# Tartalom


**1 LINEÁRIS ALGEBRA ÉS POLIÉDEREK** **3**
1.1 VEKTORTÉR, ALTÉR, LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG . . . . . 3
1.2 MÁTRIXOK, EGYENLETRENDSZEREK . . . . . 5
1.3 ALTEREK, AFFIN ALTEREK . . . . . 9
1.4 KÚPOK, POLIÉDEREK . . . . . 10

**2 LINEÁRIS EGYENLŐTLENSÉG-RENDSZEREK** **14**
2.1 A FOURIER-MOTZKIN ELIMINÁCIÓ . . . . . 14
2.1.1 A primál feladat . . . . . 14
2.1.2 A duál feladat . . . . . 16
2.1.3 Kúpok és poliéderek előállítása . . . . . 17
2.1.4 Az FM eljárás hatékonysága . . . . . 17
2.1.5 A 2-SAT probléma . . . . . 18
2.1.6 Egy ütemezési feladat: PERT . . . . . 18
2.2 MEGOLDHATÓSÁG: A FARKAS LEMMA . . . . . 19
2.2.1 Direkt bizonyítás . . . . . 21
2.3 KORLÁTOSSÁG . . . . . 23
2.3.1 Bázis-megoldások . . . . . 23
2.3.2 Erős bázis-megoldások . . . . . 24
2.3.3 A korlátosság feltétele . . . . . 25
2.4 OPTIMALITÁS: A DUALITÁS TÉTEL . . . . . 28
2.4.1 Optimalitási feltételek . . . . . 28
2.4.2 A dualitás tétel . . . . . 30
2.4.3 Lineáris és logikai következmény . . . . . 31
2.4.4 Neumann tétele . . . . . 33
2.4.5 Egy játekelméleti alkalmazás . . . . . 34
2.5 POLIÉDEREK HATÁROLÓ ALKATRÉSZEI . . . . . 36
2.5.1 Csúcsok és extrém irányok . . . . . 36
2.5.2 Oldalak . . . . . 40
2.5.3 Dimenzió, lapok . . . . . 42
2.6 A SZIMPLEX ALGORITMUS . . . . . 45
2.6.1 Megengedettség . . . . . 45
2.6.2 Optimalizálás . . . . . 47

**3 OPTIMALIZÁLÁS GRÁFOKON** **49**
3.1 TELJESEN UNIMODULÁRIS MÁTRIXOK . . . . . 49
3.2 A FARKAS LEMMA ÉS A DUALITÁS TÉTEL TU-MÁTRIXOKRA . . . . . 51
3.3 KEREKÍTÉS ÉS EGYENLETES SZÍNEZÉS . . . . . 53
3.4 ÁRAMOK ÉS FOLYAMOK . . . . . 55
3.5 LEGRÖVIDEBB SÉTÁK ÉS UTAK . . . . . 60
3.5.1 NEMNEGATÍV KÖLTSÉGEK: DIJKSTRA ALGORITMUSA . . . . . 60
3.5.2 KONZERVATÍV KÖLTSÉGEK . . . . . 61
3.5.3 ACIKLIKUS DIGRÁFOK: A KRITIKUS UTAK MÓDSZERE . . . . . 62
3.6 A MAGYAR MÓDSZER . . . . . 64

3.6.1 Maximális elemszámú párosítások . . . 64
3.6.2 Maximális súlyú párosítások . . . 65
3.7 A NÖVELŐ UTAK MÓDSZERE . . . 67
3.7.1 A skálázási technika . . . 67
3.7.2 Legrövidebb növelő utak . . . 68
3.8 MINIMÁLIS KÖLTSÉGŰ FOLYAMOK . . . 69

# 1. Fejezet

# LINEÁRIS ALGEBRA ÉS POLIÉDEREK

## 1.1 VEKTORTÉR, ALTÉR, LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG

Az alábbiakban áttekintjük a $V$ Euklideszi vektortér néhány alaptulajdonságát. Az alaptest mindig a valós ($\mathbf{R}$) vagy a racionális ($\mathbf{Q}$) számok teste. Amikor Euklideszi vektortérről beszélünk, a valós szám $n$-esek $\mathbf{R}^n$ terére (vagy a racionális szám $n$-esek $\mathbf{Q}^n$ terére) gondolunk. (Lineáris algebrában bebizonyítják, hogy bármely két $n$ dimenziós Euklideszi vektortér egymással izomorf.) Mindig az $\mathbf{R}$-t használjuk alaptestként, de valamennyi állítás érvényes a $\mathbf{Q}$ esetén is. Remélhetőleg nem okoz majd zavart, hogy jelölésben nem teszünk különbséget a 0 szám és a vektortér nulleleme között. A vektortér elemeit néha vektoroknak, néha pontoknak tekintjük.

Legyen $x$ és $y$ két azonos dimenziós vektor. Azt mondjuk, hogy $x \geq y$, ha $x$ minden komponense nagyobb vagy egyenlő $y$ megfelelő komponensénél. Amennyiben $x \leq y$ és $x \neq y$, úgy az $x < y$ jelölést használjuk. Amikor $x$ minden komponense szigorúan kisebb az $y$ megfelelő komponensénél, az $x \ll y$ jelölést használjuk.

Adott $x_1, \ldots, x_k$ vektorok és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számok esetén a $b := \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$ vektort az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok egy **lineáris kombinációjának** nevezzük. Ha a $\lambda_i$ számok összege 1, **affin kombinációról** beszélünk, ha valamennyi $\lambda_i$ nem-negatív, úgy **nem-negatív kombinációról** van szó. Egy nem-negatív, affin kombinációt **konvex kombinációnak** mondunk. Amennyiben a $b \neq 0$ elem előáll az $x_1, \ldots, x_k$ elemek lineáris kombinációjaként, úgy azt mondjuk, hogy $b$ **lineárisan függ** az $x_1, \ldots, x_k$ elemektől. Ha $b$-nek nincs ilyen előállítása, akkor $b$ **lineárisan független** az $x_1, \ldots, x_k$ elemektől. A lineáris kombináció **triviális,** ha mindegyik $\lambda_i$ együttható 0. Ha legalább az egyikük nem-nulla, **nem-triviális lineáris kombinációról** beszélünk. Azt mondjuk, hogy az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok **lineárisan összefüggnek,** ha a vektortér nulleleme előáll nem-triviális lineáris kombinációjukként. Ha nincs ilyen előállítás, úgy az $x_1, \ldots, x_k$ vektorokat **lineárisan függetlenek**nek mondjuk. Az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok **kört** alkotnak, ha lineárisan összefüggnek, de bármely valódi részük már lineárisan független. (Az elnevezés a gráfelmélet kör-fogalmából jön és nincs köze a geometria kör-fogalmához.) Könnyű ellenőrizni, hogy egy kör bármely eleme lineárisan függ a kör többi elemétől. (Ha csak azt tesszük fel, hogy az $x_1, \ldots, x_k$ elemek lineárisan összefüggnek, akkor nem feltétlenül igaz az, hogy mindegyik $x_i$ elem lineárisan függ a többitől. Például, az $(1,0), (2,0), (0,1)$ kétdimenziós vektorok lineárisan összefüggnek, de a (0,1) vektor nem állítható elő az $(1,0)$ és $(2,0)$ vektorok lineáris kombinációjaként.)

Egy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ egymás mellé leírt szám $n$-est sorvektornak tekintünk, míg ha ezeket az elemeket egymás alá írjuk, oszlopvektorról beszélünk. Ha $a$ sor-vektor, akkor $a^t$ az $a$ transzponáltja, azaz az $a$-nak megfelelő oszlopvektor.

Legyen $X$ és $Y$ két vektor-halmaz $\mathbf{R}^n$-ben. Ekkor a **vektor-összegükön** vagy **Minkowski összegükön** (röviden, **összegükön**) az $X + Y := \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ halmazt értjük. A különbségük analóg módon definiálható.

A $V$ vektortér $A$ **altere** egy olyan nemüres részhalmaza $V$-nek, amelyre fennáll, hogy

1. $x \in A \Rightarrow \lambda x \in A$ minden $\lambda \in \mathbf{R}$ számra,
2. $x, y \in A \Rightarrow x + y \in A$.

Nyilván az egyetlen nulla elemből álló halmaz altér, az ún. **triviális altér.** Maga az egész $V$ is altér. A definícióból következik, hogy a vektortér 0 eleme minden altérben benne van. Továbbá az altér véges sok elemének bármilyen lineáris kombinációja is az altérben van. Érvényes, hogy alterek metszete is altér. Könnyen ellenőrizhető, hogy két altér összege is altér, éspedig a mindkettőt magában foglaló legszűkebb altér. Egy altér **dimenziója** az altérből kiválasztható lineárisan független elemek maximális száma. Speciálisan a triviális altér dimenziója 0.

Két $n$-dimenziós $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ vektor **skalárszorzata** az $ab := a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ szám. Természetesen $ab = ba$. Azt mondjuk, hogy $a$ és $b$ **ortogonális**, ha skalárszorzatuk 0. Az $A, B \subseteq V$ halmazokról azt mondjuk, hogy egymásra **ortogonálisak** (vagy **merőlegesek**), ha $A$ mindegyik eleme ortogonális $B$ mindegyik elemére. (Ebben az értelemben tehát a háromdimenziós tér egy vízszintes és egy függőleges síkja nem ortogonális egymásra!) Könnyen látszik, hogy ha egy $y$ vektor ortogonális az $x_1, \ldots, x_k$ vektorok mindegyikére, akkor ortogonális ezek bármely lineáris kombinációjára is.

A definícióból rögtön adódik, hogy ha $x_1, \ldots, x_k$ a $V$ vektortér véges sok eleme, akkor a lineáris kombinációjukként előálló elemek halmaza alteret alkot, amit az $x_1, \ldots, x_k$ elemek által **generált altérnek** nevezünk. Ez nem más, mint az $X := \{x_1, \ldots, x_k\}$ halmazt tartalmazó alterek metszete, vagyis a legszűkebb $X$-t magában foglaló altér.

Altereket más módon is előállíthatunk. Legyen $a \in \mathbf{R}^n$ nem-nulla vektor. Az $a$-ra ortogonális elemek $\{x \in \mathbf{R}^n : ax = 0\}$ halmazát, másszóval az $ax = 0$ lineáris egyenlet megoldás megoldás halmazát **origón átmenő** vagy **homogén hipersíknak** nevezzük, melynek (egyik) **normálisa** vagy **normál vektora** $a$. Amennyiben $a$ az $i$-dik egységvektor, úgy az $a$-ra merőleges vektorok halmazát koordináta-hipersíknak hívjuk. Ez tehát mindazon vektorokból áll, amelyek $i$-dik koordinátája 0. Könnyen látszik, hogy egy homogén hipersík alteret alkot. Ebből adódik, hogy homogén hipersíkok metszete is altér. Másszóval, adott $x_1, \ldots, x_k$ vektorok mindegyikére ortogonális vektorok halmaza alteret alkot, melyet az $x_1, \ldots, x_k$ **ortogonális kiegészítő alterének** nevezünk. Ha az $x_i$ vektorok mindegyike valamelyik $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ alakú egységvektor, úgy ezek ortogonális kiegészítő alterét **koordináta-altér**nek hívjuk. Ez tehát koordináta-hipersíkok metszete, vagyis mindazon vektorok halmaza, amelyeknek $k$ előre adott komponense 0. Egy $x$ pontnak az $x_j$ **koordináta** (vagy **tengely**) **menti vetületét** úgy kapjuk, hogy $x$ $j$-dik komponensét 0-re állítjuk. Valójában ez a **belső** vetület, megkülönböztetendő a **külső** vetülettől, amelyet úgy kapunk, hogy az $x$ vektor $j$-dik komponensét eltöröljük. (A tengelymenti belső vetítés tehát a vektorteret egy alterére képezi le, míg a külső vetítés egy másik vektortérre).

Legyenek $U$ és $V$ vektorterek. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : U \to V$ leképezés **lineáris transzformáció** (vagy **leképezés**), ha

1. $x \in U, \lambda \in \mathbf{R}$ esetén $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ és
2. $x, y \in U$ esetén $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $U$ azon elemeinek halmaza, amelyek a $V$ nulla elemébe képződnek le, az $U$-nak alterét alkotják, amely alteret a $\varphi$ leképezés **magterének** neveznek. Hasonlóképpen egyszerű azt belátni, hogy $V$ azon elemei, amelyek valamely $U$-beli elem képeként állnak elő (azaz a $\{\varphi(u) : u \in U\}$ halmaz elemei), a $V$-nek alterét alkotják, amely alteret a $\varphi$ leképezés **képterének** neveznek.

Mese. Egy $x = (x_1, \ldots, x_n)$ szám $n$-esen néha az $\mathbf{R}^n$ $(x_1, \ldots, x_n)$ koordinátájú pontját értjük, néha az origóból az $x$ pontba mutató vektort. Az affin függetlenség a pontok függetlenségét akarja megragadni, a lineáris függetlenség a vektorok függetlenségét. (Két pont éppen akkor affin független, ha különbözőek, három különböző pont affin függetlensége azzal ekvivalens, hogy nincsenek egy egyenesen.) Pontok egy $k$ elemű halmaza pontosan akkor affin független, ha az egyikből a többibe mutató $k - 1$ vektor lineárisan független. Ez azzal ekvivalens, hogy az eggyel magasabb dimenziós, az új koordinátában egy 1-essel kiegészített vektorok lineárisan függetlenek.

## 1.2 MÁTRIXOK, EGYENLETRENDSZEREK

Legyen $A$ $m \times n$-es mátrix, azaz $A$-nak $m$ sora és $n$ oszlopa van. A mátrix $i$-dik oszlopát $a_i$-vel jelöljük, a $j$-dik sorát pedig ${}_ja$-val. Az $A$ **sorterén** az $\mathbf{R}^n$-nek az $A$ sorai által generált alterét értjük, amelynek jele $\mathcal{S}(A)$ vagy $\mathbf{R}^m A$. A sortér tehát az $\{y^t A : y \in \mathbf{R}^m\}$ halmaz. Az $A$ mátrix **nulltere** az $A$ sorainak ortogonális kiegészítő altere, melynek jele $\mathcal{N}(A)$. A nulltér tehát az $Ax = 0$ egyenletrendszer $\{x \in \mathbf{R}^n : Ax = 0\}$ megoldás-halmaza. Az $A$ oszlopai által generált altér az $A$ **oszloptere**, jelölésben $\mathcal{O}(A)$ vagy $A\mathbf{R}^n$, míg az oszlopainak merőleges altere a mátrix **bal nulltere.** Ennek jele $\mathcal{BN}(A)$.

Mostantól fogva azzal a jelölési egyszerűsítéssel élünk, hogy nem különböztetjük meg az oszlop és sor vektorokat. Ennek megfelelően, ha az $Az$ szorzatot tekintjük, akkor a $z$-t oszlopvektornak képzeljük, míg az $yA$ szorzat esetén az $y$-t sorvektornak. Hasonlóképp, két vektor skalárszorzata esetén sem tesszük ki a transzponálási jelet, vagyis az $a$ és $b$ $n$-dimenziós vektorok skalárszorzatát $ab$-vel vagy $ba$-val jelöljük. (Ez az egyszerűsítési megállapodás zavart okozhatna, ha az $a$ vektort $n \times 1$-es mátrixként, a $b$ vektort pedig $1 \times n$-es mátrixként tekintenénk, mert akkor az $ab$ mátrix szorzat egy $n \times n$-es mátrixot jelöl. Szerencsére az $a, b$ vektorok ilyen típusú szorzatára az alábbiakban nem lesz szükségünk, így az említett zavar sem fordulhat elő.)

Valamely $n$-dimenziós $z$ vektor esetén az $Az$ vektor tekinthető úgy, mint az $A$ oszlopainak egy lineáris kombinációja, ahol az $i$-dik oszlop együtthatója a $z$ $i$-dik komponense. Hasonlóképp, egy $m$-dimenziós $y$ vektorra az $yA$ tekinthető, mint az $A$ sorainak egy lineáris kombinációja.

Futólag már említettük, hogy ha egy $z \in \mathbf{R}^n$ vektor ortogonális az $A$ soraira, vagyis ha $Az = 0$, akkor $z$ ortogonális az $A$ sorainak bármely $yA$ lineáris kombinációjára is, azaz $(yA)z = 0$. Valóban, $(yA)z = y(Az) = y0 = 0$.

