuk, hogy ha egy s-ből t-be vezető P út minden éle benne van egy legolcsóbb útban, akkor P maga is legolcsóbb út.*

3.5.3 ACIKLIKUS DIGRÁFOK: A KRITIKUS UTAK MÓDSZERE

Tegyük most fel, hogy a D digráf aciklikus (azaz nem tartalmaz irányított kört) és az s pontból mindegyik másik pontba vezet út. Legyen a c súlyozás tetszőleges: ez automatikusan konzervatív. Aciklikus digráfnak mindig van olyan pontja, amelyből nem vezet ki él és ezért a pontokat olyan $v_1 = s, v_2, \ldots, v_n$ sorba lehet rendezni, hogy minden él korábbi pontból későbbibe vezessen. Egy ilyen sorrendet mélységi kereséssel lineáris időben meg tudunk találni.

A legrövidebb utak fenyőjét aciklikus digráfban még a Dijkstra algoritmusnál is egyszerűbben fel tudunk építeni, mert a pontoknak a fenyőbe kerülési sorrendje nem menetközben derül ki, hanem az előre adott sorrend lesz. Tegyük fel, hogy az első $j-1$ pont által feszített részgráfban már meghatároztuk a legolcsóbb utak egy F_{j-1} fenyőjét az $l(v_i)$ költségekkel egyetemben ($1 \leq i \leq j-1$). A sorrendben következő v_j pontra legyen $l(v_j) := \min(l(v_i) + c(v_iv_j) : v_iv_j \in E)$ és legyen $F_j := F_{j-1} + v_iv_j$, ahol a v_iv_j egy olyan él, amelyen a minimum felvétetik.

Alkalmazásokban gyakori, hogy aciklikus digráfban maximális súlyú utat kell keresni. Az is előfordul, hogy nem annyira az optimális útra vagyunk kíváncsiak, mint inkább az optimális potenciálra. Tekintsük például a következő feladatot. Egy projekt különféle részfeladatok elvégzéséből áll, melyeknek előre adott a végrehajtási ideje. Tudjuk továbbá, hogy bizonyos részfeladatoknak meg kell előzni másokat (házépítésnél az alapozás megelőzi a fürdőszoba csempézést), azaz a részfeladatok halmazán adott egy részbenrendezés. Kérdés, hogy mi az a legrövidebb idő, amely alatt a teljes projekt

elvégezhető. További elvárás megadni az egyes részfeladatok kezdési időpontját úgy, hogy minden feladat kezdésére az őt a részbenrendezésben megelőzők már elkészüljenek.

A megoldáshoz készítsünk el egy D irányított gráfot a következőképpen. Reprezentáljunk mindegyik z részfeladatot egy $u_z v_z$ irányított éllel, amelynek súlya legyen a z végrehajtási ideje. Amennyiben a z feladat megelőzi az y feladatot, úgy vegyünk be D-be egy $v_z u_y$ élt 0 súllyal. Végül adjunk a digráfhoz egy s forráspontot, amelyből minden u_x pontba vezessünk 0 súlyú élt, és adjunk egy t pontot, amelybe minden v_x pontból vezessünk 0 súlyú élt. Feladatunk olyan $\pi(v)$ időpontok kijelölésével ekvivalens, amelyekre $\pi(s) = 0$, $\pi(t)$ minimális és minden uv élre a $\pi(v) - \pi(u)$ időpontkülönbség legalább akkora, mint az él súlya. Ha most mindent negálunk, akkor aciklikus irányított gráfról lévén szó konzervatív súlyozást kapunk. Így a 3.35 tétel alkalmazásával rögtön kapjuk, hogy *a projekt végrehajtásának minimális ideje egyenlő a legsúlyosabb út súlyával.* Egy ilyen utat szoktak néha kritikus útnak nevezni, és az előzőekben leírt minimális út problémának az itteni feladatra adaptált változatát kritikus út módszernek (angolul PERT: project evaluation and review technique).

Tudunk tehát részbenrendezett halmazban maximális súlyú láncot keresni. Ezt alkalmazhatjuk a következő feladatokban.

