1. Fejezet

OPTIMALIZÁLÁS GRÁFOKON

1.1 ALGORITMUSOK HATÉKONYSÁGÁRÓL

TÉTEL 1.1.1 Egy $G = (V, E)$ gráf pontjainak akkor és csak akkor létezik jó 2-színezése, ha a gráfban nincs páratlan élszámú (röviden páratlan) kör.

TÉTEL 1.1.2 Egy $G = (V, E)$ gráf pontjainak akkor és csak akkor létezik jó 3-színezése, ha az éleinek van olyan aciklikus irányítása, amelyben minden irányított út hossza legfeljebb 2.

1.2 GRÁFOK BEJÁRÁSA: ELÉRHETŐSÉG

TÉTEL 1.2.1 Jelölje S a $D = (V, A)$ digráfban azon csúcsok halmazát, amelyek az s csúcsából elérhetők. Ekkor S minden valódi, s-t tartalmazó S' részhalmazából vezet ki él, de S-ből nem. Továbbá létezik S-t feszítő s-fenyő.

1.2.1 Szélességi keresés

1.2.2 Mélységi keresés

1.3 LEGRÖVIDEBB SÉTÁK ÉS UTAK

1.3.1 Nemnegatív költségek: Dijkstra algoritmusa

Lemma 1.3.1 Legyen T egy legolcsóbb utak s-fenyője és tegyük fel, hogy az $m_T := \min\{w_n(u) + c(uv) : uv \text{ kilép } T\text{-ből}\}$ minimum valamely $a = u_a v_a$ élen vétetik fel. Ekkor $T' := T + a$ is legolcsóbb utak s-fenyője.

1.3.2 Aciklikus digráfok: a kritikus út módszere

TÉTEL 1.3.1 Legyen $c : A \to \mathbf{R}$ a $D = (V, A)$ aciklikus irányított gráf élhalmazán egy tetszőleges költségfüggvény, és tegyük fel, hogy az s pontból minden pontba vezet irányított út. Az s-ből t-be vezető utak költségének minimuma egyenlő a $\max\{\pi(s) - \pi(t) : \pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), uv \in A\}$ értékkel.

Ütemezés

TÉTEL 1.3.2 Legyen $c : A \to \mathbf{R}$ a $D = (V, A)$ aciklikus irányított gráf élhalmazán egy tetszőleges súlyfüggvény, és tegyük fel, hogy az s pontból minden pontba vezet irányított út. Ekkor

$$\min\{\pi(t) - \pi(s) : \pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), uv \in A\} = \max\{c(P) : P \text{ út } s\text{-ből } t\text{-be}\}. \tag{1.1}$$

1.3.3 Konzervaív költségek, megengedett potenciálok

TÉTEL 1.3.3 A $D = (V, A)$ irányított gráf éleinek egy c súlyozása akkor és csak akkor konzervaív, ha létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ **megengedett potenciál**nak nevezett függvény a csúcsokon, amelyre

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) \text{ fennáll minden } uv \text{ élre.} \tag{1.2}$$

Továbbá, ha c egészértékű, akkor π is választható annak.

TÉTEL 1.3.4 A $D = (V, A)$ digráf élhalmazán adott két korlátozó függvény: $c_{al} \leq c_{fel}$. Akkor és csak akkor létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektor (amely ráadásul egészértékű, ha c_{al} és c_{fel} is az), amelyre $c_{al}(uv) \leq \pi(v) - \pi(u) \leq c_{fel}(uv)$ minden $e = uv$ élre, ha a c'-vel élsúlyozott $D' = (V, A')$ segédgráfban nincsen negaív kör, ahol uv akkor eleme A'-nek, ha vagy $uv \in A$ és ekkor $c'(uv) := c_{fel}(uv)$, vagy $vu \in A$ és ekkor $c'(uv) := -c_{al}(vu)$.

Következmény 1.3.5 l_c megengedett potenciál.

TÉTEL 1.3.6 Konzervaív c költségfüggvény esetén az s-ből t-be vezető utak költségének $l_c(t)$ minimuma egyenlő a $\pi(t) - \pi(s)$ érték maximumával, ahol a maximum az összes megengedett π potenciálon veendő. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális π is választható annak.

Következmény 1.3.7 Ha P olyan st-út, amely valamely megengedett π potenciálra nézve pontos élekből áll, akkor P legolcsóbb st-út. •

1.4 MINIMÁLIS KÖLTSÉGŰ FÁK

1.4.1 Fák

TÉTEL 1.4.1 A G gráf valamely T feszítő fájára az alábbiak ekvivalensek:
(a) T minimális költségű,
(b) $c(e) \leq c(f)$ fennáll minden $e \in T$ élre, ahol f az e alapvágásának egy eleme,
(c) $c(e) \geq c(f)$ fennáll minden $e \notin T$ élre, ahol e az f alapkörének egy eleme. •

TÉTEL 1.4.2 Az algoritmus által talált végső feszítő F fa minimális költségű.

1.5 A MAGYAR MÓDSZER

1.5.1 Maximális elemszámú párosítások

TÉTEL 1.5.1 (Kőnig) Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.

1.5.2 A Kőnig tétel ekvivalens alakja

TÉTEL 1.5.2 (Kőnig-Hall) $G = (S, T; E)$ páros gráfban $\varphi = \mu$, azaz egy párosítás által fedetlenül hagyott S-beli pontok minimális száma egyenlő az S részhalmazainak maximális hiányával. Speciálisan, akkor és csak akkor létezik S-t fedő párosítás, ha nincs hiányos halmaz, azaz teljesül a Hall-féle feltétel:

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ minden } X \subseteq S \text{ részhalmazra. } \bullet \tag{1.3}$$

TÉTEL 1.5.3 Kőnig alternáló utas algoritmusa által szolgáltatott (??)-beli H max-hiányú halmaz az egyértelmű legszűkebb max-hiányú halmaz (és így nem függ az algoritmus futása közben tett választásoktól).

1.5.3 Maximális súlyú teljes párosítások

TÉTEL 1.5.4 (Egerváry) A $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c : E \rightarrow \mathbf{Z}_+$ nemnegatív, egészértékű súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás ν_c súlya egyenlő az egészértékű súlyozott lefogások minimális τ_c összértékével. Amennyiben G teljes páros gráf, úgy az optimális súlyozott lefogás választható nemnegatívnak is.