**Lemma 1.1** *Ha a $z \in \mathbf{R}^n$ nem-nulla vektor ortogonális az $A$ mindegyik sorára (azaz benne van $A$ nullterében, vagyis $Az = 0$), akkor $z$ lineárisan független az $A$ soraitól, (azaz $z$ nincs benne az $A$ sorterében).*

**Biz.** Tegyük fel indirekt, hogy $z$ előáll az $A$ sorainak lineáris kombinációjaként, azaz $z = yA$ valamely $y \in \mathbf{R}^m$-re. Ekkor $0 < zz = (yA)z = y(Az) = 0$, ami ellentmondás. •

Megjegyzendő, hogy a lemmában lényeges feltétel, hogy a valós vagy a racionális test felett vagyunk (legalábbis annyiban, hogy rendezett test felett). A GF(2) (vagyis a kételemű) test felett például az $(1,1)$ vektor ortogonális saját magára.

Figyeljük meg, hogy a sortér és a nulltér az $\mathbf{R}^n$ egymásra merőleges alterei. (Ugyanis, ha egy vektor merőleges a mátrix soraira, akkor merőleges a sorokból készült lineáris kombinációkra is, vagyis a sortér minden elemére). Az 1.1 lemma alapján a sortérnek és a nulltérnek a közös része az egy szem nulla vektorból áll. Analóg módon az oszloptér és a bal nulltér az $\mathbf{R}^m$-nek egymásra merőleges alterei, melyek metszete a triviális altér.

Az $A$ mátrix segítségével megadható egy $\varphi_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ leképezés a $\varphi_A(z) := Az$ képzési szabállyal. Könnyen látszik, hogy $\varphi_A$ lineáris transzformáció, amelynek képtere az $A$ oszloptere, míg magtere az $A$ nulltere. Hasonlóképp bevezethetünk egy ${}_A\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ lineáris transzformációt a ${}_A\varphi(y) := yA$ képzési szabállyal. Ennek képtere az $A$ sortere, míg magtere az $A$ bal nulltere.

Az a kérdés, hogy az $Az = 0$ (homogén lineáris) egyenletrendszernek van-e nem-triviális megoldása azzal ekvivalens, hogy az $A$ oszlopai lineárisan összefüggőek-e vagy sem. Egy másik interpretáció szerint az $Az = 0$ azt jelenti, hogy $z$ ortogonális az $A$ soraira, vagyis az $Az = 0$ nem-triviális megoldhatóságának kérdése azzal ekvivalens, hogy az $A$ nulltere (azaz a $\varphi_A$ leképezés magtere) nem-triviális-e.

**TÉTEL 1.2** *Legyen $A$ $m \times n$-es mátrix, ahol $1 \leq m < n$. Ekkor az $Az = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem-triviális megoldása. (Másszóval $m$-nél több $m$-dimenziós vektor mindig lineárisan összefüggő. Még másképp, $A$ nulltere nem-triviális.)*

**Biz.** $m$ szerinti indukciót használunk. Amennyiben $m = 1$, a tétel triviális. Legyen tehát $m > 1$ és tételezzük fel, hogy a tétel érvényes minden olyan mátrixra, amelynek $m$-nél kevesebb sora van.

A tétel állítása triviális, ha $A$-nak van egy csupa 0-ból álló oszlopa, így feltesszük, hogy nem ez a helyzet. Figyeljük meg, hogy ha az $A$ egyik sorát helyettesítjük a sor $\lambda$-szorosával valamilyen $\lambda \neq 0$ számára, akkor a mátrix nulltere, vagyis az $Az = 0$ rendszer megoldásainak halmaza változatlan marad. Hasonló kijelentés érvényes, ha a mátrix egyik sorát hozzáadjuk egy másik sorához, vagy ha két sort felcserélünk. Ezen műveletek ismételt alkalmazásával egy olyan $A_1$ mátrix nyerhető, amelynek nulltere ugyanaz, mint az $A$ mátrixé, és amelynek első oszlopa az $(1,0,0,\ldots,0)^t$ $m$-dimenziós egység-vektor. Legyen $A'$ az a mátrix, amely az $A_1$-ből keletkezik az első sor és az első oszlop eltörlésével. Az $A'$-re az indukciós feltevés szerint érvényes a tétel, azaz létezik egy $(n-1)$-dimenziós $z'$ nem-nulla vektor, amelyre $A'z' = 0$.

Jelölje $a'$ azt a vektort, amely az $A_1$ első sorából keletkezik az első (1-es) komponens eltörlésével és legyen $\alpha = -a'z'$. Ekkor a $z := (\alpha, z')$ vektor nem-nulla vektor, amelyre $A_1 z = 0$, tehát $Az = A_1 z$ miatt $Az = 0$. •

Megjegyzendő, hogy a fenti bizonyítás könnyen algoritmussá alakítható az $Az = 0$ egy nem-triviális megoldásának megkeresésére. Ez a Gauss-elimináció speciális esete homogén lineáris egyenletrendszer egy nemtriviális megoldásának megtalálására.

**Következmény 1.3** *Ha egy mátrix oszlopai is és sorai is lineárisan függetlenek, akkor a mátrix négyzetes.*

**Biz.** Valóban, ha például több oszlop volna, mint sor, akkor az 1.2 tétel szerint az oszlopok lineárisan összefüggnének. •

**Következmény 1.4** *Ha az $A'$ mátrixból lineárisan függetlenül kiválasztható sorok maximális száma kisebb, mint az oszlopok száma, akkor az $A'z = 0$ rendszernek van nem-triviális megoldása.*

**Biz.** Válasszunk ki maximálisan sok lineárisan független sort és jelölje a mátrixukat $A$. Az 1.2 tétel szerint $Az = 0$-nak van nem-triviális megoldása. Ez az eredeti $A'z = 0$-nak is megoldása, hiszen $A'$ minden sora lineárisan függ $A$ soraitól. •

**Lemma 1.5** *Tegyük fel, hogy az $A$ mátrixban az első $r$ oszlop lineárisan független és a többi oszlop lineárisan függ ezektől. Hasonlóképp legyen az első $s$ sor lineárisan független és a többi sor lineárisan függjön ezektől. Ekkor az első $r$ oszlop és az első $s$ sor által meghatározott $A_1$ részmátrix oszlopai is és sorai is lineárisan függetlenek.*

**Biz.** Szimmetria miatt elég kimutatni, hogy az $A_1$ oszlopai lineárisan függetlenek. Töröljük el az $a_{r+1},\ldots,a_n$ oszlopokat. Továbbra is érvényes, hogy mindegyik sorvektor lineárisan függ az első $s$ sortól. Így ha egy vektor ortogonális az első $s$ sorra, akkor ortogonális a többi sorra is, vagyis ha az $A_1$ oszlopai lineárisan összefüggnének, akkor az $A$ mátrix első $r$ oszlopa is lineárisan összefüggne, ellentmondásban a feltevéssel. •

Az 1.3 következmény és az 1.5 lemma kombinációjából kapjuk a következőt.

**TÉTEL 1.6** *Egy $A$ mátrix lineárisan független oszlopainak maximális száma egyenlő a lineárisan független sorok maximális számával.*

Ezt a közös maximális számot $r(A)$-val jelöljük és a mátrix **rangjának** nevezzük.

Ezen meggondolásokból még egy fontos tulajdonság kiolvasható. Tegyük fel, hogy a mátrixból egymás után választunk sorokat, csak arra ügyelve, hogy a kiválasztott sorok lineárisan függetlenek legyenek. Ezt egészen addig tesszük, amíg már több sor nem választható ki, azaz amikor már a nem kiválasztott sorok mindegyike lineárisan függ a kiválasztott soroktól. Ekkor, függetlenül a közbenső választási döntéseinktől, a kiválasztott lineárisan független sorok száma mindig ugyanaz lesz, nevezetesen az $A$ mátrix rangja. (Másszóval a mohó algoritmus mindig maximális sok lineárisan független sort fog megtalálni.) Ennek igazolásához tegyük fel, hogy az algoritmus mondjuk az első $s$ sort választotta ki és legyen indirekt $s < r := r(A)$. Feltehetjük, hogy az $A$ első $r$ oszlopa lineárisan független. De ekkor ellentmondásban vagyunk az 1.5 lemmával. Ebből az is következik, hogy az $A$ sorterének a dimenziója egyenlő a mátrix rangjával (ami egyenlő a mátrix oszlopterének dimenziójával.)

**Következmény 1.7** *Egy mátrix rangja nem változik, ha hozzáveszünk egy új oszlopot, amely lineárisan függ az oszlopoktól, vagy ha elhagyunk egy meglévő oszlopot, amely lineárisan függ a többi oszloptól. Analóg állítás érvényes sorokra.* •

**TÉTEL 1.8** *Ha egy $m \times n$-es $A$ mátrix sorai lineárisan függetlenek (azaz $r(A) = m$), akkor tetszőleges $n$-dimenziós $b$ vektorra az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása (ami $b \neq 0$ esetben azzal ekvivalens, hogy $b$ lineárisan függ az $A$ oszlopaitól.) Ha $m = n$, akkor a megoldás egyértelmű.*

**Biz.** Ha $b = 0$, akkor $x = 0$ megoldás, így feltesszük, hogy $b \neq 0$. Az 1.6 tétel miatt $A$-nak van $m$ lineárisan független oszlopa. Tegyük fel, hogy az első $m$ oszlop lineárisan független. Láttuk, hogy $m$-nél több $m$ dimenziós vektor lineárisan összefüggő, így az $a_1, \dots, a_m, b$ vektorok lineárisan összefüggőek. Egy ilyen nem-triviális lineáris összefüggésben a $b$ együtthatója nem lehet 0, mert ez azt jelentené, hogy az $a_1, \dots, a_m$ vektorok lineárisan összefüggőek, ellentétben a feltevéssel. Ha viszont a $b$ együtthatója nem nulla, akkor $b$ kifejezhető az $a_i$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Az $m = n$ esetben az egyértelműség bizonyításához tegyük indirekt fel, hogy létezik két megoldás is. Ekkor ezek $z$ különbsége nem-nulla és $Az = 0$, vagyis az $A$ oszlopai lineárisan összefüggőek, de ekkor a sorai is, ellentétben a feltevéssel. •

Egy négyzetes mátrixot **szingulárisnak** neveznek, ha sorai (illetve ezzel ekvivalensen, oszlopai) lineárisan összefüggnek.

Az 1.8 tétel általánosításához tegyük ismét fel, hogy az $A$ mátrixnak $m$ sora és $n$ oszlopa van (lehet $m = n$), de a sorok lineáris függetlenségét nem tételezzük fel.

**TÉTEL 1.9** *A következők ekvivalensek.*
*(A) Az $Ax = b$ egyenletrendszernek létezik megoldása.*
*(B) $r(A) = r([A, b])$,* (ahol $[A, b]$ az a mátrix, amely $A$-ból áll elő a $b$ oszlop hozzávételével).
*(C) Nem létezik olyan $y$, amelyre $yA = 0$, $yb \neq 0$.*

**Biz.** (B)→(A). Tekintsünk $A$-nak $r(A)$ lineárisan független oszlopát. $r(A) = r([A, b])$ azt jelenti, hogy $b$ lineárisan függ ezektől, tehát függ az $A$ oszlopaitól, vagyis (A) fennáll.

(A)→(C). Ha létezik olyan $x$ és $y$, amelyekre $Ax = b$ és $yA = 0$, akkor $0 = (yA)x = y(Ax) = yb$.

(C)→(B). Tegyük fel indirekt, hogy $r(A) < r([A, b])$. Válasszunk ki $[A, b]$-nek $r(A) + 1$ lineárisan független sorát és legyen $[A_1, b_1]$ az általuk alkotott részmátrix. $A_1$ sorai már lineárisan összefüggnek, hiszen $A$-nak nincsen $r(A) + 1$ darab lineárisan független sora. De ekkor létezik olyan $y_1 \neq 0$ vektor, amelyre $y_1 A_1 = 0$. $[A_1, b_1]$ sorainak lineáris függetlensége miatt $y_1[A_1, b_1] \neq 0$, azaz $y_1 b_1 \neq 0$. Egészítsük ki $y_1$-t 0 komponensekkel egy $y$ $m$-dimenziós vektorrá. Erre $yA = 0, yb \neq 0$, ellentmondásban (C)-vel. •

Az 1.9 tételben az (A)-beli problémát **primál** problémának nevezzük. Ez tehát azt kérdezi, hogy a $b$ oszlopvektor benne van-e az $A$ oszlopainak alterében. A (C)-beli problémát **duál** (vagy **duális**) problémának hívjuk. Ez azt kérdezi, hogy létezik-e olyan $y$ vektor, amely $A$ valamennyi oszlopára merőleges, ugyanakkor $b$-re nem, másszóval, hogy létezik-e olyan homogén hipersík (melynek normálisa $y$), amely tartalmazza $A$ minden oszlopát, de $b$-t nem. Fontossága miatt megismételjük az 1.9 tételből az (A) és (C) feltételek ekvivalenciáját és direkt bizonyítást adunk rá.

**TÉTEL 1.10 (Fredholm féle alternatíva tétel)** *Az $Ax = b$ rendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha nem létezik olyan $y$, amelyre $yA = 0$, $yb \neq 0$. Ekvivalensen, egy [ $b$ ] vektor vagy benne van egy altérben* [melyet az $A$ oszlopai generálnak], *vagy elválasztható tőle* [egy $y$ normálisú] *homogén hipersíkkal abban az értelemben, hogy a hipersík az alteret tartalmazza, de a vektort nem.*

**Biz.** Egyszerre nem létezhet a szóbanforgó $x$ és $y$, mert akkor $0 = (yA)x = y(Ax) = yb \neq 0$.

Annak igazolására, hogy a primál és a duál probléma egyike biztosan megoldható az $A$ sorainak $m$ száma szerint indukciót használunk. Az $m = 1$ eset könnyű gyakorlat. Szintén egyszerűn látszik a tétel, ha $A$ azonosan nulla.

Tegyük most fel, hogy $A$-nak van nemnulla eleme, hogy $m \geq 2$, és hogy kevesebb sorú márixokra a tétel igaz. Sor- és oszlopcserékkel elérhetjük, hogy $a_{11} \neq 0$. Könnyű ellenőrizni, hogy az egyenletrendszer egy sorát nemnulla számmal szorozva a primál megoldáshalmaz nem változik. A duál megoldáshalmaz ilyenkor változhat ugyan, de a duál probléma megoldhatósága nem (tehát az eredeti duál akkor és csak akkor oldható meg, ha a módosított). Ugyanez a két kijelentés érvényes, ha az egyik egyenletet hozzáadjuk egy másikhoz. Ezek alapján feltehetjük, hogy $a_{1,1} = 1$ és az első oszlop többi eleme 0. Tekintsük az első sor törlésével keletkező $A'x' = b$ rendszert. Indukcióból kapjuk, hogy vagy ez, vagy pedig a duális $\{y'A' = 0, y'b' \neq 0\}$ rendszer megoldható. Amennyiben létezik $x'$, úgy ennek első komponensét szabadon változtathatjuk , hiszen $A'$ első oszlopa nulla. Emiatt ezt a komponenst olyannak tudjuk választatni, hogy az $Ax = b$ rendszerből kihagyott első egyenlet is teljesüljön. Tehát ha a redukált primál megoldható, akkor az eredeti is. Ha viszont a redukált duálisnak létezik egy $(m-1)$ dimenziós $y'$ megoldása, akkor az $y := (0, y')$ az eredeti duálisnak megoldása. •

**Megjegyzések** Az alternatíva tételt a szemléletes megfogalmazás alapján hívhatjuk szeparációs tételnek is. Később látni fogjuk, hogy jóval általánosabb szeparációs tételek is léteznek. Algebrai tételek ilyen jellegű geometriai szemléltetése sokszor hozzájárul magának a tételnek a megsejtéséhez, megkönnyíti a tétel megértését, és segíti a megjegyzést is. Ugyanakkor a három-dimenziós geometriai tartalom kézenfekvősége önmagában egyáltalán nem jelenti azt, hogy az általános tétel triviális lenne, vagy hogy egyáltalán igaz! A geometriai szemlélet sugallta kockázatok illusztrálására tekintsük a következő problémát. Síkban két hegyesszöget bezáró egységvektor nyilván beforgatható a nemnegatív síknegyedbe. Némi erőfeszítéssel belátható, hogy a tér három páronként hegyesszöget bezáró egységvektora beforgatható a nemnegatív térnyolcadba. Ahhoz, hogy megfogalmazzuk a magasabb dimenziós általánosítást, lineáris algebrában két $n$-dimenziós vektort akkor tekintünk hegyesszöget bezárónak, ha skaláris (belső) szorzatuk pozitív, míg a forgatás egy ortonormált lineáris transzformációnak felel meg. Ezért a kézenfekvő általánosítás így hangzik: *az $n$-dimenziós térben $n$ páronként hegyesszöget bezáró egységvektorhoz van olyan ortonormált lineáris transzformáció, amely mind az $n$ vektort nemnegatív vektorba transzformálja.* Be lehet bizonyítani, hogy ez az állítás érvényes négy dimenzióban is, aminek fényében talán meglepő, hogy magasabb dimenzióban már nem mindig létezik a kívánt forgatás.