Gyakorlat 3.16 *Adott egy út bizonyos részútjainak $\mathcal{F}$ rendszere. Válasszunk ki $\mathcal{F}$-nek diszjunkt tagjait úgy, hogy az összhosszuk maximális legyen.*

Feladat 3.17 *Adott két betűkből álló sorozat. Válasszunk ki algoritmikusan egy maximális sok tagból álló közös részsorozatot. A feladat még akkor is megoldható, ha az egyes betűknek különböző súlya van és a kiválasztott közös részsorozatban lévő betűk súlyösszegét akarjuk maximalizálni.*

Feladat 3.18 *Igazoljuk algoritmikusan, hogy egy P részbenrendezett halmazban a leghosszabb lánc elemszáma egyenlő a P-t fedő antiláncok minimális számával!*

Feladat 3.19 *Határozzuk meg algoritmikusan egy véges sorozat legtöbb tagból álló monoton növekvő részsorozatát!*

Feladat 3.20 *Igazoljuk, hogy egy $nm + 1$ különböző tagokból álló számsorozatnak vagy van $n + 1$ tagú monoton növő vagy egy $m + 1$ tagú monoton csökkenő részsorozata! Létezhet mind a két fajta részsorozat?*

3.6 A MAGYAR MÓDSZER

A 3. fejezetben megmutattuk, hogy a lineáris programozás dualitás tételének teljesen unimoduláris feltételi mátrixok esetén miként vezet el Kőnig tételéhez és annak általánosításaihoz. Jelen célunk a Kőnig tételre és súlyozott kiterjesztésére algoritmikus bizonyítást adni.

TÉTEL 3.37 (Kőnig Dénes) *$G = (A, B; E)$ páros gráfban a független élek maximális ν száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával.*

Biz. Minden gráfra érvényes, hogy $\nu \leq \tau$, hiszen k darab független élt nem lehet k-nál kevesebb ponttal lefogni. (Mellékesen megjegyezzük, hogy nem-páros gráfokra az egyenlőség nem feltétlenül teljesül, amint azt a háromszög vagy bármely páratlan kör példája mutatja.)

Páros gráf esetén az egyenlőség igazolásához konstruálunk egy M párosítást és egy L lefogást, melyek elemszáma ugyanaz. Az eljárás tetszőleges M párosításból indul ki, ami kezdetben az üres halmaz is lehet. Az általános lépésben vagy találunk egy nagyobb párosítást és ekkor a nagyobb párosításra vonatkozóan újra kezdjük az eljárást, vagypedig egy $|M|$-mel megegyező elemszámú lefogást, amikoris az algoritmus végetér.

Irányítsuk meg M éleit A-ból B felé, míg az összes többi élt fordítva. Jelölje S illetve T a B-ben illetve A-ban M által fedetlen pontok halmazát. Jelölje Z az S pontjaiból a kapott irányított gráfban elérhető pontok halmazát. Amennyiben T-nek esik pontja Z-be, akkor megkaptunk egy olyan S-t és T-t összekötő P utat, amely M-ben alternál. Most M és P szimmetrikus differenciája egy M-nél eggyel több élből álló M' párosítás. (Technikailag az eljárást nagyon egyszerű végrehajtani: a megtalált út éleinek irányítását egyszerűen megfordítjuk. Az így kapott irányított gráf éppen az, amit G-ből kapunk az M' éleinek A-ból B felé, és a többi élnek B-ből A felé történő irányításával.)

Tegyük most fel, hogy T diszjunkt Z-től. Z definíciója folytán Z-ből nem vezet ki irányított él. Érvényes továbbá, hogy Z-be nem lép be megirányított $uv \in M$ párosítás él, mert hiszen v csak u-n keresztül érhető el, így v csak akkor lehetett irányított úton elérhető S-ből, ha u is az volt.

Következik, hogy az $L := (A \cap Z) \cup (B - Z)$ halmaz lefogja az összes élt, továbbá minden M-beli élnek pontosan az egyik végpontját tartalmazza, tehát $|M| = |L|$. •

A fenti bizonyítás egyúttal hatékony algoritmust is jelent a szóbanforgó optimumok meghatározására. A lépésszám megbecsléséhez figyeljük meg, hogy legfeljebb $n/2$ alkalommal kell utat keresnünk. Miután egyetlen út megkeresése az élszámmal arányos időben történhet az össz-lépésszám nem nagyobb, mint $O(nm)$ (ahol n a gráf pontszáma, míg m az élszáma).