1.5.4 Egerváry algoritmusa

TÉTEL 1.5.5 (Egerváry) A $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c : E \rightarrow \mathbf{R}$ súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás ν_c súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális τ_c összértékével. Amennyiben c egészértékű, úgy az optimális súlyozott lefogás is választható annak. •

TÉTEL 1.5.6 Amennyiben az Egerváry algoritmus futtatásakor a szóbanforgó π súlyozott lefogás javítására a Kőnig algoritmus által szolgáltatott egyértelmű legszűkebb max-hiányú X halmazt használjuk, úgy az algoritmus polinomiális futásidejű.

1.5.5 Kuhn Magyar Módszere

1.5.6 Maximális súlyú párosítások

TÉTEL 1.5.7 Egy $G' = (S', T'; E')$ páros gráfban nemnegatív c súlyfüggvény esetén a párosítások maximális ν'_c súlya egyenlő a nemnegatív (!) súlyozott lefogások minimális τ'_c súlyával. Amennyiben c egészértékű, az optimális π'_c is választható egészértékűnek.

1.6 ÁRAMOK ÉS FOLYAMOK HÁLÓZATOKBAN

1.6.1 Fogalmak

Áramok

Folyamok

1.6.2 Motivációk

A szállítási probléma

Élidegen utak

Az irányított kínai postás probléma

1.6.3 Megengedett áramok

TÉTEL 1.6.1 (Hoffman, 1960) A $D = (V, A)$ digráfban adott $f \leq g$ kapacitásfüggvényekre vonatkozólag akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{1.4}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (1.4) fennáll, úgy létezik egészértékű megengedett áram is.

1.6.4 Szintező algoritmus megengedett áramok keresésére

Következmény 1.6.2 Amennyiben az algoritmus futása a **(B)** módon fejeződik be, úgy az (??) által definiált Z halmaz a legnagyobb mértékben sérti meg a Hoffman-féle (1.4) feltételt, azaz minden $X \subseteq V$-re $\varrho_f(Z) - \delta_g(Z) \geq \varrho_f(X) - \delta_g(X)$.

1.6.5 Áramok és folyamok kapcsolata

TÉTEL 1.6.3 (Maximális-Folyam Minimális-Vágás) A $D = (V, A)$ irányított gráfban akkor és csak akkor létezik a g kapacitásra vontakozó k nagyságú megengedett folyam, ha minden S $s\bar{t}$-halmazra $\delta_g(S) \geq k$. Ha e feltétel teljesül, g egészértékű és k egész, úgy a folyam is választható egészértékűnek.

TÉTEL 1.6.4 A megengedett st-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\delta_g(S)$ értékek minimumával, ahol a minimum az összes $s\bar{t}$-halmazra megy. Ha g egészértékű, úgy a maximum egészértékű folyamon is felvétetik.

Hoffman tétele az MFMC tételből

1.7 MAXIMÁLIS FOLYAM ALGORITMUSOK

1.7.1 A növelő utak módszere

1.7.2 Skálázási technika

1.7.3 Legrövidebb növelő utak

TÉTEL 1.7.1 Ha a Ford-Fulkerson féle növelő utas algoritmusban mindig a legrövidebb növelő utat használjuk, úgy az eljárás tetszőleges g kapacitásfüggvény esetén legfeljebb $O(|V||A|)$ növelés után véget ér.

1.7.4 Minimális költségű folyamok

TÉTEL 1.7.2 (Ford és Fulkerson) A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $c : A \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvény. A k-füzérek minimális költsége (vagyis k élidegen st-út összköltségének a minimuma) egyenlő a

$$k\pi(t) + \sum [c_\pi(uv) : uv \in A, c_\pi(uv) < 0] \tag{1.5}$$

érték maximumával, ahol a maximum az összes $\pi : V \to \mathbf{R}_+$ potenciálra megy. Egy z k-füzér akkor és csak akkor minimális költségű a k-füzérek között, ha létezik olyan π potenciál, amelyre fennállnak a következő optimalitási feltételek:

$$c_\pi(uv) > 0 \Rightarrow z(uv) = 0, \tag{i}$$

$$c_\pi(uv) < 0 \Rightarrow z(uv) = 1. \tag{ii}$$

Amennyiben c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.

Az általános eset

TÉTEL 1.7.3 A $D = (V, A)$ irányított gráf élhalmazán adott a $g : A \to \mathbf{Z}_+$ egészértékű kapacitásfüggvény és a $c : A \to \mathbf{R}_+$ költségfüggvény. A k nagyságú egészértékű megengedett folyamok költségének minimuma egyenlő a

$$k\pi(t) + \sum [c_\pi(uv)g(uv) : uv \in A, c_\pi(uv) < 0] \tag{1.6}$$

érték maximumával, ahol a maximum az összes π potenciálra megy. Egy k nagyságú megengedett z folyam akkor és csak akkor minimális költségű a k nagyságú megengedett folyamok között, ha létezik olyan π potenciál, amelyre fennállnak a következő optimalitási feltételek:

$$c_\pi(uv) > 0 \Rightarrow z(uv) = 0, \tag{i}$$

$$c_\pi(uv) < 0 \Rightarrow z(uv) = g(uv). \tag{ii}$$

Amennyiben c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek.

2. Fejezet

LINEÁRIS ALGEBRA: LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

2.1 VEKTORTÉR, ALTÉR, LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG

2.2 MÁTRIXOK, EGYENLETRENDSZEREK MEGOLDHATÓSÁGA

TÉTEL 2.2.1 Legyen A $m \times n$-es mátrix, ahol $1 \leq m < n$. Ekkor az $Az = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem-triviális megoldása. (Másszóval m-nél több m-dimenziós vektor mindig lineárisan összefüggő. Még másképp, A nulltere nem-triviális.)

Következmény 2.2.2 Ha egy mátrix oszlopai is és sorai is lineárisan függetlenek, akkor a mátrix négyzetes.

Következmény 2.2.3 Ha az A' mátrixból lineárisan függetlenül kiválasztható sorok maximális száma kisebb, mint az oszlopok száma, akkor az $A'z = 0$ rendszernek van nem-triviális megoldása.