**Feladat 1.1** *Igazoljuk, hogy $r(Y \cdot A) \leq r(A)$!*

**Feladat 1.2** *Igaz-e, hogy az $Ax = 0$ egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik semelyik koordinátájában sem nulla megoldása, ha $A$ minden oszlopa lineárisan függ a többitől?*

**TÉTEL 1.11** *Egy $A$ $n \times n$-es nem-szinguláris négyzetes mátrix első $m$ sora által alkotott részmátrixot jelölje $A_1$, míg a maradékot $A_2$. Tegyük fel, hogy az $A_1$ minden sora ortogonális $A_2$ minden sorára. Ekkor $A_1$ sortere éppen az $A_2$ nulltere és $A_1$ nulltere éppen az $A_2$ sortere.*

**Biz.** Mivel az állítás második fele az elsőből következik az $A_1$ és $A_2$ szerepének felcserélésével, csupán az első rész bizonyítására szorítkozunk. A feltevés szerint $A_1$ minden sora ortogonális $A_2$ minden sorára, így $A_1$ sorainak lineáris kombinációja is ortogonális az $A_2$ soraira, azaz $A_1$ sortere része $A_2$ nullterének. A fordított irányú tartalmazás igazolásához legyen $z \in \mathcal{N}(A_2)$, azaz $A_2 z = 0$. Mivel $A$ nem-szinguláris, az 1.8 tétel alapján létezik $y = (y_1, y_2)$, amelyre $yA = z$.

Most tehát $yA = z$ ortogonális $A_2$ soraira, és $y_1 A_1$ is ortogonális $A_2$ soraira, ezért $y_2 A_2 = yA - y_1 A_1$ is ortogonális $A_2$ soraira. Az 1.1 lemma alapján az $A_2$ sorainak egy nemnulla lineáris kombinációja nem lehet ortogonális $A_2$ minden sorára, így $y_2 A_2$ szükségképpen 0, azaz $z = y_1 A_1$, vagyis $z$ benne van $A_1$ sorterében. •

**TÉTEL 1.12** *Legyen $A_1$ olyan $m \times n$-es mátrix $(m < n)$, amelynek sorai lineárisan függetlenek. Ekkor létezik olyan $(n-m) \times n$ méretű $A_2$ mátrix, amelynek sorai ortogonálisak az $A_1$ soraira és amely az $A_1$-gyel együtt egy $n \times n$-es nem-szinguláris mátrixot alkot. (Az $A_2$ sortere éppen az $A_1$ sorterének az ortogonális kiegészítője.)*

**Biz.** Az 1.2 tétel szerint van olyan $z_1 \in \mathbf{R}^n$ nemnulla vektor, amely ortogonális az $A_1$ soraira (magyarul az $A_1 z = 0$ rendszernek van nem-triviális megoldása.) Természetesen ekkor $z_1$ lineárisan független $A_1$ soraitól. Egészítsük ki az $A_1$ mátrixot a $z_1$ sorvektorral. Miután $z_1$ lineárisan független az $A_1$ soraitól, a megnövelt $A_1'$ mátrix sorai is lineárisan függetlenek. Amennyiben $A_1'$-nek még mindig kevesebb, mint $n$ sora van, az 1.2 tétel alapján ismét létezik egy olyan $z_2$ vektort, amely ortogonális az $A_1'$ soraira.

Ezt az eljárást $(n-m)$-szer alkalmazva olyan $z_1, \ldots, z_{n-m}$ vektorokat kapunk, melyek mindegyike ortogonális az $A_1$ valamennyi sorára valamint egymásra is, továbbá a végül kapott $n \times n$-es mátrix sorai lineárisan függetlenek. Ezen konstrukció alapján $z_i$ $(i = 1, \ldots, n-m)$ sorvektorokból álló $A_2$ mátrix teljesíti a tétel kívánalmait. •

A két tétel összevetéséből adódik, hogy az $A_1 x = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza pontosan a $z_1, z_2, \ldots, z_{n-m}$ vektorok lineáris kombinációinak halmaza. Az is következik, hogy az $n$-dimenziós tér tetszőleges $Q$ $m$-dimenziós alterének létezik egy egyértelműen meghatározott $Q^{\perp}$ $n-m$-dimenziós ortogonális kiegészítő altere. $\mathbf{R}^n$ minden eleme egyértelműen áll elő egy $Q$ és egy $Q^*$-beli elem összegeként.

**Feladat 1.3** *Tegyük fel, hogy az 1.12 tételbeli $A_1$ mátrix $(I_m, B)$ alakú, ahol $I_m$ az $m \times m$-es egységmátrixot jelöli, míg $B$ tetszőleges $m \times (n-m)$-es mátrix. Igazoljuk, hogy az $A_2 := [B^T, -I_{n-m}]$ kielégíti a tétel kívánságait, azaz $A_2$ sortere az $A_1$ sorterének ortogonális kiegészítője.*

## 1.3 ALTEREK, AFFIN ALTEREK

Az 1.2 tételből következően az $\mathbf{R}^n$ térben legfeljebb csak $n$ vektor választható ki lineárisan függetlenül. Miután az $n$ egységvektor lineárisan független, az $\mathbf{R}^n$ dimenziója $n$. Az is következik, hogy tetszőleges $A$ altér véges sok elem generált altereként áll elő: válasszunk ki maximálisan sok lineárisan független elemét $A$-nak (ezek száma legfeljebb $n$), minden elem ezektől lineárisan függ, azaz $A$ a kiválasztott elemek által generált altér.

Az 1.11 és 1.12 tételekből látjuk, hogy minden altér nemcsak generált altérként áll elő, hanem vektorok ortogonális altereként is. (Ez annak a szemléletes geometriai ténynek az általánosítása, hogy a síkban egy origón átmenő egyenest egyrészt meg lehet adni $ax + by = 0$ alakban, másrészt $\alpha(-b, a)$ "paraméteres" alakban.) Az is következik, hogy $k$ darab lineárisan független vektorra ortogonális altér rangja $n-k$. Speciálisan, ha $A$ $n-1$ rangú mátrix, akkor az $Az = 0$ megoldás-halmaza egy-dimenziós altér, másnéven egy **origón átmenő egyenes,** amelynek pontjai valamely $a$ vektorra $\{\lambda a : \lambda \in \mathbf{R}\}$ alakban adhatók meg (ahol $a$ az $A$ soraira merőleges nem-nulla vektor)

Az 1.9 tétel választ ad arra a kérdésre, hogy egy egyenletrendszernek mikor van megoldása. Feltéve, hogy létezik megoldás, mi mondható a megoldás-halmazról?

**Affin altéren** vagy **eltolt altéren** (vagy **affin halmazon**) egy altér eltoltját értjük. Vagyis $C$ affin altér, ha létezik olyan $A$ altér és $a$ vektor, amelyekre $C = \{x : x = z + a$ valamilyen $z \in A$ vektorra $\}$, vagyis $C = A + \{a\}$. Ilyenkor könnyen látható, hogy $C$ bármely $c$ elemére $C - \{c\} = A$, vagyis az altér, amelynek eltolásából a $C$ keletkezik, egyértelműen meghatározott. A $C$ affin altér **dimenzióján** a definiáló $A$ altér dimenzióját értjük.

**Gyakorlat 1.4** *Igazoljuk, hogy affin alterek (a) nemüres metszete és (b) összege is affin altér!*

Véges sok pont affin kombinációinak halmaza affin alteret alkot, ez nem más, mint a véges sok pontot tartalmazó legszűkebb affin altér. Két (különböző) pont affin kombinációinak halmazát a két pont **összekötő egyenesének** nevezzük, míg a két pont konvex kombinációinak halmaza a két pontot összekötő **szakasz.** Egy egy-dimenziós affin halmazt **egyenesnek** nevezünk.

Könnyen látszik, hogy egy $C$ halmaz akkor és csak akkor affin altér, ha van olyan $c$ eleme, amelyre $C - \{c\}$ altér. A $C$ halmaz akkor és csak akkor affin altér, ha bármely két elemének affin kombinációja $C$-ben van, ami azzal ekvivalens, hogy bármely véges sok elemének affin kombinációja $C$-ben van.

**TÉTEL 1.13** *Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszernek van egy $x_0$ megoldása. Ekkor a megoldások $M := \{x : Ax = b\}$ halmaza az $\mathbf{R}^n$ tér affin altere, nevezetesen az $A$ nullterének eltoltja. Másként fogalmazva, az $Ax = 0$ homogén egyenletrendszer egy tetszőleges megoldását $x_0$-hoz adva megoldást kapunk, és $M$ minden tagja így áll elő. Megfordítva, minden affin altér előáll egy egyenletrendszer megoldás-halmazaként.*

(Figyeljük meg, hogy az 1.9 tételben az $Ax = b$ megoldhatóságának az oszlopok terét magában foglaló $\mathbf{R}^m$ térben volt szemléletes jelentése, a megoldások halmazát viszont sorteret magában foglaló $\mathbf{R}^n$ térben szemléltetjük affin altérként.)

**Biz.** Legyen $z \in \mathcal{N}(A)$, azaz $Az = 0$. Ekkor nyilván $A(z + x_0) = b$, vagyis $\mathcal{N}(A) + \{x_0\} \subseteq M$. Legyen most $x_1 \in M$. Ekkor $z := x_1 - x_0$-ra fennáll $Az = 0$, tehát $x_1$ előáll mint az $x_0$ és az $\mathcal{N}(A)$-beli $z$ elem összege. Ezzel a tétel első felét igazoltuk.

Tekintsünk most egy $C$ affin alteret, amely valamely ${}_1a, \ldots, {}_ma$ vektorok által generált altér $x_0$ vektorral történő eltolásával áll elő, vagyis az $\{yA + x_0 : y \in \mathbf{R}^m\}$ alakú vektorok halmaza, ahol $A$

jelöli az ${}_1a, \dots, {}_ma$ sorokból álló mátrixot. Az 1.12 tétel szerint van olyan $Z$ mátrix, amelynek nulltere éppen az $A$ sortere. Legyen $b := Zx_0$. Ekkor $C$ éppen a $Zx = b$ egyenletrendszer megoldás-halmaza. •

**Következmény 1.14** *Amennyiben az $Ax = b$ egyenletrendszernek van megoldása, úgy az $M$ megoldáshalmaz dimenziója $n - r(A)$, ahol $n$ az oszlopok száma.*

**Biz.** Az előbbi tétel szerint $M$ az $A$ nullterének az eltoltja. Álljon $A_1$ az $A$-nak $r(A)$ lineárisan független sorából. Nyilván $A$-nak és $A_1$-nek ugyanaz a nulltere. Az 1.11 és 1.12 tételek alapján $A_1$ nullterének rangja $n - r(A_1) = n - r(A)$. •

**Gyakorlat 1.5** *Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ rendszer megoldható. Legyen $A'$ az $A$ maximálisan sok lineárisan független sorából alkotott részmátrix és $b'$ a $b$ ennek megfelelő része. Ekkor az $A'x = b'$ tetszőleges $x^*$ megoldására $Ax^* = b$-nek.*

**Feladat 1.6** *Tegyük fel, hogy az $Ax = b$ egyenletrendszer megoldható. Azt mondjuk, hogy az $ax = \beta$ egyenlet* **logikai következménye** *$Ax = b$-nek, ha ennek minden megoldása kielégíti $ax = \beta$-t (másszóval, ha az $\{x : Ax = b\}$ affin altér benne van az $\{x : ax = \beta\}$ hipersíkban). Azt mondjuk, hogy $ax = \beta$* **lineáris következménye** *$Ax = b$-nek, ha előáll az $Ax = b$ egyenleteinek lineáris kombinációjaként, azaz ha létezik olyan $y$ vektor, amelyre $yA = a$ és $yb = \beta$. Igazoljuk, hogy $ax = \beta$ akkor és csak akkor lineáris következmény, ha logikai.*

## 1.4 KÚPOK, POLIÉDEREK

A lineáris egyenletrendszerek vizsgálatában alapvető volt az a gondolat, hogy a problémához intuitív geometriai képet tudtunk rendelni; ez vezetett a vektortér, altér, affin altér fogalmához és vizsgálatához. Nem meglepő, hogy a geometriai szemléltetés a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek vizsgálatához is lényeges segítséget jelent. Ezek előkészítésére bevezetünk néhány fontos fogalmat.

Könnyen látszik, hogy az alterek (illetve az affin halmazok) éppen azok a halmazok, melyek zártak a lineáris (ill. affin) kombináció képzésre. Pontok egy halmazát akkor nevezzük **konvexnek,** ha zárt a konvex kombináció képzésre, vagyis akárhogy véve a halmaznak véges sok elemét, ezek konvex kombinációja is a halmazhoz tartozik. Hasznos kis gyakorlat belátni, hogy egy halmaz akkor és csak akkor konvex, ha bármely két elemének bármely konvex kombinációja a halmazhoz tartozik. Könnyen ellenőrizhető, hogy konvex halmazok metszete is konvex. Mivel $\mathbf{R}^n$ konvex, tetszőleges $C$ halmaz benne van egy őt tartalmazó legszűkebb konvex halmazban, nevezetesen a $C$-t tartalmazó konvex halmazok metszetében. Ezt a $C$ **konvex burkának** (convex hull) nevezzük és $\mathrm{konv}(C)$-vel jelöljük. Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathrm{konv}(C)$ nem más, mint a $C$ elemeinek felhasználásával készült konvex kombinációk halmaza.

Amennyiben $a \in \mathbf{R}^n$ nem-nulla vektor, $\beta$ tetszőleges szám, az $ax = \beta$ lineáris egyenlet megoldáshalmazát **hipersíknak** (hyperplane) nevezzük. Ez az $\{x \in \mathbf{R}^n : ax = 0\}$ homogén hipersík eltoltja. A fentiek alapján a hipersík dimenziója $n - 1$ (innen az elnevezés). Következik, hogy az affin altér hipersíkok metszetének tekinthető. Az $\{ax \leq \beta\}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldás halmazát, vagyis az $\{x : ax \leq \beta\}$ halmazt (zárt) **féltérnek** (closed halfspace) hívjuk, melynek $\{x = Ax = b\}$ a **határoló síkja**, és amelynek normálisa $a$. (Ha szigorú egyenlőtlenség van, **nyílt féltérről** beszélünk). A $\beta = 0$ esetben azt mondjuk, hogy a féltér **homogén**.

Vektorok egy nemüres $C$ halmazát **kúpnak** (cone) nevezzük, ha $C$ zárt nemnegatív számmal történő szorzásra nézve, vagyis ha $C$ bármely elemének nem-negatív számszorosa is $C$-hez tartozik. Ebből adódik, hogy az origó mindig a kúpban van. A kúp **triviális,** ha egyetlen pontja van (az origó). Amennyiben a kúp még az összeadásra is zárt, **konvex kúpról** beszélünk. Ez könnyen láthatóan valóban konvex. Miután a továbbiakban csak konvex kúpokról lesz szó, kúpon automatikusan konvex kúpot fogunk érteni. Egy altér például mindig kúp. (Ez a definíció egyrészt általánosabb annál, mint amit szokásos geometriai kúp fogalmunk diktálna, hiszen megenged olyan alakzatokat is, melyeket síkok határolnak. Például a síkban a nemnegatív síknegyed kúp. Másrészt szűkebb, mert kúp eltoltja nem kúp). Két tipikus példa kúpra:

**Végesen generált kúp** (röviden, **generált kúp**): Véges sok $a_1, \ldots, a_n$ vektor nemnegatív lineáris kombinációinak halmaza. Jelölése : kúp$(a_1, \ldots, a_n) := \{z : z = \sum_i \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0\}$. Például, egy $m \cdot n$-es $A$ mátrixra $\{Ax : x \geq 0\} = A\mathbf{R}_+^n$ az $A$ oszlopvektorainak kúpja, míg $\{yA : y \geq 0\} = \mathbf{R}_+^m A$ a sorvektoroké.