TÉTEL 3.38 (M. Hall) *Egy $G = (A, B; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha minden $X \subseteq A$ részhalmazra teljesül a Hall féle $|\Gamma(X)| \geq |X|$ feltétel, ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon B-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja X-ben.*

Biz. Nyilván $\nu \leq |A|$. Ha $\nu = |A|$, akkor egy ν elemű párosítás fedi A minden pontját. Ha $\nu < |A|$, akkor Kőnig tétele nyomán létezik egy L lefogás, melynek $|A|$-nál kevesebb eleme van. De ekkor $X := A - L$-nek minden szomszédja $B \cap L$-ben van, és $|A - L| < |B \cap L|$, vagyis X megsérti a Hall féle feltételt. •

Tételezzük most fel, hogy a páros gráf élein adott egy $c \geq 0$ (nem feltétlenül egészértékű) súlyfüggvény. Súlyozott párosításokra vonatkozóan több kérdést is feltehetünk. Például keressünk maximális súlyú párosítást, adott k-ra maximális súlyú k élű párosítást, maximális súlyú teljes párosítást, minimális súlyú teljes párosítást. Most ezek közül a maximális súlyú teljes párosítás kérdését vizsgáljuk meg és ehhez feltesszük, hogy G-nek van **teljes** (azaz minden pontot fedő) párosítása. A lefogás általánosításaként nevezzünk egy pontokon értelmezett π függvényt **súlyozott lefogásnak,** ha minden uv élre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$. Egy élt **pontosnak** fogunk nevezni (π-re nézve), ha itt egyenlőség áll. A π súlyozott lefogás $\pi(V)$ **súlyán** a $\sum(\pi(v) : v \in A \cup B)$ összeget értjük. (Itt $V = A \cup B$).

Amennyiben Q jelöli a gráf pont-él incidencia mátrixát, úgy a $\max\{cx : Qx = 1, x \geq 0\}$ lineáris program egészértékű megoldásai automatikusan $0-1$ értékűek, azaz éppen a teljes párosítások incidencia vektorai. A $\{\pi : \pi A \geq c\}$ duális poliéder egy eleme éppen egy súlyozott lefogás. Az alábbi tétel, (amely nem más, mint a 3.13 tétel) tartalma az, hogy a primál optimum mindig egészen vektoron felvétetik (c egészértékűségétől függetlenül), míg a duál optimum egészértékű c esetén egész vektoron felvétetik.

TÉTEL 3.39 (Egerváry) *A teljes párosítások maximális ν_c súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális τ_c súlyával. Amennyiben c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.*

Biz. Legyen $M := \{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\}$ tetszőleges teljes párosítás G-ben, és π egy súlyozott lefogás. Ekkor $c(M) := \sum c(u_iv_i) \leq \sum(\pi(u_i) + \pi(v_i) : i = 1, \ldots, n) = \pi(V)$, amiből $\nu_c \leq \pi_c$ következik. Itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha M minden éle pontos.

A fordított irányú egyenlőtlenség bizonyításához tehát kell találnunk egy π súlyozott lefogást úgy, hogy a π-re vonatkozó pontos élekből álló részgráf tartalmazzon teljes párosítást. Ennek érdekében kiindulunk egy tetszőleges π súlyozott lefogásból (amely egészértékű, amennyiben c az). Például legyen π a B pontjaiban 0, míg bármely A-ban levő v pontra $\pi(v)$ legyen a v-be futó élek súlyának maximuma.

Az általános lépésben tekintjük a pontos élek által (a V ponthalmazon) alkotott G_π részgráfot. Az előzőekben leírt algoritmus segítségével határozzunk meg G_π-nek egy maximális elemszámú M párosítását. A fent bevezetett jelölést használjuk: S illetve T a B-beli illetve az A-beli (M által) fedetlen pontok halmazát jelöli, míg Z a szóbanforgó irányított gráfban az S-ből elérhető pontok halmazát.