TÉTEL 2.2.4 Egy A mátrix lineárisan független oszlopainak maximális száma egyenlő a lineárisan független sorok maximális számával.

Következmény 2.2.5 Egy mátrix rangja nem változik, ha hozzáveszünk egy új oszlopot, amely lineárisan függ az oszlopoktól, vagy ha elhagyunk egy meglévő oszlopot, amely lineárisan függ a többi oszloptól. Analóg állítás érvényes sorokra. •

TÉTEL 2.2.6 Ha egy $m \times n$-es A mátrix sorai lineárisan függetlenek (azaz $r(A) = m$), akkor tetszőleges n-dimenziós b vektorra az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása (ami $b \neq 0$ esetben azzal ekvivalens, hogy b lineárisan függ az A oszlopaitól.) Ha $m = n$, akkor a megoldás egyértelmű.

TÉTEL 2.2.7 A következők ekvivalensek.
(A) Az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása.
(B) $r(A) = r([A, b])$, (ahol $[A, b]$ az a mátrix, amely A-ból áll elő a b oszlop hozzávételével).
(C) Nem létezik olyan y, amelyre $yA = 0$, $yb \neq 0$.

TÉTEL 2.2.8 (Fredholm féle alternatíva tétel) Az $Ax = b$ rendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha nem létezik olyan y, amelyre $yA = 0$, $yb \neq 0$. Ekvivalensen, egy $[\ b\ ]$ vektor vagy benne van egy altérben [melyet az A oszlopai generálnak], vagy elválasztható tőle [egy y normálisú] homogén hipersíkkal abban az értelemben, hogy a hipersík az alteret tartalmazza, de a vektort nem.

2.3 EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁS-HALMAZA, AFFIN ALTEREK

TÉTEL 2.3.1 Egy A $n \times n$-es nem-szinguláris négyzetes mátrix első m sora által alkotott részmátrixot jelölje A_1, míg a maradékot A_2. Tegyük fel, hogy az A_1 minden sora ortogonális A_2 minden sorára. Ekkor A_1 sortere éppen az A_2 nulltere és A_1 nulltere éppen az A_2 sortere.

TÉTEL 2.3.2 Legyen A_1 olyan $m \times n$-es mátrix ($m < n$), amelynek sorai lineárisan függetlenek. Ekkor létezik olyan $(n - m) \times n$ méretű A_2 mátrix, amelynek sorai ortogonálisak az A_1 soraira és amely az A_1-gyel együtt egy $n \times n$-es nem-szinguláris mátrixot alkot. Az A_1 sortere az A_2 nulltere, és A_1 nulltere az A_2 sortere.

Következmény 2.3.3 Minden generált altér előáll nulltérként és minden nulltér előáll generált altérként. Egy $Ax = 0$ homogén egyenletrendszer megoldás-halmaza előáll véges sok vektor lineáris burkaként, azaz $\{yB : y \in \mathbf{R}^n\}$ alakban, (ahol n az A és a B oszlopainak száma). Véges sok vektor lineáris kombinációinak halmaza előáll egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldás-halmazaként.

TÉTEL 2.3.4 Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek x_0 megoldása. Ekkor a megoldások $M := \{x : Ax = b\}$ halmaza az $\mathbf{R}^n$ tér affin altere, nevezetesen az A nullterének eltoltja. Másként fogalmazva, az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszer egy tetszőleges megoldását x_0-hoz adva megoldást kapunk, és M minden tagja így áll elő. Megfordítva, minden affin altér előáll egy lineáris egyenletrendszer megoldás-halmazaként.

Következmény 2.3.5 Amennyiben az $Ax = b$ egyenletrendszernek x_0 egy megoldása, úgy a megoldások halmaza előáll véges sok vektor lineáris burkának x_0-lal történő eltolásáként, azaz $\{yB + x_0 : y \in \mathbf{R}^n\}$ alakban. •

Következmény 2.3.6 Amennyiben az $Ax = b$ egyenletrendszernek van megoldása, úgy az M megoldáshalmaz dimenziója $n - r(A)$, ahol n az oszlopok száma.

3. Fejezet

LINEÁRIS EGYENLŐTLENSÉG-RENDSZEREK MEGOLDÁSA

3.1 BEVEZETÉS

3.1.1 Megjegyzések az intuícióról

3.2 KÚPOK, POLIÉDEREK, POLITOPOK

3.2.1 Kúpok

3.2.2 Poliéderek és politopok

3.3 A FOURIER-MOTZKIN ELIMINÁCIÓ

3.3.1 Oszlop elimináció

TÉTEL 3.3.1 Az

$$Ax \leq 0 \tag{3.1}$$

egyenlőtlenség-rendszernek bármely megoldása az

$$A^{[1]}x \leq 0 \tag{3.2}$$

rendszernek is megoldása. A (3.2) bármely megoldásának első komponensét alkalmasan megváltoztatva a (3.1) egy megoldását kapjuk.

Következmény 3.3.2 Tegyük fel, hogy a Q mátrix első oszlopa $0, \pm 1$ értékű, és rendeljük a

$$Qx' \leq b \tag{3.3}$$

egyenlőtlenség-rendszerhez a

$$Q^{[1]}x' \leq b^{[1]} \tag{3.4}$$

rendszert, ahol $b^{[1]}$ az $A := (Q, b)$ mátrixhoz tartozó $A^{[1]}$ mátrix utolsó oszlopa. Ekkor (3.3) bármely megoldása a (3.4) rendszernek is megoldása, és a (3.4) bármely megoldásának első komponensét alkalmasan megváltoztatva a (3.3) egy megoldását kapjuk.

Következmény 3.3.3 Metszetkúp tengelymenti (külső vagy belső) vetülete metszetkúp. Poliéder tengelymenti vetülete poliéder.

TÉTEL 3.3.4 Egy politop és egy generált kúp összege poliéder. Speciálisan, minden politop korlátos poliéder és minden generált kúp előáll metszetkúpként.

TÉTEL 3.3.5 (Farkas lemma, geometriai alak) Ha egy $C \subseteq \mathbf{R}^k$ generált kúp nem tartalmaz valamely $b \in \mathbf{R}^k$ elemet, akkor létezik olyan (zárt) homogén féltér, amely magában foglalja C-t, de nem tartalmazza b-t. Ha egy P politop nem tartalmazza b-t, akkor létezik olyan féltér, amely magában foglalja P-t, de nem tartalmazza b-t.