**Metszetkúp** (másnéven **poliéder-kúp**): Véges sok homogén féltér metszete; $\{x : b_1x \leq 0, \ldots, b_mx \leq 0\}$. Például, $\{x : Ax \leq 0\}$ vagy $\{y : yA \leq 0\}$.

Megjegyzendő, hogy ha $\{p_1, p_2, \ldots, p_t, a_1, \ldots a_n\}$ vektorok esetén a $\{z : z = \sum_j \mu_j p_j + \sum_i \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0\}$ halmaz generált kúp (vagyis ha csak bizonyos együtthatókra követelünk meg nemnegativitást), éspedig a $\{p_1, -p_1, \ldots, p_t, -p_t, a_1, \ldots, a_n\}$ vektorok kúpja. Speciálisan, a $p_1, \ldots, p_t$ vektorok által generált altér is generált kúp. Hasonlóképp, $\{q_1, \ldots, q_t, b_1, \ldots, b_m\}$ vektorok esetén az $\{x : q_1x = 0, \ldots, q_tx = 0, b_1x \leq 0, \ldots, b_mx \leq 0\}$ halmaz metszetkúp, éspedig $\{x : q_1x \leq 0, -q_1x \leq 0, \ldots, q_tx = 0, -q_tx \leq 0, b_1x \leq 0, \ldots, b_mx \leq 0\}$. Speciálisan, a $q_1, \ldots, q_t$ vektorok kiegészítő altere metszetkúp.

Korábban láttuk, hogy egy generált altér mindig előáll ortogonális kiegészítő altérként és megfordítva. E tétel szép általánosításaként bebizonyítjuk majd, hogy egy metszetkúp mindig előáll generált kúpként és egy generált kúp metszetkúpként. Ez az ekvivalencia nem nyilvánvaló: például egy metszetkúp zártsága rögtön látszik abból, hogy a félterek zártak és zárt halmazok metszete is zárt; ugyanakkor egy generált kúp zártságának igazolása nem ilyen kézenfekvő.

Egy $q$ nemnulla vektor esetén a $\{\lambda q : \lambda \in \mathbf{R}_+\}$ generált kúpot **végtelen iránynak** vagy röviden **iránynak** vagy másként **sugárnak** (ray) mondjuk és $\vec{q}$-val jelöljük. A $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_k$ irányok egy **nemnegatív kombinációján** a $q_1, \ldots, q_k$ vektorok egy nemnagatív kombinációjához tartozó irányt értjük. A generált kúp tekinthető véges sok irány nemnegatív kombinációi halmazának. Egy $z$ pontból induló $\vec{q}$ irányú **félegyenesen** a $z + \vec{q} := \{x : x = z + \lambda q, \lambda \in \mathbf{R}_+\}$ halmazt értjük. Tehát az irány egy origóból kiinduló félegyenes, és a félegyenes egy eltolt irány.

Adott $K$ kúphoz hozzárendelhetjük a $K^* := \{x : xz \leq 0 \text{ minden } z \in K \text{ elemre}\}$ halmazt, és ezt a $K$ **polárisának** nevezzük. Könnyen látszik, hogy $K^*$ maga is kúp, és az is, hogy a $K$ kúp polárisának polárisa magában foglalja $K$-t, azaz $K \subseteq (K^*)^*$. Itt nincs szükségképpen egyenlőség, hiszen bármely kúp polárisáról könnyen ellenőrizhetően zárt, így nem zárt $K$ esetén $K \neq (K^*)^*$. A $\sigma(K)$ lezártra viszont bebizonyítható (bár ez már egyáltalán nem evidens), hogy $\sigma(K) = (K^*)^*$, így speciálisan zárt $K$-ra $K = (K^*)^*$.

Az $A$ mátrixra jelölje $G_A$ az $A$ sorai által generált $\{yA : y \geq 0\}$ kúpot, míg $M_A$ az $A$ sorai által definiált $\{x : Ax \leq 0\}$ metszetkúpot. A következő két lemma közvetlenül adódik a definíciókból.

**Lemma 1.15** *A $G_A$ kúp polárisára $(G_A)^* = M_A$.*

**Biz.** Az $M_A$ egy $x$ elemére $Ax \leq 0$, vagyis az $x$-nek az $A$ minden sorával, és így a sorok minden nemnegatív kombinációjával vett skalárszorzata legfeljebb 0, tehát $x$ benne van $(G_A)^*$-ban, és így $M_A \subseteq (G_A)^*$. Megfordítva, $(G_A)^*$ egy $z$ eleme olyan, hogy $A$ minden $a$ sorára $az \leq 0$, azaz $Az \leq 0$, vagyis $z \in M_A$, és így $(G_A)^* \subseteq M_A$. •

**Lemma 1.16** *Az $M_A$ polárisára $(M_A)^* \supseteq G_A$.*

**Biz.** Az $(M_A)^*$ olyan $a$ vektorokból áll, amelyekre az $Ax \leq 0$ minden $x$ megoldására $ax \leq 0$. Speciálisan, az $A$ sorai ilyenek, és így az $A$ soraiból képzett nemnegatív kombinációk is, vagyis $G_A \subseteq (M_A)^*$. •

A 2.5 lemmában ki fogjuk mutatni, hogy valójában $(M_A)^* = G_A$.

**Gyakorlat 1.7** *Legyen $C, D$ két $n$ oszlopból álló mátrix. Ekkor*

$$G_C \subseteq G_D \Rightarrow M_D \subseteq M_C \tag{1.1}$$

*és*

$$G_C \subseteq M_D \Rightarrow G_D \subseteq M_C. \tag{1.2}$$

További két alapvető fogalom:

**Poliéder** (polyhedron, tbsz: polyhedra): Véges sok féltér metszete: $R := \{x : Qx \leq b\}$ ahol $Q$ egy $m \times n$-es mátrix, $b$ $m$-dimenziós vektor. Másszóval a poliéder egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldás-halmaza. A formailag általánosabb, egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket egyaránt tartalmazó $\{Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ rendszer megoldás-halmaza is poliéder, hiszen egy $px = \beta$ egyenlet megoldás-halmaza felfogható úgy, mint a $px \leq \beta$ és a $-px \leq -\beta$ egyenlőtlenségek közös megoldás-halmaza. Egy metszetkúp vagy egy affin altér speciális poliéder.

Figyeljük meg, hogy a fenti definícióból adódóan egy poliéder mindig konvex. Egy poliédert akkor nevezünk **korlátosnak**, ha létezik olyan $K$ pozitív szám, amelyre $|x(i)| \leq K$ a poliéder minden $x$ pontjának mindegyik $x(i)$ komponensére. Egy poliéder (**külső**) **dimenzió**-ján, (röviden dimenzióján) az őt tartalmazó legszűkebb affin altér dimenzióját értjük. A poliéder **belső dimenziója**, a tér benne fekvő affin alterek dimenziójának a maximuma. Például, ha a poliéder egyetlen pontból áll, akkor külső és belső dimenziója is nulla. Általában egy affin altérnek, mint poliédernek a külső és belső dimenziója megegyezik az affin korábban már bevezetett dimenziójával, speciálisan egy hipersík . A síkban a nemnegatív dimenziójával, speciálisan $\mathbf{R}^n$ egy hipersíkjának külső és belső dimenziója is $n-1$. A síkban a nemnegatív síknegyed belső dimenziója 0, külső dimenziója 2. Az $n$-dimenziós térben egy féltér, belső dimenziója $n-1$, külső dimenziója $n$.

**Politop** (polytope): Véges sok pont konvex burka. (Az üres halmazt is politopnak tekintjük, mint nulla darab pont konvex burka.)

A poliéder egy $z$ pontját **csúcsnak** nevezzük, ha nem áll elő a poliéder néhány más pontjának konvex kombinációjaként. Nem nehéz ellenőrizni, hogy ez avval ekvivalens, hogy $z$ nem felezőpontja egy poliéderben lévő szakasznak. A poliédert **csúcsosnak** vagy **hegyesnek** (pointed) mondjuk, ha van csúcsa. Egy altér vagy egy végtelen hasáb például olyan poliéder, amelynek egyáltalán nincsen csúcsa. Ha egy poliéder nem tartalmaz teljes egyenest (félegyenest) akkor azt mondjuk, hogy **egyenes-mentes** (**félegyenes-mentes**). A $\vec{q}$ irányt az $R$ **poliéder egy irányának** nevezzük, ha van $R$-nek olyan $z$ pontja, amelyre $z + \lambda q \in R$ minden pozitív $\lambda$-ra. A poliéder egy $\vec{q}$ irányát **extrémnek** nevezzük, ha nem áll elő a poliéder más irányainak nemnegatív kombinációjaként. Könnyen láthatóan ez azzal ekvivalens, hogy $\vec{q}$ nem áll elő a poliéder két másik irányának nemnegatív kombinációjaként.

Tegyük fel, hogy a $P \subseteq \mathbf{R}^n$ poliéder nemüres, és legyen $c \in \mathbf{R}^n$ olyan vektor, amelyre $\max\{cx : x \in P\}$ létezik és az értéke $\delta$. A $H = \{x : cx = \delta\}$ hipersíkot a poliéder egy **támasz-síkjának** nevezzük. A $H \cap P$ halmazt pedig a poliéder egy **oldalának**. Megállapodás szerint magát $P$-t is tekintsük oldalnak. E definíció szerint három dimenzióban egy poliéder oldalai a határoló lapok, a poliéder élei, a csúcsai, és maga a poliéder. **Minimális oldalon** egy olyan oldalt értünk, amely nem tartalmaz valódi részhalmazként oldalt.

**Gyakorlat 1.8** *Amennyiben $R := \{x : Mx \leq b\}$ nemüres, úgy $R$ akkor és csak akkor az egész tér, ha $r(M) = 0$ (azaz $M$ a csupa-nulla mátrix) és $b \geq 0$.*

**Gyakorlat 1.9** *Két poliéder metszete is poliéder. Két politop vektor-összege is politop.*

**Gyakorlat 1.10** *Két metszetkúp metszete metszetkúp. Két generált kúp vektor-összege generált kúp.*

**Gyakorlat 1.11** *Az $R$ poliéder egy $z$ pontja akkor és csak akkor csúcs, ha nincs olyan $x' \neq 0$ vektor, amelyre $z + x'$ és $z - x'$ is $R$-ben van. (Azaz $z$ nincs $R$-hez tartozó szakasz belsejében).*

**Lemma 1.17** *Ha az $R$ poliéder kúp, akkor metszetkúp.*

**Biz.** Az $R$ megadható $\{x : Qx \leq b\}$ alakban és feltehetjük, hogy $Q$-nak a lehető legkevesebb sora van. Azt igazoljuk, hogy ekkor $b = 0$. Mindenesetre $b \geq 0$, hiszen $0 \in R$ miatt $0 = Q0 \leq b$. Tegyük fel indirekt, hogy $b(i) > 0$ valamelyik $i$-re. A $Q$ minimalitása miatt van olyan $x'$ vektor, amely a $Qx \leq b$ rendszerből egyedül a ${}_iqx \leq b(i)$ egyenlőtlenséget sérti meg, azaz ${}_iqx' > b(i) > 0$. Ekkor az $\alpha := b(i)/{}_iqx'$ számra $x^* := \alpha x'$ benne van $R$-ben, de $2x^*$ például nincs, mert ${}_iq(2x^*) = 2\alpha_i qx' = 2b(i) > b(i)$, ellentmondásban $R$ kúp voltával. •

Álljon itt néhány természetes kérdés, amelyekre választ várunk: Két egyenlőtlenség-rendszer megoldás-halmaza mikor ugyanaz (magyarán, mikor definiálják ugyanazt a poliédert)? Mikor üres egy poliéder? Mi a poliédert tartalmazó legszűkebb affin altér? Mi a poliéderben lévő legbővebb affin altér? Két nemüres poliéder összege mindig poliéder-e? Egy poliéder oldala poliéder? Két politop metszete, ha nemüres, vajon mindig politop-e? Mikor csúcsos egy poliéder? Mikor tartalmaz teljes egyenest és mikor félegyenest? Minden metszetkúp generált kúp? Minden generált kúp metszetkúp? Minden politop poliéder? Minden korlátos nemüres poliéder politop? Két diszjunkt poliéder mindig elválasztható hipersíkkal?

2002. december 17.

**ulinp10**

# 2. Fejezet

# LINEÁRIS EGYENLŐTLENSÉG-RENDSZEREK

## 2.1 A FOURIER-MOTZKIN ELIMINÁCIÓ

A lineáris algebra egyik kiinduló pontja a lineáris egyenletrendszerek vizsgálata volt. A Gauss-elimináció segítségével elvi és algoritmikus választ kaptunk arra a kérdésre, hogy egy lineáris egyenletrendszernek mikor van megoldása. A lineáris programozás egyenletrendszerek helyett lineáris egyenlőtlenség-rendszerekkel foglalkozik. Egy egyenlőtlenség lehet szigorú vagy egyenlőséget is megengedő. A továbbiakban egyenlőtlenségen mindig ezen utóbbit értjük, hacsak kifejezetten az ellenkezőjét nem mondjuk. A legelső kérdés az, hogy egy egyenlőtlenség-rendszernek mikor létezik megoldása, vagy másképp fogalmazva, egy egyenlőtlenség-rendszer megoldásai által alkotott $R$ poliéder mikor nemüres. Az erre vonatkozó eredményeink az egyenletrendszerekről szóló tételek direkt általánosításai lesznek.

Egyenlőtlenség-rendszerekkel kapcsolatban azonban olyan új típusú kérdések is felvetődnek, amelyeknek nincs értelmes speciális esetük egyenletrendszerekre vonatkozólag. Megkérdezhetjük, hogy valamely $c$ vektorra a $cx$ lineáris célfüggvény korlátos-e az $R$ poliéderen (mondjuk) felülről. (Egy affin altéren egy lineáris célfüggvény vagy konstans vagy nem korlátos). Ha korlátos, úgy harmadik célunk meghatározni a $cx$ függvény maximumát (vagy ha alulról korlátos, úgy minimumát) $R$-en. Persze most még azt (a később majd bizonyításra kerülő tényt) sem tudjuk, hogy a szóbanforgó maximum egyáltalán létezik-e: Weierstrass általános tétele szerint egy korlátos zárt halmazon folytonos függvény felveszi maximumát, így miután $cx$ folytonos és egy poliéder bizonyosan zárt, $R$ korlátossága esetén már most is bizonyosak lehetünk a maximum létezésében. Nemsokára ezt is és a nem-korlátos esetet is igazoljuk, Weierstrass nélkül.)

Rátérve a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek vizsgálatára, először a Gauss-elimináció mintájára megadunk egy kézenfekvő eljárást lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldására. A módszer eredetileg Fouriertól származik, amelyet később Motzkin elemzett, így az irodalomban Fourier-Motzkin (röviden FM) eliminációként hivatkozzák. Az eljárás nem csupán egy véges algoritmust jelent, hanem hatékony bizonyítási eszközt is, melynek segítségével néhány alaperedmény könnyen kiadódik.

Legyen $A$ olyan $m \cdot n$-es mátrix ($m \geq 1, n \geq 2$), amelynek első, $a_1$-gyel jelölt oszlopa $0, \pm 1$ értékű. Jelölje rendre $I, J, K$ a sorok azon indexhalmazait, melyekre az $a_1(i)$ értéke $+1, -1$ illetve 0. Készítsük el az $A^{[1]}$ mátrixot a következőképpen. A $K$-nak megfelelő sorok változatlanul kerüljenek be $A^{[1]}$-be. Ezen kívül minden $i \in I$, $j \in J$ választásra legyen ${}_ia + {}_ja$ legyen az $A^{[1]}$ egy sora, melyet jelöljünk ${}_{[ij]}a$-val. Ez azt jelenti, hogy ha $I$ vagy $J$ üres, akkor $A^{[1]}$ egyszerűen az $A$ $K$-nak megfelelő részmátrixa. Általában $A^{[1]}$-nek $m - (|I| + |J|) + |I||J|$ sora van. Figyeljük meg, hogy $A^{[1]}$ első oszlopa csupa nullából áll. Az FM eliminációval kapcsolatban két problémát is vizsgálunk, melyekről majd kiderül, hogy szoros kapcsolatban vannak egymással.