Amennyiben M teljes párosítás, úgy célunkat elértük, mert megkaptunk egy pontos élekből álló teljes párosítást. Ekkor tehát az algoritmus végetér (és a tétel bizonyítása is). Tegyük fel, hogy M nem teljes párosítás. A π értékeit csökkentsük $A - Z$ elemein egy bizonyos Δ pozitív számmal, és növeljük $B - Z$ elemein ugyanazzal a Δ-val, ahol $\Delta := \min(\pi(u) + \pi(v) - c(uv) : uv \in E, u \in A - Z, v \in B \cap Z)$. Amennyiben G-nek nincs olyan uv éle, amelyre $u \in A - Z, v \in B \cap Z$, azaz a minimumot az üres halmazon vesszük, úgy G-nek nincs teljes párosítása, hiszen az $A - Z$ halmaz megsérti a Hall féle feltételt.

A konstrukció miatt Δ pozitív (merthogy nincs pontos él $A - Z$ és $B \cap Z$ között), és a módosított π' is súlyozott lefogást alkot. Érvényes továbbá, hogy a $G_{\pi'}$ és M-hez tartozó irányított gráfban (:M-beli élek B felé irányítva, a többi él A felé) Z minden eleme továbbra is elérhető és még legalább egy új pont is A-ban, nevezetesen egy olyan élnek a végpontja, amelyen a Δ-t definiáló minimum felvétetik (merthogy ez az él a módosított π'-re nézve már pontos lesz).

Ezen meggondolásból következik, hogy π-nek legfeljebb n változtatása után az aktuális pontos élek gráfjában a ν megnő. Legfeljebb n ilyen növekedés után kapunk egy pontos élekből álló teljes párosítást, ami a célunk volt. Az algoritmus lépésszáma $O(n^2m)$. •

Feladat 3.21 *Igazoljuk, hogy ha egy M párosítás valamely π súlyozott lefogásra nézve pontos élekből áll, akkor M az összes vele megegyező elemszámú párosítások közül maximális súlyú!*

3.7 A NÖVELŐ UTAK MÓDSZERE

Korábban a Hoffman tételre támaszkodva bebizonyítottuk a Maximális-folyam Minimális-vágás (3.29) tételt. A bizonyítás első feléből kiolvasható, hogy egy x folyam maximális nagyságú, amennyiben létezik egy olyan S $s\bar{t}$-halmaz, amelyre teljesülnek az alábbi **optimalitási feltételek.**

(a) $x(a) = g(a)$ minden a élre, amely kilép S-ből, és
(b) $x(a) = 0$ minden a élre, amely belép S-be.

Jelen célunk egy ilyen x folyam és S halmaz algoritmikus megkeresése. Ezt először csak egészértékű (illetve racionális) g kapacitás függvény esetén tesszük meg, majd tetszőleges g-re. Az eljárás egyúttal új bizonyítást ad a 3.29 tételre.

A Fordtól és Fulkersontól származó algoritmus tetszőleges x megengedett st-folyamból indul ki (például $x \equiv 0$), és azt iteratívan javítja. Készítsünk el egy $D_x = (V, A_x)$ digráfot a következőképp. Egy uv él A_x-hez tartozik, ha vagy (i) $uv \in A$ és $x(uv) < g(uv)$, és ekkor ezen élét D_x-nek **előre** élnek hívjuk, vagy (ii) $vu \in A$ és $x(vu) > 0$, és ekkor uv neve **hátra** él. Jelölje S az s-ből D_x-ben elérhető pontok halmazát.

1. Eset *$t \notin S$, azaz t nem érhető el s-ből.* Mivel D_x semelyik éle sem lép ki S-ből, az (a) és (b) optimalitási feltételek teljesülnek és az algoritmus végetér: az adott x folyam nagysága egyenlő $\delta_g(S)$-sel.