3.3.2 Az FM eljárás hatékonysága

3.3.3 A 2-SAT probléma

3.3.4 Az ütemezési feladat újra

3.4 POLIÉDEREK

3.4.1 A poliéder egyenesei

TÉTEL 3.4.1 Valamely $q \neq 0$ vektorra a következők ekvivalensek:
(1) $Qq = 0$.
(2) q karakterisztikus vektora R-nek.
(3) R-nek van olyan z pontja, amelyre $z + \lambda q$ minden valós λ-ra R-ben van.

Következmény 3.4.2 Az R poliéder egy z pontját tartalmazó legbővebb, R-ben fekvő affin altér az A karakterisztikus altér z-vel való eltoltja.

Következmény 3.4.3 Egy $R := \{x : Qx \leq b\} \subseteq \mathbf{R}^n$ poliéder belső dimenziója $n - r(Q)$.

3.4.2 Bázis-megoldások

TÉTEL 3.4.4 Tegyük fel, hogy az R poliéder nemüres és $R = \{x : Qx \leq b\} = \{x : Q'x \leq b'\}$. Ekkor Q és Q' sortere megegyezik. Tetszőleges $z \in R$ esetén $Q_z^=$ és $Q_z'^=$ sortere megegyezik.

Következmény 3.4.5 Egy $z \in R$ elem szintje csak a poliédertől függ és nem a poliédert meghatározó egyenlőtlenség-rendszer konkrét alakjától. Speciálisan, a bázis-megoldás fogalma is csak a poliédertől függ.

TÉTEL 3.4.6 Minden nemüres poliédernek létezik bázis-megoldása, nevezetesen bármely minimális szintű elem bázis-megoldás.

TÉTEL 3.4.7 (i) Egy $M = \binom{P}{Q}$ nem-nulla mátrix esetén a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{3.5}$$

lineáris rendszernek egy z megoldása akkor bázis-megoldás, ha $r(M) = r(M_z^=)$.

(ii) Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ egy z megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha a pozitív elemekhez tartozó A-beli oszlopok lineárisan függetlenek.

(iii) Az $\{yA \geq 0, yb = -1\}$ rendszer egy y_0 megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha az A-ból lineárisan függetlenül kiválasztható, az y_0-ra merőleges oszlopok maximális száma $r(A, b) - 1$.

3.4.3 Csúcsos poliéderek

TÉTEL 3.4.8 Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy z elemére a következők ekvivalensek:
(0) Q oszlopai lineárisan függetlenek és z bázis-megoldás.
(1) $Q_z^=$ oszlopai lineárisan függetlenek, azaz Q-nak van n lineárisan független z-aktív sora.
(2) z csúcs.
(3) z extrém pont.

Következmény 3.4.9 Egy poliédernek legfeljebb véges sok csúcsa van.

TÉTEL 3.4.10 Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéderre a következők ekvivalensek:
(1) Q oszlopai lineárisan függetlenek.
(2) R egyenes-mentes.
(3) Az R karakterisztikus altere triviális.
(4) R csúcsos.

TÉTEL 3.4.11 Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéder az $A := \{x : Qx = 0\}$ karakterisztikus altér és az $R' := R \cap A^{\perp}$ poliéder összege, ahol $A^{\perp}$ az A altér ortogonális kiegészítője (vagyis a Q sorai által generált altér). Továbbá, az R' poliéder egyenes-mentes (=csúcsos).

Következmény 3.4.12 Egy $R := \{x : Mx \leq 0\}$ metszetkúp az $A := \{x : Mx = 0\}$ karakterisztikus altér (ami speciális metszetkúp) és az $R' := R \cap A^{\perp}$ csúcsos metszetkúp vektor-összege.

3.4.4 Korlátos poliéderek

TÉTEL 3.4.13 Valamely nemnulla q vektorra a következők ekvivalensek:
(1) $\vec{q}$ a poliéder iránya.
(2) R-nek van olyan z pontja, amelyre a $\{z + \lambda q : \lambda \geq 0\}$ félegyenes R-ben van.
(3) $Qq \leq 0$.

Következmény 3.4.14 Egy poliédernek és karakterisztikus kúpjának extrém irányai ugyanazok. •

TÉTEL 3.4.15 Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéderre a következők ekvivalensek:
(1) R nem tartalmaz félegyenest.
(2) R-nek véges sok csúcsa van, melyek konvex burka R.
(3) R korlátos.
(4) R karakterisztikus kúpja triviális.

TÉTEL 3.4.16 Legyen a $C := \{x : Qx \leq 0\}$ nemtriviális kúp egyenes-mentes (=csúcsos), és legyen $Z := \{x : Qx \leq 0, cx = -1\}$ poliéder, ahol c a Q sorainak az összege. Ekkor tetszőleges $z \in Z$ esetén $\vec{z}$ a kúp iránya, és a kúp tetszőleges $\vec{q}$ iránya egyetlen z pontban metszi Z-t. Z korlátos és egy $z \in Z$ pont akkor és csak akkor csúcsa Z-nek, ha $\vec{z}$ extrém iránya C-nek.

Következmény 3.4.17 C egyenes-mentes nemtriviális metszetkúpnak véges sok extrém iránya van, és C ezen irányok generált kúpja. •

TÉTEL 3.4.18 A $C = \{x : Qx \leq 0\}$ egyenes-mentes kúp egy z nemnulla eleme által meghatározott $\vec{z}$ irány akkor és csak akkor extrém iránya C-nek, ha z merőleges a Q mátrix $r(Q) - 1 (= n - 1)$ lineárisan független sorára, azaz ha $r(Q_z^=) = n - 2$.

3.4.5 Poliéderek előállítása

TÉTEL 3.4.19 Minden metszetkúp előáll generált kúpként.

TÉTEL 3.4.20 Minden nemüres poliéder előáll mint egy politop és egy generált kúp összege. Speciálisan, minden korlátos poliéder politop.

TÉTEL 3.4.21 Minden $R \neq \emptyset$ egyenes-mentes (azaz csúcsos) poliéder előáll mint a csúcsai által feszített R_K politop valamint a poliéder C karakterisztikus kúpjának a vektor-összege.