### 2.1.1 A primál feladat

**TÉTEL 2.1** *Az*

$$Ax \leq 0 \tag{2.1}$$

*egyenlőtlenség-rendszernek bármely megoldása az*

$$A^{[1]}x \leq 0 \tag{2.2}$$

*rendszernek is megoldása. A* (2.2) *bármely megoldásának első komponensét alkalmasan megváltoztatva a* (2.1) *egy megoldását kapjuk.*

**Biz.** Az első rész közvetlenül adódik az $A^{[1]}$ konstrukciójából. A második részhez, legyen $z$ megoldása (2.2)-nek. Mivel $A^{[1]}$ első oszlopa 0, feltehető, hogy $z(0) = 0$. A $z(0)$ értékét fogjuk alkalmasan megváltoztatni, hogy (2.1) egy megoldását nyerjük.

Amennyiben $J$ üres, úgy $z$ első komponensét kellően kicsi $\alpha$ értékre változtatva (2.1) egy megoldását kapjuk. (Nevezetesen, $\alpha := \min_{i \in I}\{- {}_i az\}$ megteszi.) Analóg módon, ha $I$ üres, úgy $z(1)$-t kellően nagyra változtatva kapunk (2.1)-nek egy megoldását. Tegyük most fel, hogy sem $I$, sem $J$ nem üres. Állítjuk, hogy

$$\max_{j \in J}\{ {}_j az\} \leq \min_{i \in I}\{- {}_i az\}. \tag{2.3}$$

Valóban, ha volna olyan $i \in I, j \in J$ index pár, amelyre ${}_j az > - {}_i az$, úgy ${}_{[ij]}az = {}_i az + {}_j az > 0$ volna, ellentmondásban a feltevéssel, hogy $z$ megoldása (2.2)-nek. Mármost, ha $\alpha$ tetszőleges olyan szám, amelyre

$$\max_{j \in J}\{ {}_j az\} \leq \alpha \leq \min_{i \in I}\{- {}_i az\}, \tag{2.4}$$

úgy $z$ első komponensét $\alpha$-ra változtatva (2.1) egy megoldását kapjuk. •

**Következmény 2.2** *Tegyük fel, hogy a $Q$ mátrix első oszlopa $0, \pm 1$ értékű, és rendeljük a*

$$Qx' \leq b \tag{2.5}$$

*egyenlőtlenség-rendszerhez a*

$$Q^{[1]}x' \leq b^{[1]} \tag{2.6}$$

*rendszert, ahol $b^{[1]}$ az $A := (Q, b)$ mátrixhoz tartozó $A^{[1]}$ mátrix utolsó oszlopa. Ekkor* (2.5) *bármely megoldása* (2.6)*-nak is megoldása, és a* (2.6) *bármely megoldásának első komponensét alkalmasan megváltoztatva a* (2.5) *egy megoldását kapjuk.*

**Biz.** Egy $x'$ vektor pontosan akkor megoldása (2.5)-nek, ha az $x := (x', -1)$ megoldása $Ax \leq 0$-nak. Továbbá $x'$ pontosan akkor megoldása (2.6)-nek, ha az $x$ megoldása $A^{[1]}x \leq 0$-nak. A alkalmazhatjuk a 2.1 tételt. •

**Következmény 2.3** *Metszetkúp tengelymenti (külső vagy belső) vetülete metszetkúp.*

**Biz.** A 2.1 tétel szerint az $\{x : Ax \leq 0\}$ metszetkúp $x_1$ tengelymenti belső vetülete az $\{x : A^{[1]}x \leq 0\}$ metszetkúp. Miután $A^{[1]}$ első oszlopa 0-vektor, a külső vetület nem más, mint az $\{x' : A'^{[1]}x' \leq 0\}$ metszetkúp, ahol $A'^{[1]}$ jelöli az $A^{[1]}$-ből az első oszlop elhagyásával keletkező mátrixot. •

**Feladat 2.1** *Igazoljuk, hogy poliéder tengelymenti vetülete poliéder.*

**Feladat 2.2** *Igazoljuk, hogy poliéder lineáris képe poliéder.*

**Következmény 2.4** *Generált kúp előáll metszetkúpként.*

**Biz.** Legyen $C$ az $A$ mátrix oszlopai által generált $\{z = Ax : x \geq 0\}$ kúp. Tekintsük az $\{(x, z) : Ax - Iz = 0, x \geq 0\}$ metszetkúpot (az $m + n$ dimenziós térben). Ha ennek vesszük a külső vetületét az $x$ komponenseinek megfelelő koordináták mentén, akkor (definíció szerint) azon $z$ vektorok halmazát kapjuk, melyekhez van olyan nemnegatív $x$, hogy $Ax - Iz = 0$, azaz $z = Ax$. Vagyis a külső vetület éppen $C$, márpedig a 2.3 következmény szerint metszetkúp tengelymenti vetülete metszetkúp. •

**Lemma 2.5** *Az $M_A$ polárisára $(M_A)^* = G_A$.*

**Biz.** Az 1.16 lemmában már láttuk, hogy $(M_A)^* \supseteq G_A$. A megfordításhoz felhasználjuk, hogy a 2.4 következmény alapján $G_A$ előáll metszetkúpként, azaz létezik olyan $B$ mátrix, amelyre $G_A = M_B$. Mármost ha egy $z$ vektor nincs $G_A = M_B$-ben, akkor $B$ valamelyik $b'$ sorára $b'z > 0$. Ugyanakkor az $A$ sorai $G_A = M_B$-ben vannak, ezért az $A$ minden $a$ sorára $Ba \leq 0$ és így $b'a \leq 0$ fennáll, tehát $Ab' \leq 0$, másszóval $b' \in M_A$. De ekkor $b'z > 0$ miatt $z$ nem eleme $(M_A)^*$-nak sem. •

A 2.5 és 1.15 lemmák összevetéséből azonnal kapjuk az alábbit.

**Következmény 2.6** *Ha $C$ generált- vagy metszetkúp, akkor $C^{**} = C$.* •

### 2.1.2 A duál feladat

**TÉTEL 2.7** *Legyen $c \in \mathbf{R}^n$ olyan vektor, amelyre $c(1) = 0$. Ekkor az*

$$\{yA = c, y \geq 0\} \tag{2.7}$$

*rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az*

$$\{y'A^{[1]} = c, y' \geq 0\} \tag{2.8}$$

*rendszer megoldható.*

**Biz.** Legyen $y$ a (2.7) egy megoldása. Az alábbiakban mindegyik esetben a $k \in K$ indexre legyen $y'(k) := y(k)$.

Amennyiben $I$ vagy $J$ üres, úgy $A^{[1]}$ nem más, mint az $A$ mátrix $K$-nak megfelelő részmátrixa, és ezért $yA = y'A^{[1]}$. Tegyük fel, hogy $I$ és $J$ egyike sem üres. Ekkor $y\ {}_1a = c(1) = 0$ miatt $\sum_{i \in I} y_i = \sum_{j \in J} y_j$. Jelöljük ezt a közös összeget $M$-mel. Ha $M = 0$, azaz $y_i = y_j = 0$ fennáll minden $i \in I, j \in J$ indexre, akkor legyen $y'[ij] := 0 (i \in I, j \in J)$-re ismét fennáll $yA = y'A^{[1]}$. Végül, ha $M > 0$, úgy minden $i \in I, j \in J$ index-párra legyen $y'[ij] = y(i)y(j)/M$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ebben az esetben is $yA = y'A^{[1]}$.

Megfordítva, legyen $y'$ a (2.8) megoldása. $k \in K$-ra legyen $y(k) := y'(k)$. Ha $J$ üres, $i \in I$-re legyen $y(i) = 0$, míg ha $I$ üres, $j \in J$-re legyen $y(j) = 0$. Végül, ha sem $I$, sem $J$ nem üres, úgy $i \in I$-re legyen $y(i) := \sum_{j \in J} y'[ij]$ és $j \in J$-re legyen $y(j) := \sum_{i \in I} y'[ij]$. Ismét könnyen látható, hogy $yA = y'A^{[1]}$. •

**Következmény 2.8** *Legyen $Q, b, A$ ugyanaz, mint a 2.2 következményben. Akkor és csak akkor létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yQ = 0, yb = -1$, ha létezik olyan $y' \geq 0$, amelyre $y'Q^{[1]} = 0, y'b^{[1]} = -1$.*

**Biz.** Alkalmazzuk a 2.7 tételt az $A$ mátrixra és $c := (0, 0, \ldots, 0, -1)$ vektorra. •

Az $A$ mátrix sorterében legyen $H_1 := \{x \in \mathbf{R}^n : x(1) = 0\}$, vagyis $H_1$ egy koordináta-hipersík.

**Következmény 2.9** *Generált kúp metszete koordináta-altérrel generált kúp.*

**Biz.** Azt látjuk be, hogy az $A$ mátrix sorai által generált $C$ kúp metszete a $H_1$ hipersíkkal nem más, mint az $A^{[1]}$ mátrix sorai által generált $C_1$ kúp. Valóban, legyen először $c \in C \cap H_1$. Ez azt jelenti, hogy $c(1) = 0$, és létezik $y \geq 0$, melyre $c = yA$. A 2.7 tétel 'akkor' iránya szerint ekkor $c$ benne van $C_1$-ben, tehát $C \cap H_1 \subseteq C_1$. Megfordítva, legyen $c \in C_1$. Mivel $A^{[1]}$ első oszlopa 0, így $c(1) = 0$ vagyis $c \in H_1$), továbbá a 2.7 tétel 'csak akkor' iránya szerint $c \in C$, tehát $C_1 \subseteq C \cap H_1$. •

**Következmény 2.10** *Metszetkúp előáll generált kúpként.*

**Biz.** Legyen $C := \{y \in \mathbf{R}^m : yA \leq 0_n\}$ a metszetkúp, amit elő akarunk állítani generált kúpként, ahol $A$ egy $m \cdot n$-es mátrix. Tekintsük az $n+m$ dimenziós térben a $C_1 := \{(y(A, I_m) + z(I_n, 0_{nm}) : z \geq 0_n\}$ generált kúpot. Ez nem más, mint az olyan $\{yA + z, y\}$ alakú vektorok halmaza, melyekre $z \geq 0_n$. Ennek $M$ metszete az $yA + z = 0_n$ alakú koordináta-altérrel azon $(0_n, y)$ vektorokból áll, melyekhez létezik olyan $z \geq 0_n$, hogy $yA + z = 0_n$, azaz $yA \leq 0_n$, vagyis $M = \{(0_n, y) : y \in C\}$. A 2.9 következmény szerint $M$ generált kúp, így $C$ is az.

**Másik biz.** Az $A$ mátrix sorai által definiált $M_A$ metszetkúpról fogjuk kimutatni, hogy generált kúp. A 2.4 következmény szerint a $G_A$ generált kúp előáll metszetkúpként, azaz létezik egy olyan $B$ mátrix, amelyre $G_A = M_B$. Az 1.15 és 2.5 lemmák alapján $(M_A)^* = G_A = M_B = (G_B)^*$, és így a 2.6 következményt használva $M_A = (M_A)^{**} = (G_B)^{**} = G_B$, vagyis $M_A$ valóban generált kúp. •

### 2.1.3 Kúpok és poliéderek előállítása

**TÉTEL 2.11** *Egy $P \subseteq \mathbf{R}^n$ nemüres halmaz akkor és csak akkor metszetkúp, ha generált kúp. $P$ akkor és csak akkor poliéder, ha előáll egy nemüres politop és egy generált kúp összegeként.*

**Biz.** A tétel első része a 2.4 és 2.10 következmények összetevése. A második részt ebből vezetjük le. A bizonyítás ötlete az, hogy $P$-t beágyazzuk egy eggyel magasabb dimenziós tér $\{(x, \lambda) : x \in \mathbf{R^n}, \lambda = 1\}$ hipersíkjába, ahol az origóval egy kúpot feszít, majd ezen kúpra alkalmazzuk a tétel első részét.

Tegyük fel először, hogy $P := \{x : Ax \leq b\}$ nemüres poliéder. Tekintsük az eggyel magasabb (azaz $n+1$) dimenziós térben az $M := \{(X, \lambda) : Ax - \lambda b \leq 0, \lambda \geq 0\}$ metszetkúpot. Ez a 2.10 következmény szerint előáll generált kúpként. Feltehető, hogy a generáló elemek utolsó ($\lambda$-nak megfelelő) koordinátáinak mindegyike 1 vagy 0. Legyenek a generáló elemek eszerint szétválasztva: $(x_1, 1), \ldots, (x_k, 1)$, $(x'_1, 0), \ldots, (x'_l, 0)$. Tekintsük $\mathbf{R}^n$-ben az $x_i$-k konvex burkaként definiált $Q$ politopot valamint az $x'_j$ vektorok által generált $C$ kúpot.

Azt állítjuk, hogy $P = Q + C$. Valóban, legyen először $z \in P$. Ekkor $(z, 1) = \sum_i \lambda_i(x_i, 1) + \sum_j \mu_j(x'_j, 0)$, ahol $\lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0$. Most tehát $\sum_i \lambda_i = 1$ és ezért $z_1 := \sum_i \lambda_i x_i$ benne van $Q$-ban és $z_2 := \sum_j \mu_j x'_j$ benne van $C$-ben. Így $z$ valóban előáll egy $Q$-beli $z_1$ és egy $C$-beli $z_2$ elem összegeként, azaz $P \subseteq Q + C$. Legyen most $z_1 \in Q$, $z_2 \in C$. Ekkor $(z, 1) = (z_1, 1) + (z_2, 0)$ benne van $M$-ben, azaz $Az - 1 \cdot b \leq 0$ vagyis $z$ benne van $P$-ben, azaz $Q + C \subseteq P$, és így $P = Q + C$.

A fordított irány igazolásához induljunk ki egy $Q$ politopból, amely az $x_1, \ldots, x_k$ elemek konvex burka, és egy $x'_1, \ldots, x'_l$ vektorok által generált $C$ kúpból. Tekintsük az eggyel magasabb dimenziós térben a $\{\sum_i \lambda_i(x_i, 1) + \sum_j \mu_j(x'_j, 0) : \lambda_i \geq 0, \mu_j \geq 0\}$ generált kúpot. Ez a 2.4 következmény szerint előáll metszetkúpként, azaz egy $\{Ax - \lambda b \leq 0, \lambda \geq 0\}$ rendszer megoldás-halmazaként. De ekkor $C+Q$ nem más, mint az $\{x : Ax \leq b\}$ poliéder. •

**Következmény 2.12** *Egy $\mathbf{R}^n$-beli halmaz akkor és csak akkor politop, ha korlátos poliéder.*

**Feladat 2.3** *Igazoljuk, hogy két poliéder összege poliéder.*

### 2.1.4 Az FM eljárás hatékonysága

Algoritmikus szempontból a Fourier-Motzkin eliminációt a $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer megoldására a következőképp lehet használni. Feltehető, hogy a $Q$ első oszlopa $0, \pm 1$ értékű, mert egy egyenlőtlenséget pozitív számmal szorozva ekvivalens rendszert kapunk. Legyen $Q_1$ az a mátrix, amely $Q^{[1]}$-ből keletkezik az első (csupa 0) oszlop eltörlésével. A 2.2 következmény folytán $Qx \leq b$ megoldhatósága ekvivalens $Q_1 x_1 \leq b^{[1]}$ megoldhatóságával, és a 2.1 tétel bizonyítása meg is mondja, hogy egy $x_1$-ből hogyan lehet kiszámolni $Qx \leq b$ egy megoldását. $Q_1$-nek eggyel kevesebb oszlopa van mint $Q$-nak, így az eliminációs lépést $n$-szer kell használni.

Következésképp a Fourier-Motzkin algoritmus véges. Az eljárás hátránya, hogy egyetlen változó eliminálása sok új egyenlőtlenséget hoz be, vagyis menet közben az egyenlőtlenségek száma nagyon felszaporodhat. Sajnos ez nem csak elvi lehetőség, amint a következő példa mutatja. Legyen $p$ pozitív egész és $n := 2^p + p + 2$. $n$ darab változónk lesz: $x_1, \ldots, x_n$. $8\binom{n}{3}$ egyenlőtlenségünk van, mindegyik $\pm x_i \pm x_j \pm x_k \leq b_{ijk}$ alakú, ahol $b_{ijk}$ adott számok. $t$ szerinti indukcióval látható, hogy $t$ változó kiejtése után az új egyenlőtlenségek között szerepelni fog az összes $\pm x_{j_1} \pm x_{j_2}, \ldots, \pm x_{j_s} \leq b_{j_1, \ldots, j_s}$ alakú, ahol $s = 2^t + 2$ és $t + 1 \leq j_1 < j_2 \ldots < j_s \leq n$. Így $p$ lépés után a megmaradt változók száma $n' = n - p = 2^p + 2$ míg az egyenlőtlenségek száma legalább $2^{2^p+2} = 2^{n'}$.