2. Eset *$t \in S$, azaz t elérhető s-ből.* Legyen P tetszőleges s-ből t-be vezető irányított út D_x-ben.

Legyen $\Delta_1 := \min(g(uv) - x(uv) : uv$ előre éle P-nek) és $\Delta_2 = \min(x(v,u) : uv$ hátra éle P-nek). Legyen $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$. Ekkor Δ pozitív. Nevezzük P egy élét **kritikusnak,** ha Δ ezen az élen éretik el.

Módosítsuk x-t a következőképp. Ha uv előre éle P-nek, növeljük $x(uv)$-t Δ-val. Ha uv hátra éle P-nek, csökkentsük $x(vu)$-t Δ-val. Könnyen látható, hogy a módosított x' megengedett folyam lesz, amelynek nagysága Δ-val nagyobb, mint x-é. Következésképp, ha g egészértékű, akkor a 2. eset csak véges sokszor fordulhat elő, vagyis véges sok növelés után az 1. eset következik be, amikor is az algoritmus véget ér. Tehát egész kapacitások esetén új bizonyítást kaptunk az MFMC tételre. •

Amennyiben g racionális, a nevezők legkisebb közös többszörösével a kapacitásokat végigszorozva visszajutunk az egész kapacitású esethez. Ha viszont g irracionális, akkor a fenti eljárás nem biztosan ér véget véges sok lépésben (amint az példával demonstrálható). Másik hátrány, hogy még egész kapacitások esetén is az iterációk száma arányos lehet az előforduló legnagyobb kapacitás nagyságával. Így az algoritmus bonyolultsága az input méretének exponenciális függvényével arányos, azaz nem polinomiális. (Egy szám nagysága a jegyei számának exponenciális függvénye.)

3.7.1 SKÁLÁZÁSI TECHNIKA

Az alábbiakban bemutatunk egy igen ügyes fogást, amelynek segítségével bizonyos eljárásokat polinomiális futásidejűvé lehet tenni. Használatát a maximális folyam problémán szemléltetjük, mert ott igen egyszerű, de számos alkalommal bonyolultabb körülmények között is használható.

Tételezzük fel, hogy a kapacitások egész számok és kettes számrendszerben vannak megadva. A legnagyobb kapacitás álljon M jegyből. Összesen M darab folyam problémát fogunk megoldani, mindegyikben a megelőzően megkapott maximális folyamot használjuk kiindulási folyamként. Jelölje g_i azt a kapcitás függvényt, amely úgy áll elő, hogy minden élen az eredeti kapacitásnak (balról) az első i jegyét tekintjük, míg a többit eltöröljük. Tegyük fel, hogy a g_i kapacitás függvényre nézve már meghatároztuk az x_i maximális folyamot. Ekkor $2x_i$ megengedett folyam a g_{i+1}-re nézve. A $2x_i$-ből kiindulva alkalmazzuk a fent leírt növelő út módszert a g_{i+1} kapacitás függvényre vonatkozólag.

Miután minden e élre $g_{i+1}(e)$ értéke vagy $2g_i(e)$ vagy $2g_i(e) + 1$, legfeljebb élszámnyi növelés után megkapjuk az x_{i+1} maximális folyamot (a g_{i+1}-re nézve). Összesen tehát legfeljebb $M|A|$ növelés segítségével megkonstruáltunk egy eredeti kapacitásokra vonatkozó maximális folyamot.

3.7.2 LEGRÖVIDEBB NÖVELŐ UTAK

A fenti eljárás hátránya, hogy csak egész (és így racionális) kapacitásokra működik. Vagyis általános kapacitások esetén még mindig nincs konstruktív bizonyításunk az MFMC tételre. Ezen nehézség leküzdésére J. Edmonds and R. Karp [1972] és E.A. Dinitz [1970] javasolták, hogy minden iterációban a legkisebb élszámú növelő utat válasszuk. Ez az egyszerű megszorítás lehetővé teszi, hogy a Ford-Fulkerson algoritmus bonyolultságát $|V|$ és $|A|$ polinomjával korlátozzuk, függetlenül a kapacitások nagyságától. (Ezt persze úgy értve, hogy a számokkal végzett alapműveleteket egyetlen lépésnek tekintjük.)