Következmény 3.4.22 Minden R egyenes-mentes (azaz csúcsos) poliéder előáll mint a csúcsai által feszített politopnak valamint az extremális irányai által generált (csúcsos) kúpnak (vagyis az R karakterisztikus kúpjának) a vektor-összege. •

3.5 MEGOLDHATÓSÁG: A FARKAS LEMMA

TÉTEL 3.5.1 (Farkas lemma, standard alak) Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszernek pontosan akkor van megoldása, ha az $\{yA \geq 0, yb < 0\}$ rendszernek nincs.

TÉTEL 3.5.2 (Farkas lemma, (A) változat) A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha nem létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yQ = 0, yb = -1$.

TÉTEL 3.5.3 (Farkas lemma, (B) változat) A $\{Bx \leq b, x \geq 0\}$ egyenlőtlenség-rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha nem létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yB \geq 0, yb = -1$.

TÉTEL 3.5.4 A

$$\{Px = b_0, Qx \leq b_1\} \tag{3.6}$$

primál rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az

$$\{y_0 P + y_1 Q = 0, y_1 \geq 0, yb = -1\} \tag{3.7}$$

duális nem, ahol $y = (y_0, y_1,), b = (b_0, b_1)$.

TÉTEL 3.5.5 (Farkas lemma, általános alak) A

$$Px_0 + Ax_1 = b_0, \ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1, \ x_1 \geq 0 \tag{3.8}$$

primál rendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha az

$$y_0 P + y_1 Q = 0, \ y_0 A + y_1 B \geq 0, \ y_1 \geq 0, \ yb := y_0 b_0 + y_1 b_1 = -1 \tag{3.9}$$

duális rendszernek van.

TÉTEL 3.5.6 Az $\{Ax = b, \ x \geq 0\}$ rendszernek akkor és csak akkor van olyan megoldása, amelyben az x pozitív változóinak megfelelő A-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ha nem létezik olyan y, amelyre $yA \geq 0, \ yb = -1$ és A-nak létezik $r(A, b) - 1$ lineárisan független oszlopa, amelyekre y merőleges. (Röviden, vagy a primál, vagy a duál problémának létezik bázis-megoldása). •

3.5.1 Direkt bizonyítás

TÉTEL 3.5.7 A

$$Px_0 + Ax_1 = b,\ x_1 \geq 0 \tag{3.10}$$

primál feladatnak akkor és csak akkor nincsen megoldása, ha az

$$yP = 0,\ yA \geq 0,\ yb = -1 \tag{3.11}$$

duális feladatnak van.

TÉTEL 3.5.8

$$y_0P' + y_1Q' = c_0',\ y_0A' + y_1B' \geq c_1',\ y_1 \geq 0 \tag{3.12}$$

primál rendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha a

$$P'x_0 + A'x_1' = 0,\ Q'x_0 + B'x_1' \leq 0,\ x_1' \geq 0,\ c_0'x_0 + c_1'x_1' > 0 \tag{3.13}$$

duális rendszernek van. •

3.5.2 Lineáris és logikai következmény

TÉTEL 3.5.9 Feltéve, hogy R nemüres, (**??**) akkor és csak akkor lineáris következménye (**??**)-nek, ha logikai.

3.5.3 Alkalmazások

TÉTEL 3.5.10 Ha egy n-változós lineáris egyenlőtlenség-rendszernek nincsen megoldása, akkor van egy legfeljebb $n+1$ egyenlőtlenségből álló részrendszer úgy, hogy már annak sincsen megoldása.

TÉTEL 3.5.11 (Caratheodory) Ha a d-dimenziós tér egy z pontja $p \geq d+1$ darab pont konvex kombinációja, akkor ezen pontok között van legfeljebb $d+1$, amelyeknek z konvex kombinációja.

TÉTEL 3.5.12 Ha R és R' két nemüres poliéder, melyek metszete üres, akkor van őket szigorúan elválasztó $\{x : cx = \alpha\}$ hipersík, azaz $cx < \alpha < cx'$ fennáll az R minden x és az R' minden x' elemére.

TÉTEL 3.5.13 (Helly) Az n-dimenziós térben adottak a $C_1, \dots, C_k$ konvex halmazok, melyek metszete üres. Ekkor ezen halmazok között létezik már legfeljebb $n+1$ olyan is, amelyek metszete üres.

TÉTEL 3.5.14 (Kirchberger) Az n dimenziós térben adott k piros és l zöld pont, ahol $k+l \geq n+2$. Amennyiben a piros pontokat nem lehet a zöld pontoktól egy hipersíkkal elválasztani, úgy a pontok között létezik legfeljebb $n+2$ úgy, hogy már ezeket sem lehet hipersíkkal elválasztani.

TÉTEL 3.5.15 Ha az A $n\times$n-es nemnegatív mátrix minden oszlopában az elemek összege 1, akkor az $\{Ax = x, e_nx = 1, x \geq 0\}$ rendszernek létezik megoldása, ahol $e_n = (1, \dots, 1)$.

4. Fejezet

LINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS

4.1 IRÁNYMENTI KORLÁTOSSÁG

4.1.1 Erős bázis-megoldások

TÉTEL 4.1.1 Tegyük fel, hogy az R poliéder nemüres és $R = \{x : Qx \leq b\} = \{x : Q'x \leq b'\}$. A Q valamely j oszlopa pontosan akkor lineárisan független, ha Q' megfelelő j oszlopa lineárisan független.

Következmény 4.1.2 Az erős bázis-megoldás fogalma csak a poliédertől függ és nem a poliédert meghatározó egyenlőtlenség-rendszertől. •

Következmény 4.1.3 A $\{Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ egyenlőtlenség-rendszer egy z bázis-megoldása pontosan akkor erős, ha a z nem-nulla komponenseihez tartozó M-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ahol $M = \binom{P}{Q}$. •

TÉTEL 4.1.4 A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer egy z megoldása akkor és csak akkor erős bázis-megoldás, ha létezik Q-nek egy olyan $r(Q)$ sorból és $r(Q)$ oszlopból álló nem-szinguláris Q' részmátrixa, amelyre z a $Q'x' = b'$ egyértelmű x' megoldásából áll elő 0-komponensek hozzávételével (ahol b' a b azon részét jelöli, amely a Q' sorainak felel meg.)