Tapasztalat szerint a FM elimináció legfeljebb csak kis példákon használható, nagyobbakon tipikusan ténylegesen kezelhetetlenül sok egyenlőtlenség keletkezik.

A példában olyan egyenlőtlenség-rendszer szerepelt, amelynek minden sorában három 1 abszolút értékű együttható volt. Érdekes, hogy ha csak két 1 abszolút értékű együttható van minden sorban, akkor a Fourier-Motzkin eljárás polinomiális futásidejű. Egy (sor)vektort nevezzünk **szimplának**, ha vagy egy nemnulla eleme van (és erről feltehető, hogy 1 abszolút értékű), vagy kettő, melyek mindegyike 1 abszolút értékű. Szimpla sorokból álló mátrixot is nevezzünk szimplának. Könnyű megfigyelni, hogy ha a kiindulási mátrix szimpla, akkor az FM eljárás során keletkező új mátrix is az. Miután szimpla vektor csak kevés lehet, ilyen esetben az FM eljárás szimpla mátrixokra polinomiális. Természetesen menetközben a redundáns egyenlőtlenségeket ki kell dobni: ha például az $x_1 + x_2 \leq 3$ és az $x_1 + x_2 \leq 4$ egyenlőtlenségek adódnak ki, akkor az utóbbi felesleges.

Szimpla mátrixokra, egészértékű $b$ esetén azt is el lehet dönteni, hogy a $Qx \leq b$ rendszernek létezik-e egészértékű megoldása. Az az egyetlen különbség, hogy ha menetközben keletkezik mondjuk egy $2x_i \leq \beta$ alakú egyenlőtlenség, akkor ezt az $x_i \leq \lfloor \beta/2 \rfloor$ egyenlőtlenséggel kell helyettesíteni.

### 2.1.5 A 2-SAT probléma

Példaként említhetjük az ún. 2-SAT problémát (2-satisfiability = 2-kielégíthetőség). Ez gráfok nyelvén elmondva azt kívánja eldönteni, hogy egy $M$ teljes párosítással rendelkező $G = (V, E)$ gráf pontjai közül ki lehet-e választani $|M|$ darabot, melyek az összes élt lefogják. Ennek eldöntésére, minden $v$ csúcshoz rendeljünk egy $x(v)$ változót, és tekintsük a következő egyenlőtlenség-rendszert. $0 \leq x(v) \leq 1$ minden $v \in V$-re, $x(u) + x(v) = 1$ minden $uv \in M$ élre, és $x(u) + x(v) \geq 1$ minden egyéb $uv$ élre. A 2-SAT problémának pontosan akkor van megoldása, ha ezen egyenlőtlenség-rendszernek van egész megoldása. Miután a feltételi mátrix szimpla, az FM elimináció polinomiális futásidejű algoritmust szolgáltat.

Érdemes az FM elimináció egy lépését közvetlenül gráfnyelven elmondani: Legyen $uv \in M$ az egyik párosítás él. A $V - \{u, v\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G^{[1]}$ gráfot úgy, hogy $xy$ él, ha eredetileg él, vagy ha $x$ szomszédos $u, v$ egyikével és $y$ szomszédos a másikával. Könnyen ellenőrizhető közvetlenül is, hogy a 2-SAT probléma akkor és csak akkor oldható meg $G$-re, ha megoldható $G^{[1]}$-re.

**Gyakorlat 2.4** *Tekintsük négy változóban az $x_i \geq 0$, $x_i + x_j = 1$ $(1 \leq i < j \leq 4)$ rendszert. Döntsük el az FM eliminációval, hogy van-e megoldása és van-e egész megoldása.*

### 2.1.6 Egy ütemezési feladat: PERT

Abban a speciális esetben, amikor a mátrix minden sorában vagy egyetlen nemnulla elem szerepel és ennek az abszolút értéke 1, vagy pedig egy $+1$-es és egy $-1$-es, akkor az FM elimináció automatikusan fenntartja ezt az alakot. Következik, hogy ha a jobboldali $b$ vektor egészértékű, és a $Qx \leq b$ rendszernek van megoldása, akkor van egész megoldása is (és az FM egy ilyet meg is talál).

Egy nagyobb projekt (pl. házépítés) számos részfeladatból áll (alapok kiásása, falak felhúzása, tetőszerkezet, villanyszerelés,..., külső vakolás). Az egyes munkafázisoknak ismert a munkaidőigénye, továbbá a kezdési és befejezési idejére is adott lehet egy időintervallum. Kérdés, hogy lehet-e úgy ütemezni a munkákat, hogy adott $T$ idő alatt az egészet befejezzük, és a munkafázisokra kirótt időbeli előírásokon túl a természetes megelőzési követelményeket is teljesítsük (pl. a villanyszerelés meg kell, hogy előzze a festést). Pontosabban fogalmazva ez azt jelenti, hogy minden munkafázisnak meg kell határozni a kezdő és a befejezési időpontját. A feladat megoldására kidolgozott megközelítést néha PERT módszernek hívják az angol Project Evaluation and Review Technique kifejezésből rövidítve.

Minden munkafázist ábrázoljunk egy $uv$ irányított éllel, melynek súlya legyen a fázis időtartama. Vegyünk fel egy $s$ kezdőpontot, amelyből minden tőpontba vezessen él nulla súllyal, valamint egy $t$ zárópontot, amelybe minden fejpontból vezessen él nulla súllyal. Amennyiben az $uv$ által reprezentált munkafázis megelőzi az $xy$ által reprezentáltat, úgy húzzunk be egy irányított élt $v$-ből $x$-be, és ennek súlya legyen 0. Az ütemezési probléma formális megfogalmazásához jelölje $\pi(s)$ illetve $\pi(t)$ az egész projekt kezdési és befejezési időpontját, míg egy $uv$ éllel reprezentált munkafázisra $\pi(u)$ a kezdési, $\pi(v)$ pedig a befejezési időpontot. Ezen a nyelven az ütemezési feladat olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény meghatározásával ekvivalens, amelyre minden $uv$ élnek a súlya legfeljebb $\pi(v) - \pi(v)$, minden csúcsra $f(v) \leq \pi(v) \leq g(v)$, ahol $f$ és $g$ előre adott korlátok, és $\pi(t) - \pi(s) \leq T$. Ha ezen egyenlőtlenségeket felírjuk, akkor mindegyikükben vagy egyetlen $+1$ vagy $-1$ szerepel, vagypedig egy darab $+1$ és egy darab $-1$. A fentiek szerint ilyen esetben az FM elimináció polinomiális algoritmust szolgáltat, rádásul, ha a súlyok egészértékűek és létezik $\pi$ megoldás, akkor létezik egészértékű $\pi$ is.

**Feladat 2.5** *Igazoljuk, hogy egy élsúlyozott irányított gráfban akkor és csak akkor van negatív összsúlyú irányított kör, ha nincsen olyan $\pi := V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre $\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv)$ fennáll minden $uv$ élre. Továbbá, ha a $c$ súlyfüggvény egészértékű, akkor $\pi$ is választható annak.*

ulinp11 2002. december 17.

## 2.2 MEGOLDHATÓSÁG: A FARKAS LEMMA

Valamely feladat algoritmikus megoldásához fontos lehet egy olyan eszköz, amelynek segítségével gyorsan ellenőrizhető egy javasolt megoldás helyessége, függetlenül attól, hogy a szóbanforgó megoldáshoz milyen nehézségek árán jutottunk. Például, behelyettesítéssel könnyű ellenőrizni, hogy egy megadott $x_1$ vektor megoldása-e az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszernek. Arra is van egyszerűen ellenőrizhető tanúsítvány, ha az $Ax = b$ rendszernek nincsen megoldása, hiszen a Fredholm féle alternatíva tétel szerint ilyenkor létezik egy $y$, amelyre $yA = 0, yb \neq 0$, és egy adott $y$-ról ennek fennállása szintén könnyen eldönthető.

Kérdés, hogy létezik-e hasonló jellegű, könnyen ellenőrizhető tanúsítvány annak igazolására, hogy egy egyenlőtlenség-rendszer nem oldható meg. Az igenlő választ Farkas Gyula tétele szolgáltatja, amely a lineáris programozás egyik alapkövének tekinthető, és ezért röviden csak Farkas lemmának nevezik. Az eredmény poliéderek nemürességére ad szükséges és elegendő feltételt, és mivel egy poliédert többféle alakban is meg lehet adni, a Farkas lemmának is különböző változatai vannak. Ezek azonban egyszerű fogással következnek egymásból, ezért minden alakot Farkas lemmának nevezünk majd. Először bemutatjuk a három leggyakoribb változatot, majd közös általánosításként egy olyan formát is felírunk, amelyből mind a három alak speciális esetként kiadódik. A Farkas lemmának az eredeti, Farkas Gyula által kimondott alakja a következő.

**TÉTEL 2.13 (Farkas lemma, alap alak)** *Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszernek pontosan akkor van megoldása, ha az $\{yA \geq 0, yb < 0\}$ rendszernek nincs.*

Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszert **primál** feladatnak, míg az $\{yA \geq 0, yb < 0\}$ rendszert **duál** vagy **duális** feladatnak nevezik. Megjegyzendő, hogy ha a szóbanforgó $y$ létezik, akkor az úgy is megválasztható, hogy $yb = -1$ teljesüljön, így néha azt hívjuk duális feladatnak, amikor az $yb < 0$ helyett $yb = -1$-t követelünk. Néha a duálist az $\{yA \leq 0, yb > 0\}$ ekvivalens alakban adják meg: ennek és az eredeti duálisnak a megoldásai egymás minusz egyszeresei.

A primál feladat megoldhatósága azt jelenti, hogy $b$ benne van az $A$ oszlopai által generált $K = \{Ax : x \geq 0\}$ kúpban, míg a duálisé azt, hogy van olyan ($y$ normálisú) homogén féltér, amely a kúp minden $a_i$ generáló elemét (és így magát a kúpot) tartalmazza (mással az $A$ minden oszlopára $ya_i \geq 0$), de $b$-t nem (azaz $yb < 0$). [Egy félteret akkor neveztünk homogénnek, ha határoló hipersíkja tartalmazza az origót.] Ezek alapján a Farkas lemma így fogalmazható meg.

**TÉTEL 2.14 (Farkas lemma, alap alak)** *A $b$ vektor akkor és csak akkor van benne egy $K$ generált kúpban, ha nincs olyan zárt homogén féltér, amely $K$-t tartalmazza, de $b$-t nem.*

**Biz.** A primál és a duál feladat egyszerre nem oldható meg, mert akkor $0 \leq (yA)x = y(Ax) = yb < 0$ következne, tehát a feltétel szükséges. A 2.4 következmény szerint minden generált kúp előáll metszetkúpként, azaz $K$ előáll homogén félterek metszeteként. Ha most ha $b$ nincs benne $K$-ban, akkor nincs benne ezen félterek egyikében, ami persze $K$-t tartalmazza, és így a feltétel elegendő is. •

(Ne okozzon zavart, hogy a 2.4 következmény bizonyításában egy mátrix sorai által generált kúppal dolgoztunk, míg most a következményt az $A$ oszlopai által generált kúpra használjuk.)

Érdekes, hogy a 2.13 tételnek a sortérben is szemléletes jelentése van. Ugyanis a primál probléma megoldása azzal ekvivalens, hogy létezik olyan nemnegatív $(x, 1)$ vektor, amely ortogonális az $A' := (A, -b)$ mátrix soraira, ami viszont azzal ekvivalens, hogy az $A'$ mátrix nullterében létezik egy olyan $x'$ nemnegatív vektor, amelynek utolsó komponense szigorúan pozitív. A duál problémában $yb < 0$ helyett $y(-b) > 0$-t írva, a duál probléma megoldhatósága azt jelenti, hogy van olyan $y$ vektor, amelyre $yA' \geq 0$ és $yA'$ utolsó komponense szigorúan pozitív; magyarán azt, hogy az $A'$ mátrix sorterében van olyan nemnegatív vektor, amelynek utolsó komponense szigorúan pozitív. Miután egy tetszőleges mátrix nulltere és sortere egymás ortogonális kiegészítő alterei, továbbá tetszőleges altér és ortogonális kiegészítő altere megadható egy mátrix nullatereként illetve sortereként, a Farkas lemma ekvivalens megfogalmazása a következő. *Tetszőleges altér és ortogonális kiegészítő altere közül pontosan az egyik tartalmaz olyan nemnegatív vektort, amelynek utolsó komponense pozitív.* Figyeljük meg hogy két ilyen vektor skaláris szorzata biztosan pozitív, azaz nem lehetnek merőlegesek egymásra, tehát két ortogonális altér közül legfeljebb csak az egyik tartalmazhat ilyen vektort.

**TÉTEL 2.15 (Farkas lemma, (A) változat)** *A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha nem létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yQ = 0, yb = -1$.*

**Biz.** A $Qx \leq b$ feladatot nevezzük primál problémának, az $\{yQ = 0, y \geq 0, qb = -1\}$ feladatot pedig duálnak. Mindkét rendszer nem oldható meg, mert akkor $0 = y(Qx) \leq yb = -1$. A $Q$ nem-nulla oszlopai száma szerinti indukcióval dolgozunk. Tegyük fel először, hogy ez a szám nulla (azaz $Q$ egy null-mátrix). Amennyiben $b \geq 0$, úgy $x = 0$ megoldása a primálnak, míg ha $b$-nek mondjuk az első komponense negatív, akkor $y = (1, 0, \ldots, 0)$ megoldása a duálnak.

Tegyük most fel, hogy $Q$ első oszlopa nem nulla. Mivel egy egyenlőtlenséget pozitív számmal szorozva mind a primál, mind a duál oldalon megoldhatóság szempontjából ekvivalens rendszert kapunk, feltehető, hogy $Q$ első oszlopa $0, \pm 1$ értékű. A 2.2 és 2.8 következmények alapján a primál megoldhatósága ekvivalens $Q^{[1]}x \leq b^{[1]}$ feladat megoldhatóságával, míg a duálé az $\{y'Q^{[1]} = 0, q'b^{[1]} = -1\}$ megoldhatóságával. Ugyanakkor $Q^{[1]}$-nek kevesebb nemnulla oszlopa van, mint $Q$-nak, így a tétel indukcióval következik. •

**TÉTEL 2.16 (Farkas lemma, (B) változat)** *A $\{Bx \leq b, x \geq 0\}$ egyenlőtlenség-rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha nem létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yB \geq 0, yb = -1$.*

**Biz.** Mindkét rendszer nem oldható meg, mert akkor $0 \leq (yB)x = y(Ax) \leq yB = -1$. Jelölje $Q$ azt a mátrixot amely $B$-ből keletkezik azáltal, hogy aláírjuk az $n \cdot n$-es $-I$ egységmátrixot és jelölje $b_1$ azt a vektort, amely $b$-ből keletkezik $n$ darab 0 komponens hozzáfűzésével. A $\{Bx \leq b, x \geq 0\}$ rendszer pontosan akkor oldható meg, ha $Qx \leq b_1$ megoldható. Az (A) változat szerint, ha $Qx \leq b_1$ nem oldható meg, akkor létezik egy olyan $(y, y') \geq 0$ vektor, amelyre $yB + y'(-I) = 0, y_0 b = -1$. De $y' \geq 0$ miatt $yB + y'(-I) = 0$ azzal ekvivalens, hogy $yB \geq 0$. •

Egyszerű fogással a Farkas lemmát olyan alakban is megfogalmazhatjuk, amikor a Fredholm féle alternatíva tételt már explicit magában foglalja.