Jelölje $\sigma_x(v)$ a v távolságát D_x-ben s-től. (Ha nincs egyáltalán s-ből v-be út, akkor $\sigma_x(v) = \infty$). Legyen P egy legrövidebb út D_x-ben s-ből t-be. Ekkor P mindegyik uv élére, $\sigma_x(v) = \sigma_x(u) + 1$.

Lemma 3.40 *Amikor P mentén végrehajtunk egy növelést, a $\sigma_x(v)$ érték semmilyen v-re sem csökken.*

Biz. Nézzük meg milyen hatással van a növelés a D_x segédgráfra. Mivel a folyamot D-nek csak olyan élein változtattuk, melyek P éleinek felelnek meg, D_x csupán P éleinél változhat. Éspedig, D'_x lehetséges új élei P élei megfordítva, ugyanakkor P kritikus élei (ahol Δ felvétetik) eltűnnek D_x-ből. A v pont s-től való távolsága csak akkor csökkenhetne, ha olyan uw éleket adnánk a segédgráfhoz, melyekre $\sigma_x(w) > \sigma_x(u) + 1$, amiből a lemma következik. •

A növelések sorozatát fázisokra bontjuk. Egy fázis során $\sigma_x(t)$ ugyanaz marad. A lemma szerint legfeljebb $|V| - 1$ fázis lehetséges.

Lemma 3.41 *Egy fázison belül legfeljebb $|A|$ növelésre kerülhet sor.*

Biz. Jelölje $\sigma_i(v)$ a v pont távolságát s-től az i fázis kezdetén az aktuális segédgráfban. Nevezzünk egy uv élt i-**szorosnak,** ha $\sigma_i(v) = \sigma_i(u) + 1$. Az i-dik fázis során csupán i-szoros éleket használunk. Tudjuk, hogy egy növelés legalább egy i-szoros élt eltüntet az aktuális segédgráfból és nem hoz be új i-szoros élt. Mivel a segédgráfnak legfeljebb $|A|$ darab i-szoros éle van, a lemma következik. •

Mindezeket összetéve kapjuk, hogy legfeljebb $|V||A|$ növelésre van szükségünk. Egyetlen növelés $O(|A|)$ lépést igényel, így az algoritmus össz-bonyolultsága $O(|V||A|^2)$.

Miután a fenti algoritmusban választási lehetőségünk lehet a legrövidebb növelő út meghatározásában, a végül kapott maximális folyam függhet ezen választásoktól. Nem így a végső S!

Feladat 3.22 *(a) A végül kapott minimális $\delta^+(S)$ vágás független az algoritmus futásától. (b) Ha X és Y minimalizálja az $\delta_g(Z)$ értéket az összes $s\bar{t}$-halmazra, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is minimalizáló $s\bar{t}$-halmazok. (c) A minimalizáló halmazok metszete S.*

Feladat 3.23 *Adott e élre hogyan lehet eldönteni, hogy (a) létezik-e olyan maximális folyam, amely telíti e-t, (b) minden maximális folyam telíti e-t.*

Feladat 3.24 *Algoritmikusan határozzuk meg az összes $\{x, y\}$ rendezett csúcspárt, amelyre létezik olyan X halmaz, hogy $s, x \in X, y \in V - X$ és X minimális vágást határoz meg.*

3.8 MINIMÁLIS KÖLTSÉGŰ FOLYAMOK

Legyen adva $D = (V, A)$ irányított gráf az s forrás- és a t nyelőponttal. Adott még az éleken a g nemnegatív kapacitás függvény és a c nemnegatív költségfüggvény. Feltesszük, hogy g egészértékű. Korábban már láttuk, hogy miként lehet egy maximális M nagyságú s-ből t-be vezető folyamot polinom időben kiszámítani. Most minden 0 és M közé eső k egészre szeretnénk találni egy olyan k nagyságú folyamot, melynek költsége minimális. Egy z folyam **költségét** a $cz = \sum(c(e)z(e) : e \in A)$ skaláris szorzattal definiáljuk. Azt mondjuk, hogy a z st-folyam **minimális költségű folyam,** ha z a legkisebb költségű a megengedett, z-vel azonos nagyságú st-folyamok közül.