Következmény 4.1.5 Tetszőleges egyenlőtlenség-rendszernek legfeljebb csak véges sok erős bázis-megoldása van. •

4.1.2 Az iránymenti korlátosság feltétele

TÉTEL 4.1.6 (Az iránymenti korlátossági tétele, speciális alak) Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nemüres, és legyen c egy n-dimenziós vektor. A következők ekvivalensek.

(0) A $\{cx\}$ lineáris függvény R-n felülről korlátos.
(1) Minden $z \in R$ elemre létezik $Qx \leq b$-nek olyan x^* erős bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.
(2) Nem létezik olyan q vektor, amelyre $cq > 0$ és $Qq \leq 0$.
(3) Létezik olyan $y \geq 0$ vektor, amelyre $yQ = c$.

Következmény 4.1.7 Ha az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nemüres, és $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos, úgy $\max\{cx : x \in R\}$ létezik (azaz létezik olyan $z \in R$, amelyre $cz = \sup\{cx : x \in R\}$).

Következmény 4.1.8 Ha egy egyenlőtlenség-rendszer megoldható, akkor van erős bázis-megoldása is.

TÉTEL 4.1.9 (Az iránymenti korlátossági tétele) Tegyük fel, hogy az R poliéder nemüres, és legyen $c = (c_0, c_1)$ adott vektor. A következők ekvivalensek.

(0) A $\{cx\}$ lineáris függvény R-n felülről korlátos.
(1) Minden $z \in R$ elemre létezik (**??**)-nek olyan x^* erős bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.
(2) Nem létezik olyan $q = (q_0, q_1)$ vektor, amelyre $cq > 0$, és $q_1 \geq 0, Pq_0 + Aq_1 = 0, Qq_0 + Bq_1 \leq 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre

$$y_0 P + y_1 Q = c_0,\ \ y_0 A + y_1 B \geq c_1,\ \ y_1 \geq 0. \bullet \tag{4.1}$$

4.2 OPTIMALITÁS: A DUALITÁS TÉTEL

4.2.1 Optimalitási feltételek

TÉTEL 4.2.1 Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nemüres és $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos. Az R egy megadott x^* elemére a következő állítások ekvivalensek.

(1) $cx^* \geq cx$ minden $x \in R$, azaz x^* maximalizálja a cx függvényt az R-n (röviden, x^* optimális).

(2) Nem létezik növelő irány, azaz olyan x' vektor, amelyre $Q^{=}_{x^*} x' \leq 0$ és $cx' > 0$.

(3) A c vektor benne van x^* aktív sorainak kúpjában. Más szóval, van olyan y^* vektor, amely kielégíti az

$$y^* \geq 0, y^* Q = c \tag{4.2}$$

duális feltételt, és amelyre fennáll az

$$y^*(i) > 0 \Rightarrow\ {}_i q x^* = b(i) \tag{4.3}$$

optimalitási kritérium (ami szavakban: az y^* bármely komponense csak akkor lehet pozitív, ha a neki megfelelő primál egyenlőtlenséget x^* egyenlőséggel teljesít). (4.2) fennállása esetén (4.3) azzal ekvivalens, hogy

$$cx^* = by^*, \tag{4.4}$$

továbbá azzal, hogy

$$y^*(b - Qx^*) = 0. \tag{4.5}$$

TÉTEL 4.2.2 Tegyük fel, hogy a

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \le b_1,\ x_1 \ge 0 \tag{4.6}$$

rendszerrel definiált R poliéder nemüres és $\{cx = c_0x_0 + c_1x_1 : x \in R\}$ felülről korlátos. Legyen $x^* = (x_0^*, x_1^*)$ az R egy eleme, és jelölje $(Q^{=}_{x^*}, B^{=}_{x^*})$ a (Q, B) mátrix azon sorai által alkotott részmátrixot, amelyekre a hozzájuk tartozó egyenlőtlenségeket x^* egyenlőséggel teljesíti, míg $b^{=}_{1*}$ jelölje a b_1 megfelelő részét. A következő állítások ekvivalensek.

(1) $cx^* \ge cx$ minden $x \in R$, azaz x^* maximalizálja a cx függvényt az R-n (röviden, x^* optimális).
(2) Nem létezik növelő irány, azaz olyan $x' = (x'_0, x'_1)$ vektor, amelyre $cx' > 0$,

$$Px_0 + Ax_1 = b_0, Q^{=}_{x^*}x_0 + B^{=}_{x^*}x_1 \le b^{=}_{1*} \tag{4.7}$$

és

$$x_1^*(i) = 0 \Rightarrow x'_1(i) \ge 0. \tag{4.8}$$

(3) Létezik olyan $y^* = (y_0^*, y_1^*)$ vektor, amely kielégíti az

$$y_1^* \ge 0, y_0^*P + y_1^*Q = c_0,\ y_0^*A + y_1^*B \ge c_1 \tag{4.9}$$

duális feltételt, és amelyre fennáll az

$$x_1^*(j) > 0 \Rightarrow y_0^*a_j + y_1^*b_j = c_1(j) \tag{4.10}$$

valamint az

$$y_1^*(i) > 0 \Rightarrow\ {}_iqx_0^* +\ {}_ibx_1 = b_1(i), \tag{4.11}$$

optimalitási kritérium. (4.9) fennállása esetén az optimalitási kritérium azzal ekvivalens, hogy

$$cx^* = by^*, \tag{4.12}$$

és azzal, hogy

$$y^*(b - Mx^*) = 0, \tag{4.13}$$

ahol $M = \begin{pmatrix} P & A \\ Q & B \end{pmatrix}$.

4.2.2 A dualitás tétel

TÉTEL 4.2.3 (Dualitás tétel, speciális alak) Tegyük fel, hogy az $R = \{x : Qx \le b\}$ primál poliéder nemüres. Tegyük fel továbbá, hogy $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos (ami a 4.1.6 tétel szerint azzal ekvivalens, hogy a duális $R^* = \{y : y \ge 0, yQ = c\}$ poliéder nemüres). Ekkor a primál optimalizálási feladatban a maximum egyenlő a duál feladatban szereplő minimummal, azaz $\max\{cx : Qx \le b\} = \min\{by : y \ge 0, yQ = c\}$.