**TÉTEL 2.17** *A*

$$\{Px = b_0, Qx \leq b_1\} \tag{2.9}$$

*primál rendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az*

$$\{y_0 P + y_1 Q = 0, y_1 \geq 0, yb = -1\} \tag{2.10}$$

*duális nem, ahol $y = (y_0, y_1, ), b = (b_0, b_1)$.*

**Biz.** Mindkét feladat nem oldható meg, mert akkor $0 = (y_0 P + y_1 Q)x = (y_0 P)x + (y_1 Q)x = y_0(Px) + y_1(Qx) \leq y_0 b_0 + y_1 b_1 = -1$.

Ha a primál probléma nem oldható meg, akkor a vele ekvivalens $\{Px \leq b_0, -Px \leq -b_0, Qx \leq b_1\}$ egyenlőtlenség-rendszer sem. Ekkor viszont a Farkas lemma alapján az ehhez tartozó duál megoldható, azaz létezik $(y_0', y_0'', y_1) \geq 0$ vektor, amelyre $y_0' P + y_0''(-P) + y_1 Q = 0$ és $y_0' b_0 + y_0''(-b_0) + y_1 b_1 = -1$. De ekkor $y_0 := y_0' - y_0''$-re az $(y_0, y_1)$ megoldása a (2.10) duálisnak. •

Hasznos egy olyan alakot is felírni, amely a fenti változatok mindegyikét magában foglalja.

**TÉTEL 2.18 (Farkas lemma, általános alak)** *A*

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0 \tag{2.11}$$

*primál rendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha az*

$$y_0 P + y_1 Q = 0,\ y_0 A + y_1 B \geq 0,\ y_1 \geq 0,\ yb := y_0 b_0 + y_1 b_1 = -1 \tag{2.12}$$

*duális rendszernek van.*

**Biz.** (2.18) Jelölje az $x_0, x_1, y_0, y_1$ dimenzióját rendre $n_0, n_1, m_0, m_1$. Új, nemnegatív, úgynevezett **eltérés** változók bevezetésével az egyenlőtlenség-rendszert egyenlőség-rendszerré alakítjuk. Legyen $B' := (B, I), A' := (A, 0)$ (ahol az $I$ egy $m_1 \times m_1$-os egység-mátrixot, a 0 pedig egy $m_0 \times m_1$-os nulla mátrixot jelöl). Most (2.11) $(x_0, x_1)$ megoldásai és

$$Px_0 + A'x_1' = b_0,\ Qx_0 + B'x_1' = b_1,\ x_1' \geq 0 \tag{2.13}$$

$(x_0, x_1')$ megoldásai között egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn. Nevezetesen $(x_0, x_1)$ az $(x_0, x_1')$-ből keletkezik az utolsó $m_1$ komponens kihagyásával, míg $(x_0, x_1)$-ből úgy kapjuk $(x_0, x_1')$-t, hogy $x_1$-t helyettesítjük az $x_1' := (x_1, b_1 - (Qx_0 + Bx_1))$ vektorral.

A (2.13)-hez tartozó

$$y_0P + y_1Q = 0,\ y_0A' + y_1B' \geq 0,\ yb = -1 \tag{2.14}$$

duál probléma és (2.12) ekvivalensek, hiszen csak arról van szó, hogy a (2.12)-ban explicit szereplő $y_1 \geq 0$ előjel megkötést (2.14)-ben az $y_0A' + y_1B' \geq 0$ egyenlőtlenség-rendszerben rejtettük el. A (2.13) primál feladatra felírva a 2.19 tételt az abban szereplő (2.16) duál feladat éppen a (2.14) alakot ölti. •

Megjegyezzük, hogy a Farkas lemmát még általánosabb alakban is fel lehetne írni. Például a primál feladatban lehetnek fordított irányú egyenlőtlenségek, vagy nempozitív változók. A megfelelő egyenlőtlenség illetve a feltételi mátrix megfelő oszlopának negálásával azonban könnyen a (2.15)-es alakra juthatunk, így ez a legáltalánosabb alak már nem ad igazán újat.

### 2.2.1 Direkt bizonyítás

Bár a Farkas lemma alap alakját az előbb levezettük korábbi eredményekből (nevezetesen a Fourier-Motzkin eliminációra támaszkodva), érdemes egy közvetlen bizonyítást is megadni. Kényelmesebbnek bizonyul egy kicsit általánosabb alakot igazolni: persze még ez is speciális esete a fentebbi általános alaknak. (Nem ritka jelenség, hogy egy jól eltalált általánosításra az indukciós bizonyítás gördülékenyebben működik.) Szemben a fenti megközelítéssel, amely valójában speciális esetként kiadta a Fredholm féle alternatíva tételt, az itt következő bizonyítás használja azt.

**TÉTEL 2.19** *A*

$$Px_0 + Ax_1 = b,\ x_1 \geq 0 \tag{2.15}$$

*primál feladatnak akkor és csak akkor nincsen megoldása, ha az*

$$yP = 0,\ yA \geq 0,\ yb = -1 \tag{2.16}$$

*duális feladatnak van.*

(Figyeljük meg, hogy (2.16) megoldhatósága ekvivalens az $\{yP = 0, yA \geq 0, yb < 0\}$ rendszer megoldhatóságával.)

**Biz.** A primál és a duál feladat nyilván nem oldható meg egyszerre, mert akkor $0+0 \leq 0 + (yA)x_1 = (yP)x_0 + (yA)x_1 = y[(P,A)x] = yb = -1$, azaz $0 \leq -1$ következne.

Annak bizonyítására, hogy a primál és a duál feladatok egyike biztosan megoldható az $A$ oszlopai száma szerinti indukciót alkalmazunk. Amennyiben ez az $n_1$-gyel jelölt szám nulla, azaz $A$ üres, úgy a tétel következik az 1.10 Fredholm féle alternatíva tételből. Tegyük tehát fel, hogy $n_1$ pozitív és indukció alapján azt, hogy $n_1$-nél kisebb oszlop-számra a tétel érvényes!

Legyen $a_1$ az $A$ mátrix első oszlopa. Jelölje $A'$ azt a mátrixot, amely $A$-ból keletkezik az $a_1$ kihagyásával. Amennyiben a

$$Px_0 + A'x_1' = b,\ x_1' \geq 0 \tag{2.17}$$

rendszernek létezik megoldása, úgy az $x_1'$-t egy nulla komponenssel kiegészítve (2.15) megoldásához jutunk. Ha (2.17)-nak nincs megoldása, úgy az indukciós feltevés miatt az

$$yP = 0,\ yA' \geq 0,\ yb = -1 \tag{2.18}$$

rendszernek létezik $y'$ megoldása. Amennyiben $y'a_1 \geq 0$, úgy $y'$ a (2.16)-nek is megoldása, és ekkor készen vagyunk.

Tegyük fel tehát, hogy $y'a_1 < 0$, azaz $y'A$ első komponense negatív, a többi nemnegatív. Jelölje $P'$ azt a mátrixot, amelyet $P$-ből az $a_1$ oszlop hozzávételével nyerünk. Ha most az

$$yP' = 0,\ yA' \geq 0,\ yb = -1 \tag{2.19}$$

problémának van megoldása, az nyilván megoldása (2.16)-nek is, és ekkor ismét csak készen vagyunk. Ha (2.19)-nek nincs megoldása, úgy a

$$P'x'_0 + A'x'_1 = b,\ x'_1 \geq 0 \tag{2.20}$$

rendszernek van (indukció miatt). Jelölje $(x_0, x_1)$ azt a vektort, amely úgy keletkezik $(x'_0, x'_1)$-ből, hogy az $a_1$-nak megfelelő komponenst $x'_0$-ből $x'_1$-be helyezzük (ami persze azt jelenti, hogy $(x'_0, x'_1)$ ugyanazt az $n_0 + n_1$ dimenziós vektort jelöli, mint $(x_0, x_1)$).

Állítjuk, hogy $(x_0, x_1)$ megoldása (2.15)-nek. Ehhez csak azt kell igazolnunk, hogy $x_1(1)$ (az $a_1$-nek megfelelő komponens) nemnegatív. Valóban, ha ez negatív lenne, akkor $x_1$ is és $y'A$ is olyan, hogy első komponensük negatív, a többi pedig nem az. Emiatt $(y'A)x_1 > 0$ és így $0 + 0 < 0 + (y'A)x_1 = (y'P)x_0 + (y'A)x_1 = y'[(P, A)x] = y'b = -1$, ami lehetetlen. •

Megmutatjuk, hogy a 2.19 tételből is levezethető a 2.18 általános alak.

**Biz.** (2.18 tételé) Jelölje az $x_0, x_1, y_0, y_1$ dimenzióját rendre $n_0, n_1, m_0, m_1$. Az $x_1 \geq 0$ feltételt explicit beírhatjuk az egyenlőtlenségek közé $0_{n_1 n_0} x_0 + x_1(-I_{n_1 n_1}) \leq 0$ alakban. A 2.17 tételből közvetlenül kapjuk, hogy a primál probléma pontosan akkor oldható meg, ha az $\{y_0 P + y_1 Q = 0, y_0 A + y_1 B + y'_1(-I_{n_1 n_1}) = 0, (y_1, y'_1) \geq 0, y_0 b_0 + y_1 b_1 = -1\}$ rendszer nem. Ez utóbbi megoldhatósága viszont $y'_1$ nemnegativitása folytán épp (2.12) duáliséval ekvivalens. •

További kézenfekvő megjegyzés, hogy a Farkas lemmát olyan alakban is használhatjuk, amikor a rendszer balról szorzással van adva. (Egy későbbi alkalmazás miatt néhány vektort és mátrixot vesszős betűvel jelölünk.)

**TÉTEL 2.20**

$$y_0 P' + y_1 Q' = c'_0,\ y_0 A' + y_1 B' \geq c'_1,\ y_1 \geq 0 \tag{2.21}$$

*primál rendszernek akkor és csak akkor nincs megoldása, ha a*

$$P'x_0 + A'x'_1 = 0,\ Q'x_0 + B'x'_1 \leq 0,\ x'_1 \geq 0,\ c'_0 x_0 + c'_1 x'_1 > 0 \tag{2.22}$$

*duális rendszernek van.* •

**Gyakorlat 2.6** *Az $\{yA \leq c\}$ rendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha nincs olyan $x \geq 0$, amelyre $Ax = 0, cx < 0$.*

**Feladat 2.7** *Tekintsük a (2.16)-ben előforduló $\{yP = 0,\ yA \geq 0,\ yb = -1\}$ rendszert, mint primál problémát és fogalmazzuk meg erre a Farkas lemmát. Mutassuk meg, hogy a felírt duális ekvivalens a (2.15) alakkal.*

**Feladat 2.8** *Tegyük fel, van egy szubrutinunk, amely vagy az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszernek vagy a duális $\{yA \geq 0,\ yb = -1\}$ rendszernek kiszámít egy megoldását. Hogyan használhatjuk fel ezt a (2.15) vagy (2.16) rendszer megoldására?*

**Feladat 2.9** *Tegyük fel, van egy szubrutinunk a $\{Bx \leq b, x \geq 0\}$ rendszer megoldására. Hogyan használhatjuk fel ezt a $\{Qx \leq b\}$ rendszer megoldására?*

2002. december 17.ulinp12

## 2.3 KORLÁTOSSÁG

A Farkas lemma megadta egy lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldhatatlanságának, másszóval egy $R$ poliéder ürességének az okát. A következő feladatunk annak eldöntése, hogy valamely $c$ vektorra a $cx$ lineáris célfüggvény vajon korlátos-e (mondjuk) felülről egy nemüres $R$ poliéderen.

### 2.3.1 Bázis-megoldások

Legyen $Q \neq 0$ egy $m \cdot n$-es mátrix és jelölje $R$ a

$$Qx \leq b \tag{2.23}$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldásainak halmazát.

Ennek egy $z$ elemére jelölje $Q_z^=$ a $Q$ azon soraiból álló részmátrixot, amelyekre az általuk meghatározott egyenlőtlenségeket a $z$ egyenlőséggel teljesíti. Az ennek megfelelő jobboldal legyen $b_z^=$, míg a $Q$ maradék részét jelölje $Q_z^<$. A $z \in R$ elem $\sigma(z)$-vel jelölt **szint**-jén az $r(Q) - r(Q_z^=)$ számot értjük. Ha ez a szám 0, úgy $z$-t **bázis-megoldásnak** nevezzük.

Először is megmutatjuk, hogy ha két egyenlőtlenség-rendszer ugyanazt a nemüres poliédert definiálja, akkor bázis-megoldásaik halmaza is megegyezik. Valójában ennél többet igazolunk.

**TÉTEL 2.21** *Tegyük fel, hogy az $R$ poliéder nemüres és $R = \{x : Qx \leq b\} = \{x : Q'x \leq b'\}$. Ekkor $Q$ és $Q'$ sortere megegyezik. Tetszőleges $z \in R$ esetén $Q_z^=$ és $Q_z'^=$ sortere megegyezik.*

**Biz.** Az első részhez tegyük fel indirekt, hogy mondjuk $Q$ sortere nem tartalmazza $Q'$ valamely $q'$ sorát. Ekkor a Fredholm féle alternatíva tételből következik, hogy létezik olyan $q$ vektor, amelyre $Qq = 0$ és $qq' > 0$. De ekkor tetszőleges $z \in R$ elemre és bármely pozitív $\lambda$-ra $z' := z + \lambda q$ olyan, hogy $Qz' = Qz \leq b$, de $qq' > 0$ miatt kellően nagy $\lambda$-ra $z'$ már nem teljesíti a $q'$-höz tartozó $q'z \leq \beta'$ egyenlőtlenséget, vagyis $Q'z' \not\leq b'$, ellentmondásban a feltevéssel.

A második részhez inderekt tegyük fel, hogy mondjuk $Q_z^=$ sortere nem tartalmazza $Q_z'^=$ valamely $q'$ sorát. Ekkor a Fredholm féle alternatíva tételből következik, hogy létezik olyan $q$ vektor, amelyre $Q_z^= q = 0$, $qq' > 0$. De ekkor kicsiny pozitív $\lambda$-ra $z' := z + \lambda q$ olyan, hogy $Qz' \leq b$, de $qq' > 0$ miatt $Q'z' \not\leq b'$, ellentmondásban a feltevéssel. •

**Következmény 2.22** *Egy $z \in R$ elem szintje csak a poliédertől függ és nem a poliédert meghatározó egyenlőtlenség-rendszer konkrét alakjától. Speciálisan, a bázis-megoldás fogalma is csak a poliédertől függ.*

Igazolni lehet, hogy a $z \in R$ elem $\sigma(z)$ szintje nem más, mint az $R$ legszűkebb, $z$-t tartalmazó oldalának dimenziója. Speciálisan, a bázis-megoldások a minimális oldalak elemei, amik csúcsos poliéder esetén épp a csúcsok.

Érdemes kiolvasni, hogy speciális alakú egyenlőtlenség-rendszerek esetén mit is jelent a szint és a bázis-megoldás fogalma. Például, az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ nem-nulla mátrix esetén a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{2.24}$$

lineáris rendszernek egy $z$ megoldása akkor bázis-megoldás, ha $r(M) = r(M_z^=)$. Valóban, (2.24) és $\{Px \leq b_0, -Px \leq -b_0, Qx \leq b_1\}$ megoldáshalmaza ugyanaz, továbbá $r(M) = r(M')$ és $r(M_z^=) = r(M_z'^=)$, ahol $M' := \begin{pmatrix} -P \\ M \end{pmatrix}$. Hasonlóképp adódik, hogy $z$ szintje $r(M) - r(M_z^=)$. Egy másik alakra vonatkozik az alábbi eredmény.

**TÉTEL 2.23** (i) *Az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ egy $z$ megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha a pozitív elemekhez tartozó $A$-beli oszlopok lineárisan függetlenek.* (ii) *Az $\{yA \geq 0, yb = -1\}$ rendszer egy $y_0$ megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha az $A$-ból lineárisan függetlenül kiválasztható, az $y_0$-ra merőleges oszlopok maximális száma $r(A, b) - 1$.*

**Biz.** Esetleges sorcserével feltehetjük, hogy $z$-nek az utolsó $j$ komponense pozitív. Jelölje az ezen $j$ oszlophoz tartozó $m \cdot j$-es részmátrixot $A'$. Legyen $M := \begin{pmatrix} A \\ -I \end{pmatrix}$, ahol $I$ az $n \cdot n$-es egységmátrixot jelöli. A tétel előtti megjegyzés szerint $z$ akkor bázis-megoldás, ha $r(M_z^=) = r(M) = n$. Ekkor $M_z^=$ az $M$ mátrix első $m + (n-j)$ sora (vagyis az $A$ sorai valamint a $-I$ első $n-j$ sora). Ennek a bal alsó $(n-j) \cdot (n-j)$-es részmátrixa egy negatív egységmátrix, így $M_z^=$ rangja pontosan akkor $n$, ha az első $n-j$ oszlopának és utolsó $n-j$ sorának kitörlésével keletkező $A'$ részmátrix rangja $n-(n-j) = j$, ami épp azt jelenti, hogy $A'$ oszlopai lineárisan függetlenek.