Az alábbiakban ismertetjük Ford és Fulkerson [1962] algoritmusát. Legyen $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény a V-n, amelyre $\pi(s) = 0 \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ minden $v \in V$-re. Ilyen függvényt **potenciálnak** hívunk. Használni fogjuk a következő jelölést. $\bar{c}(uv) = c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$, ahol $uv \in A$. Potenciálok segítségével egy z folyam cz költségére az alábbi alsó korlátot nyerhetjük.

$\sum c(uv)z(uv) = \sum(\pi(v) - \pi(u))z(uv) + \sum \bar{c}(uv)z(uv) = \pi(t)k + \sum(\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) < 0) + \sum(\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) > 0) \geq \pi(t)k + \sum \bar{c}(uv)g(uv) + 0.$

Ebből következik, hogy egy z folyam bizonyosan minimális költségű, amennyiben létezik olyan π potenciál, amelyre az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Ez pontosan akkor van így, ha fennáll a következő két optimalitási feltétel.

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \tag{i}$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \tag{ii}$$

[Tetszőleges π potenciálra a $\pi(v) - \pi(u)$ potenciál különbség egy semleges költségfüggvényt definiál az élhalmazon abban az értelemben, hogy minden k nagyságú folyamnak ugyanaz a költsége, éspedig $k(\pi(t) - \pi(s))$. Így, ha a c költségfüggvényt egy potenciál különbséggel eltoljuk, akkor a kapott $\bar{c}(uv) := c(uv) - (\pi(v) - \pi(u))$ költségfüggvény ekvivalens az eredetivel. Ennek alapján az optimalitási feltételeket úgy is lehet interpretálni, hogy egy z folyam akkor és csak akkor minimális költségű, ha létezik egy olyan $\bar{c}$ ekvivalens költségfüggvény, amely ha egy uv élen pozitív, úgy a folyam a minimumon van, azaz $z(uv) = 0$, míg ha $\bar{c}(uv)$ negatív, úgy a folyam a maximumon van, azaz $z(uv) = g(uv)$.]

Ford és Fulkerson módszere a maximális folyam kiszámítására vonatkozó Ford-Fulkerson algoritmus finomításának tekinthető. Minden lehetséges egész k értékre megkonstruálunk egy minimális költségű k nagyságú folyamot. Az eljárás az azonosan nulla folyammal és az azonosan nulla potenciállal indul. Ezután a folyam nagyságát növeljük egyenként, illetve menetközben néha a potenciált növeljük úgy, hogy az optimalitási feltételek végig fennállnak. Az algoritmus akkor ér véget, amikor maximális nagyságú folyamot illetve egy minimális vágást kaptunk.

ITERATÍV LÉPÉS Az általános helyzetben adott a z folyam és a π potenciál, és ezek kielégítik az (i) és (ii) feltételeket. Megkonstruálunk egy $D' = (V, A')$ segédgráfot a következőképpen. D'-nek kétféle éle van: előre és hátra. Egy uv él **előre él,** ha $uv \in A, \bar{c}(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Egy uv él **hátra él,** ha $vu \in A, \bar{c}(vu) = 0$ és $z(vu) > 0$.

Legyen S az s-ből D'-ben irányított úton elérhető pontok halmaza. Két eset lehet.

1. Eset $t \notin S$, *azaz* t *nem elérhető* s*-ből.*

Legyen $\varepsilon_1 = min(\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(S), z(uv) < g(uv))$ és $\varepsilon_2 = min(-\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(V - S), z(uv) > 0)$, ahol az üres halmazon vett minimumot ∞-nek definiáljuk. Legyen $\varepsilon = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Az optimalitási feltételek és az S definíciója miatt ε pozitív.

Amennyiben $\varepsilon = \infty$, akkor az algoritmus végetér. Ebben az esetben az S-ből kilépő eredeti élek mind telítettek, míg az S-be belépő eredeti élek mindegyikén a folyam nulla. Így tehát $\delta_g^+(S) = val(z)$, az aktuális z folyam maximális nagyságú és az S-ből kilépő élek halmaza minimális vágást határoz meg.