TÉTEL 4.2.4 (Dualitás tétel) Tegyük fel, hogy a (**??**) rendszer által definiált R primál poliéder nemüres. Tegyük fel továbbá, hogy a $cx = c_0x_0 + c_1x_1$ célfüggvényre nézve $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos (vagy ekvivalensen a duális R^* poliéder nemüres). Ekkor a (**??**) primál optimalizálási feladatban a maximum egyenlő a (**??**) duál feladatban szereplő minimummal.

TÉTEL 4.2.5 (Dualitás tétel, szimmetrikus alak) Tegyük fel, hogy mind az $R := \{x : Bx \le b, x \ge 0\}$ primál, mind az $R^* := \{y : yB \ge c, y \ge 0\}$ duál poliéder nemüres. Ekkor $cx \le by$ fennáll minden $x \in R, y \in R^*$ esetén, és van olyan $x^* \in R, y^* \in R^*$, melyekre egyenlőség érvényes, azaz $\max\{cx : x \in R\} = \min\{by : y \in R^*\}$.

4.2.3 Következmények

TÉTEL 4.2.6 (Neumann) Tetszőleges $m \times n$-es $(m, n \ge 1)$ A mátrixra az A oszlopvektorai által feszített politopban lévő elemek tetejének a minimuma egyenlő az A sorvektorai által feszített politopban lévő elemek aljának maximumával. Formálisabban, $\min\{(\max Ax) : x \ge 0, e_nx = 1\} = \max\{(\min yA) : y \ge 0, e_my = 1\}$, ahol e_i az i-dimenziós csupa egyesből álló vektort jelenti.

TÉTEL 4.2.7 (Clark) Tekintsük a $\max\{cx : x \ge 0, Bx \le b\}$ és $\min\{by : y \ge 0, yB \le c\}$ primál-duál program párt, és tegyük fel, hogy mindegyik megoldható. Ekkor az R primál és az R^* duál poliéderek közül az egyik nem korlátos.

4.3 A SZIMPLEX ALGORITMUS

4.3.1 Megengedettség

TÉTEL 4.3.1 Az $\{Ax = b,\ x \ge 0\}$ rendszernek akkor és csak akkor van olyan megoldása, amelyben az x pozitív változóinak megfelelő A-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ha nem létezik olyan y, amelyre $yA \ge 0,\ yb < 0$ és A-nak létezik $r(A, b) - 1$ lineárisan független oszlopa, amelyekre y merőleges. (Tömören, vagy a primál vagy a duál feladatnak létezik bázis-megoldása). •

4.3.2 Optimalizálás

5. Fejezet

LINEÁRIS POGRAMOZÁS ÉS HÁLÓZATI OPTIMALIZÁLÁS

5.1 TELJESEN UNIMODULÁRIS MÁTRIXOK

5.1.1 Definíciók és példák

TÉTEL 5.1.1 (a) Digráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris. (b) Páros gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.

TÉTEL 5.1.2 A H_F hálózati mátrix teljesen unimoduláris.

Következmény 5.1.3 Egy olyan hipergráf, amely egy irányított fa élhalmazán van definiálva és a hiperélek irányított utak, teljesen unimoduláris. •

TÉTEL 5.1.4 M teljesen unimoduláris.

5.1.2 Farkas lemma, dualitás tétel, optimalitási feltételek TU-mátrixokra

TÉTEL 5.1.5 Tegyük fel, hogy az $M = \binom{P}{Q}$ mátrix teljesen unimoduláris. Ha az (**??**) primál probléma oldható meg és a korlátozó b vektor egész, akkor (**??**)-nek van egész megoldása is. Ha az

$$y_1 \geq 0, yM = 0, yb < 0 \tag{5.1}$$

duális probléma oldható meg, ahol $y = (y_0, y_1)$, akkor van $(0, \pm 1)$-értékű y megoldás is (függetlenül b egészértékűségétől).

TÉTEL 5.1.6 Ha a $\max\{cx : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ lineáris programozási problémának létezik megoldása, akkor az optimum egész vektoron is felvétetik (függetlenül attól, hogy c egészértékű vagy sem). Ekvivalens alakban: minden TU-mátrix és egész korlátozó vektor által megadott poliéder egész.

TÉTEL 5.1.7 Tegyük fel, hogy $R = \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ nemüres. A következők ekvivalensek.
(1) $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos.
(2) Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$-értékű x' vektor, amelyre $Px' = 0, Qx' \leq 0$, és $cx' > 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$ és $yM = c$, és amely egész, amennyiben c egész. •

TÉTEL 5.1.8 Legyen x^* az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1)\}$ poliéder egy eleme. Jelölje $Q^{=}_{x^*}$ a Q aktív részmátrixát. A következők ekvivalensek.
(1) x^* maximalizálja cx-t R fölött.
(2) Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$-értékű x' vektor, amelyre $Px' = 0$, $Q^{=}_{x^*}x' \leq 0$, és $cx' > 0$.
(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$, $yM = c$, $y(b - Mx^*) = 0$, és y egész, amennyiben c egész. •

5.1.3 Kerekítés és egyenletes színezés

Kerekítés

TÉTEL 5.1.9 Tetszőleges $m \times n$-es B mátrixnak van olyan kerekítése, hogy a következő mennyiségek mind egynél kevesebbel változnak: minden sorösszeg, minden oszlopösszeg, az első j sor elemeinek összege ($j = 1, 2, \ldots, m$), az első i oszlop elemeinek összege ($i = 1, 2, \ldots, n$).

TÉTEL 5.1.10 Egy $x_1, \ldots x_n$ sorozat elemeinek létezik olyan $z_1, \ldots, z_n$ kerekítése, hogy minden $1 \leq i \leq j \leq n$ indexre a $z_i + \ldots + z_j$ összeg kerekítése az $x_i + \ldots + x_j$ összegnek.

Egyenletes színezések

TÉTEL 5.1.11 Legyen A TU-mátrix, b egész vektor, k pozitív egész. Legyen z olyan egész vektor, amelyre $Az \leq kb$. Ekkor z előáll olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegeként, melyekre $Az_i \leq b$.