Legyen most $\varepsilon < \infty$, és módosítsuk π-t úgy, hogy minden $v \in V - S$-re növeljük $\pi(v)$-t ε-nal. Az S és az ε definíciójából rögtön kapjuk:

Állítás 3.42 *A módosított potenciál és a változatlanul hagyott z folyam kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Készítsük el az új segédgráfot és ismételjük meg az eljárást. Figyeljük meg, hogy a segédgráfban a régi S által feszített élek változatlanok maradnak és ezért az s-ből elért pontok halmaza szigorúan bővebb lesz, mint S. Ezért az 1. eset legfeljebb $|V|-1$-szeri előfordulása után biztosan vagy az $\varepsilon = \infty$ következik be, vagypedig az alábbi 2. eset.

2. Eset *$t \in S$, vagyis t elérhető s-ből.* Legyen P a D'-ben egy s-ből t-be vezető irányított út. Módosítsuk z-t a következőképpen. Legyen $z'(uv) = z(uv) + 1$, ha uv a P-nek előre éle és legyen $z'(uv) = z(uv) - 1$, vu a P-nek hátra éle.

A módosításból adódik:

Állítás 3.43 *A módosított folyam és változatlanul hagyott potenciál kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Ezzel az algoritmus leírását be is fejeztük. Mi mondható az eljárás futásidejéről? Lényegében M darab növelésre van szükségünk (2. eset), így az eljárás polinomimális, amennyiben mind az M minimális költségű folyamot meg kell határoznunk.

Elképzelhető persze olyan helyzet is, amikor például csak egy maximális nagyságú minimális költségű folyamot kell kiszámítanunk. Ebben az esetben az algoritmus természetesen nem biztosan polinomiális, hiszen lépésszáma az M nagyságával arányos. De még ebben az esetben is két fontos speciális eset kezelhető.

Ha a legnagyobb kapacitás nem túlságosan nagy (nevezetesen, ha $|V|$ polinomjával korlátozható), akkor a fenti eljárás nyilván polinomiális, függetlenül attól, hogy a c költség-függvény egészértékű-e vagy sem.

Tegyük most fel, hogy a kapacitások tetszőlegesek, a költség-függvény egészértékű és "kicsi". Ekkor az algoritmus következő módosítása erősen polinomiális algoritmust eredményez. Tekintsük az algoritmus egy közbenső helyzetét, amikor egy π potenciál rendelkezésre áll. A szoros élek digráfjában (egy uv él **szoros,** ha $\bar{c}(uv) = 0$) számítsunk ki (a Max-flow Min-cut algoritmusssal) egy maximális nagyságú z folyamot és egy S minimális ki-kapacitású $s\bar{t}$-halmazt. Ha D-ben minden S-be belépő és S-ből kilépő él szoros, akkor S minimális vágást határoz meg és az aktuális z folyam maximális nagyságú, amely kielégíti az optimalitási feltételeket. Ebben az esetben az algoritmus véget ér.

Amennyiben D-nek létezik nem-szoros éle, amely S-be be- vagy kilép, akkor ε, ahogy azt fentebb az 1. esetnél kiszámítottuk, véges lesz. Módosítsuk π-t úgy, mint az előbb, azaz minden $v \in V - S$-re növeljük $\pi(v)$-t ε-nal.

Azt állítjuk, hogy a $\pi(t)$ érték a D digráf valamely (irányítatlan értelemben vett) s-ből t-be vezető útjának a költsége. Valóban, minden folyam-növeléskor a segédgráfban van olyan st út, amely szoros élekből áll.

Következik, hogy a különböző $\pi(t)$ értékek száma (vagyis az 1. eset előfordulásainak száma) felülről korlátozható az élek össz-költségével. Tehát az eljárás polinomiális, ha a c egészértékű és legnagyobb értéke $|V|$ polinomjával korlátozható.

Van olyan példa (sorozat), amely azt mutatja, hogy ha c-nek csak az egészértékűségét tesszük fel, akkor az algoritmus nem polinomiális.

Feladat 3.25 *Igazoljuk, hogy tetszőleges c esetén a fenti algoritmus véges sok lépésben véget ér.*