Következmény 5.1.12 Ha $z \geq 0$ olyan egész vektor, amelyre $kb_1 \leq Az \leq kb_2$, akkor z felbomlik olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegére, melyekre $z_i \geq 0$, és $b_1 \leq Az_i \leq b_2$. •

TÉTEL 5.1.13 Az A TU-mátrix oszlopainak létezik egyenletes k-színezése.

Egy alkalmazás

Következmény 5.1.14 Adott egy F irányított fa (speciális esetben irányított út) és F irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat F-élek egy részhalmazának tekintünk. $\mathcal{P}$ tagjai megszínezhetők k színnel (minden k pozitív egészre) úgy, hogy F minden e élére az e-t tartalmazó egyszínű utak száma minden színre lényegében ugyanannyi, ahol a ,,lényegében ugyanannyi" azt jelenti, hogy bármely két színosztályra az eltérés legfeljebb egy lehet. •

Következmény 5.1.15 Adott egy F irányított fa és F irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat F-élek egy részhalmazának tekintünk. Az F élei megszínezhetők k színnel (minden k pozitív egészre) úgy, hogy $\mathcal{P}$ minden tagjában a színek lényegében egyenletes számban fordulnak elő. •

TU-mátrixok jellemzése

TÉTEL 5.1.16 (Ghouila-Houri) (ejtsd: Gujla-úri) Egy Q mátrix akkor és csak akkor teljesen unimoduláris, ha oszlapainak bármely részhalmaza egyenletesen 2-színezhető.

5.2 HÁLÓZATI OPTIMALIZÁLÁS ÉS LINEÁRIS PROGRAMOZÁS

5.2.1 Páros gráfok: optimális részgráfok

Optimális párosítások

TÉTEL 5.2.1 (Kőnig) A $G = (S, T; E)$ páros gráfban a független élek maximális ν száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális τ számával.

TÉTEL 5.2.2 Páros gráfban egy párosítás maximális költsége egyenlő $\min\{\sum_{v\in V} \pi(v) : \pi \geq 0, \pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ minden uv élre$\}$. Ha c egészértékű, az optimális π is választható egészértékűnek. •

TÉTEL 5.2.3 A G páros gráf A incidencia mátrixával felírt

$$\{x : Ax \leq e_p, x \geq 0\} \tag{5.2}$$

poliéder egész, amelynek csúcsai pontosan a gráf párosításainak incidencia vektorai. •

TÉTEL 5.2.4 (Birkhoff és Neumann) Egy mátrix akkor és csak akkor bisztochasztikus, ha permutáció mátrixok konvex kombinációja.

TÉTEL 5.2.5 (Egerváry) A $G = (S, T; E)$ teljes párosítással rendelkező páros gráfban a $c \geq 0$ súlyfüggvényre vonatkozó maximális súlyú teljes párosítás ν_c súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális τ_c összértékével. Amennyiben G teljes páros gráf, úgy az optimális súlyozott lefogás választható nemnegatívnak is. Amennyiben c egészértékű az optimális súlyozott lefogás is választható annak.

Páros gráf fokszámkorlátozott részgráfjai: a szállítási probléma

5.2.2 Páros gráfok: élszínezések

TÉTEL 5.2.6 Egy $G = (S, T; E)$ páros gráf éleit meg lehet k színnel úgy színezni, hogy minden v csúcsra és mindegyik j színre ($j = 1, \dots, k$) a v-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe j. Ráadásul még azt is megkövetelhetjük, hogy minden színosztály mérete közel ugyanakkora legyen, vagyis $\lfloor |E|/k \rfloor$ vagy $\lceil |E|/k \rceil$. Ha k-t a maximális Δ fokszámnak választjuk, akkor megkapjuk Kőnig élszínezési tételét, amely szerint páros gráf kromatikus indexe (élszínezési száma) a maximális fokszámmal egyenlő. Ha k-t a minimális δ fokszámnak választjuk, akkor Gupta egy tételét kapjuk, amely szerint G páros gráf élhalmaza felbontható δ részre úgy, hogy mindegyik rész fedi az összes pontot. •

TÉTEL 5.2.7 (Folkman és Fulkerson) Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik l darab élidegen k élű párosítás, ha

$$i_G(Z) \geq l(k + |Z| - |U|) \tag{5.3}$$

fennáll $U := S \cup T$ minden Z részhalmazára, ahol $i_G(Z)$ jelöli a Z által feszített élek számát.

5.2.3 Megengedett potenciálok, legolcsóbb utak

TÉTEL 5.2.8 Adott $c : A \to \mathbf{R}$ költség-függvényre akkor és csak akkor létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ vektor, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ minden $e = uv \in A$ élre, ha c konzervatív, azaz ha nem létezik negatív költségű irányított kör. Amennyiben c egészértékű, úgy a potenciál is választható annak.

TÉTEL 5.2.9 Konzervatív c költségfüggvény esetén az s-ből t-be vezető utak költségének $l_c(t)$ minimuma egyenlő $\pi(t) - \pi(s)$ maximumával, ahol a maximum az összes megengedett π potenciálon veendő.

5.2.4 Megengedett áramok és folyamok

TÉTEL 5.2.10 Ha $f \leq g$ egészértékű, akkor a megengedett áramok $\{x : Qx \leq 0, f \leq x \leq g\}$ poliédere, amennyiben nemüres, egész poliéder.

TÉTEL 5.2.11 A $D = (V, A)$ digráf élhalmazán adott a $g \geq 0$ egész kapacitásfüggvény. Legyen s és t két kijelölt csúcs, melyekre $\varrho(s) = 0 = \delta(t)$. A k nagyságú megengedett folyamok $\{x \in \mathbf{R}^A : 0 \leq x \leq g, \varrho_x(v) = \delta_x(v)$ minden $v \in V - \{s, t\}$-re, $\delta_x(s) = k\}$ poliédere, amennyiben nemüres, egész poliéder. •

TÉTEL 5.2.12 (Hoffman, 1960) A $D = (V, A)$ digráfban adott $f \leq g$ kapacitásfüggvényekre vonatkozólag akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{5.4}$$

Továbbá, ha f és g egészértékűek és (5.4) fennáll, úgy létezik egészértékű megengedett áram is.