A második részhez jelölje $A_0$ az $A$ azon $a_i$ oszlopaiból álló részmátrixot, melyekre $y_0$ merőleges, azaz $a_i y_0 = 0$. Definíció szerint $y_0$ akkor bázis-megoldás, ha $r(A_0, b) = r(A, b)$. A tétel állítása pedig azzal ekvivalens, hogy $y_0$ pontosan akkor bázis-megoldás, ha $r(A_0) = r(A, b) - 1$. Azt kell tehát csak belátnunk, hogy $r(A_0) = r(A_0, b) - 1$. De ez rögtön látszik, hiszen $y_0 A_0 = 0$ és $y_0 b = -1$ miatt a $b$ vektor nem függ lineárisan $A_0$ oszlopaitól. •

**Megjegyzés** A szakirodalomban általában az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszerre vezetik be a bázis-megoldás fogalmát, egy $z$ megoldást akkor *definiálva* bázis-megoldásnak, ha a pozitív komponenseihez tartozó $A$-oszlopok lineárisan függetlenek. Mi egy általánosabb megközelítést használtunk és ez a tulajdonság tételként adódott!

**Gyakorlat 2.10** *Igazoljuk, hogy a $Px_0 + Ax_1 = b, x_1 \geq 0$ rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha az $x_1$ nem-nulla elemeihez tartozó $P$-beli oszlopokat az $A$-ból kiválasztott maximálisan sok lineárisan független oszloppal kiegészítve még mindig lineárisan független rendszert kapunk.*

**Gyakorlat 2.11** *Igazoljuk, hogy a $\{Bx \leq b, x \geq 0\}$ rendszer egy $z$ megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha a $B$ valamely $B'$ nemszinguláris négyzetes részmátrixára $z$ a $B'x' = b'$ egyértelmű megoldásából áll elő nullák hozzávételével.*

### 2.3.2 Erős bázis-megoldások

A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer egy $z$ bázis-megoldását **erős bázis-megoldás**nak nevezzük, ha a $z$ nem-nulla komponenseihez tartozó $Q$-beli oszlopok lineárisan függetlenek. Speciálisan, ha $Q$ oszlopai lineárisan függetlenek, akkor minden bázis-megoldás erős. Megmutatjuk, hogy az erős bázis-megoldás fogalma is csak a poliédertől függ. Többet látunk be.

**TÉTEL 2.24** *Tegyük fel, hogy az $R$ poliéder nemüres és $R = \{x : Qx \leq b\} = \{x : Q'x \leq b'\}$. A $Q$ valamely $j$ oszlopa pontosan akkor lineárisan független, ha $Q'$ megfelelő $j$ oszlopa lineárisan független.*

**Biz.** Feltehetjük, hogy az első $j$ oszlopról van szó. Azt látjuk be, hogy $Q$ első $j$ oszlopa akkor és csak akkor lineárisan összefüggő, ha $Q'$ első $j$ oszlopa az. Szimmetria miatt elég az egyik irányt belátni, így tegyük fel, hogy $Q'$ első $j$ oszlopa lineárisan összefügg. Ekkor létezik egy olyan $q' \neq 0$ vektor, amelynek csak az első $j$ komponense lehet nemnulla és $Q'q' = 0$. A 2.21 tétel miatt $Q$ és $Q'$ sortere megegyezik, így valamely $x$-re $Qx = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $Q'x = 0$, amiből következik, hogy $Qq' = 0$, vagyis $Q$ első $j$ oszlopa is lineárisan összefüggő. •

**Következmény 2.25** *Az erős bázis-megoldás fogalma csak a poliédertől függ és nem a poliédert meghatározó egyenlőtlenség-rendszertől.* •

**Következmény 2.26** *A $\{Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ egyenlőtlenség-rendszer egy $z$ bázis-megoldása pontosan akkor erős, ha a $z$ nem-nulla komponenseihez tartozó $M$-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ahol $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.* •

**Feladat 2.12** *Mutassunk olyan $Qx \leq b$ alakú egyenlőtlenség-rendszert, ahol egy erős bázis-megoldás előáll más erős bázis-megoldások konvex kombinációjaként. Bizonyítsuk be, hogy ha $Q$ oszlopai lineárisan függetlenek, akkor ilyen példa nem létezik.*

**Gyakorlat 2.13** *Legyen $f \ll g$, (azaz $f$ minden komponensében kisebb, mint $g$), ahol $f, g \in \mathbf{R}^n$. Igazoljuk, hogy az $Ax = b, f \leq x \leq g$ rendszer egy $z$ megoldása pontosan akkor bázis-megoldás, ha az $A$ azon $a_i$ oszlopai lineárisan függetlenek, melyekre $f(i) < z(i) < g(i)$. Mik az erős bázis-megoldások? Mik a bázis- és az erős bázis-megoldások, ha $f \ll g$ helyett csak $f \leq g$-t tesszük fel?*

Ki fogjuk mutatni, hogy mindig létezik erős bázis-megoldás, legfeljebb véges sok van belőlük, továbbá minden olyan $c$ vektorra, amelyre $cx$ az $R$ halmazon felülről korlátos a $\sup(cx : x \in R)$ érték egy erős bázis-megoldáson felvétetik, azaz a maximum létezik. Túl ezen, jellemezzük majd azon $c$ vektorokat, melyekre $cx$ felülről korlátos $R$-n. Először lássuk be, hogy legfeljebb csak véges sok erős bázis-megoldás létezhet.

**TÉTEL 2.27** *A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer egy $z$ megoldása akkor és csak akkor erős bázis-megoldás, ha létezik $Q$-nek egy olyan $r(Q)$ sorból és $r(Q)$ oszlopból álló nem-szinguláris $Q'$ részmátrixa, amelyre $z$ a $Q'x' = b'$ egyértelmű $x'$ megoldásából áll elő 0-komponensek hozzávételével (ahol $b'$ a $b$ azon részét jelöli, amely a $Q'$ sorainak felel meg.)*

**Biz.** Ha $z$ a megadott módon áll elő, úgy $Q_z^=$ tartalmazza $Q'$-t, így rangja $r(Q)$. Továbbá a $z$ nemnulla komponenseinek megfelelő $Q$-beli oszlopvektorok lineárisan függetlenek, hiszen ezek mindegyike $Q'$ egy oszlopának kibővítése, márpedig $Q'$ a feltevés szerint nem-szinguláris, így oszlopvektorai lineárisan függetlenek. Vagyis ilyenkor $z$ valóban erős bázis-megoldás.

Megfordítva, legyen $z$ erős bázis-megoldás. Ekkor $r(Q_z^=) = r(Q)$. Válasszuk ki $Q_z^=$-nek $r(Q)$ darab lineárisan független sorát, majd a $z$ nem-nulla komponenseinek megfelelő lineárisan független oszlopokat tetszés szerint egészítsük ki az $Q$ oszlopai közül $r(Q)$ darab lineárisan független oszloppá. Az így kapott $r(Q)$ sor és $r(Q)$ oszlop által meghatározott $Q'$ részmátrix az 1.5 lemma miatt nem-szinguláris, és éppen $z$-t definiálja a kívánt módon. •

**Következmény 2.28** *Tetszőleges egyenlőtlenség-rendszernek legfeljebb csak véges sok erős bázis-megoldása van.* •

### 2.3.3 A korlátosság feltétele

Következő célunk megmutatni, hogy ha egy egyenlőtlenség-rendszer megoldható, akkor van erős bázis-megoldása is. Valójában ennél még többet is belátunk. Az ideális az lenne, ha igazolni tudnánk, hogy tetszőleges $c$ vektorra és $z \in R$ megoldásra mindig létezik olyan $x^*$ bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cz$, vagyis $x^*$ a $\max cx$ célfüggvény szempontjából legalább olyan jó, mint $z$. Sajnos ez az állítás már egy dimenzióban sem igaz. Tekintsük ugyanis az $x \geq 0$ egyenlőtlenséget (ahol $x$ most egyetlen változót jelöl). Ennek egyetlen bázis megoldása van, az $x = 0$. Így a $c = 1$ (egydimenziós) vektor esetén az $x = 1$ ponthoz nincs nála jobb bázis-megoldás.

A bajt az okozza, hogy $cx$ nem korlátos felülről az $R$-en. Emiatt érdemes megvizsgálni, hogy ez miként fordulhat elő. Könnyű megfigyelni, hogy a nem korlátosságnak egyik (és amint később majd kiderül az egyetlen) lehetséges oka, ha létezik olyan $q$ vektor, amelyre $cq > 0, Qq \leq 0$. Ekkor $cx$ valóban nem korlátos felülről $R$-en, hiszen bármely pozitív $\lambda$ számra $z + \lambda q$ is eleme $R$-nek, és $cq > 0$ miatt $c(z + \lambda q)$ bármilyen nagy lehet. A következő lemma tartalma az, hogy ha az ilyen $q$ vektorok létezését kizárjuk, akkor az előbbi példával illusztrált baj már nem fordulhat elő.

**Lemma 2.29** *Legyen $z$ a $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszernek egy megoldása, és $c$ egy $n$-dimenziós vektor. Ha nem létezik olyan $q$ vektor, amelyre $cq > 0, Qq \leq 0$, akkor $Qx \leq b$-nek létezik olyan $x^*$ bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.*

(Megjegyzés. A lemma megfordítása nem igaz, vagyis előfordulhat, hogy mind $q$, mind $x^*$ létezik. Ha például $R = \{(z_1, z_2) : -z_2 \leq 0, z_2 \leq 0\}$ a sík vízszintes tengelye, úgy minden megoldás egyúttal bázis-megoldás is, és ezért $x^* := z$ választással $cx^* = cz$ teljesül. Ugyanakkor $z := (0,0), q = (1,0), c = (1,0)$ esetén $cq = 1$ és $Qq = 0$).

**Biz.** A $Q_z^<$ sorai száma szerinti indukció. Ha ez a szám nulla, úgy $z$ maga bázis-megoldás, tehát jó lesz $x^*$-nak. Tegyük fel, hogy $z$ nem bázis-megoldás. Ez azt jelenti, hogy $Q_z^<$-nek van olyan sora, amely lineárisan független a $Q_z^=$ soraitól, és emiatt az 1.9 tételből adódóan létezik olyan $q$, amelyre $Q_z^= q = 0, Q_z^< q \neq 0$. Tekintsük az $x_\lambda := z + \lambda q$ vektort ($\lambda \geq 0$).

**1. eset** $cq = 0$. Feltehető, hogy $Q_z^<$-nek van olyan ${}_ia$ sora, amelyre ${}_iaq > 0$, mert különben $q$-t a negatívjával helyettesíthetjük. Kicsiny $\lambda$-ra $x_\lambda$ benne van $R$-ben, míg nagy $\lambda$-ra, ${}_iaq > 0$ miatt, nincsen. Így van olyan $\lambda'$ érték, amelyre $x_{\lambda'} \in R$ és $x_{\lambda'}$ több egyenlőtlenséget teljesít egyenlőséggel, mint $z$. [Nevezetesen $\lambda'$ a maximális olyan $\lambda$ érték, amelyre $Q_z^< x_\lambda \leq b_z^<$ teljesül, vagyis $\lambda' = \min((b_z(i) - {}_iaz)/ {}_iaq : {}_ia$ a $Q_z^\leq$ olyan sora, amelyre ${}_iaq > 0$).] Miután $Q_{x_{\lambda'}}^\leq$-nek kevesebb sora van, mint $Q_z^\leq$-nek, az indukciós feltevést alkalmazhatjuk $x_{\lambda'}$-re. Így létezik egy olyan $x^*$ bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cx_{\lambda'} = cz + c(\lambda q) = cz$.

**2. eset** $cq \neq 0$. Feltehető, hogy $cq > 0$, mert ha nem, $q$-t a negatívjával helyettesítjük. Amennyiben $Q_z^\leq q \leq 0$, úgy $q$ léte ellentmond a lemma feltevésének. Ha viszont van olyan ${}_ia$ sora $Q_z^\leq$-nak, amelyre ${}_iaq > 0$, akkor ugyanúgy járunk el, mint az első esetben: indukció alapján létezik olyan $x^*$ bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cx_{\lambda'} = cz + c(\lambda q) > cz$. (Az utolsó egyenlőtlenség érdekében kellett $q$-t úgy választanunk, hogy $cq$ pozitív legyen.) •

Hasznos tudatosítani, hogy a bizonyítás algoritmikus abban az értelemben, hogy a szóbanforgó $x^*$-t a Gauss-elimináció segítségével polinom időben kiszámíthatunk. A lemmát $c = 0$-ra alkalmazva rögtön kapjuk:

**Következmény 2.30** *Ha egy egyenlőtlenség-rendszernek van megoldása, akkor létezik bázis-megoldása is.* •

A fő eredményt először speciális alakban fogalmazzuk meg.

**TÉTEL 2.31 (Korlátossági tétel, speciális alak)** *Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nemüres, és legyen $c$ egy $n$-dimenziós vektor. A következők ekvivalensek.*

*(0) A $\{cx\}$ lineáris függvény $R$-n felülről korlátos.*
*(1) Minden $z \in R$ elemre létezik $Qx \leq b$-nek olyan $x^*$ erős bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.*
*(2) Nem létezik olyan $q$ vektor, amelyre $cq > 0$ és $Qq \leq 0$.*
*(3) Létezik olyan $y \geq 0$ vektor, amelyre $yQ = c$.*

**Biz.** Először is figyeljük meg, hogy a (2) és (3) feltételek ekvivalenciája nem más, mint a balról szorzással felírt Farkas lemma alap alakja.

Mivel a 2.28 következmény alapján csak véges sok erős bázis-megoldás van, (1) implikálja (0)-t. (0)-ből rögtön következik (2). Igazoljuk most a (2) $\rightarrow$ (1) irányt. A 2.29 lemmából tudjuk, hogy létezik olyan $x^*$ bázis-megoldás, amelyre $cx^* \geq cz$. Válasszuk $x^*$-t olyannak, amelynek maximálisan sok 0 komponense van. Állítjuk, hogy $x^*$ erős bázis-megoldás. Tegyük fel indirekt, hogy ez nem igaz, vagyis az $x^*$ nemnulla komponenseinek megfelelő $Q$-beli oszlopok lineárisan összefüggőek. Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan $q \neq 0$ vektor, amelyre $Qq = 0$ és $x^*(i) = 0$ esetén $q(i) = 0$. Feltehetjük, hogy $cq \geq 0$, különben $q$-t a mínusz egyszeresével helyettesítjük. A (2)-ből következik, hogy valójában $cq = 0$. Most alkalmas $\lambda$-ra $x_\lambda^* := x^* + \lambda q$-nak több nulla komponense lesz, mint $x^*$-nak, továbbá $x_\lambda^*$ is bázis-megoldás, amely $cx^* = cx_\lambda^*$ miatt ellentmond $x^*$ választásának. •

**Következmény 2.32** *Ha az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nemüres, és $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos, úgy $\max\{cx : x \in R\}$ létezik (azaz létezik olyan $z \in R$, amelyre $cz = \sup\{cx : x \in R\}$).*

**Biz.** A 2.28 tétel szerint véges sok erős bázis megoldás van. A 2.31 tételből adódóan a maximum ezek egyikén felvétetik. •

**Megjegyzés** A 2.31 tétel három jellemzést is ad $\{cx : x \in R\}$ felülről való korlátosságára. Az első tartalma az, hogy a maximum felvétetik (véges sok erős bázis-megoldás van). A második könnyen ellenőrizhető okot mutat a nemkorlátosságra ($Qq \leq 0$ miatt $z_\lambda = z + \lambda q \in R$, így $cq > 0$ miatt $cz_\lambda$ bármilyen nagy lehet.) Végül a harmadik jellemzés könnyen ellenőrizhető okot mutat a korlátosságra ($y \geq 0, yQ = c$ esetén minden $x \in R$-ra $cx = (yQ)x = y(Qx) \leq yb$, magyarán az $yb$ érték egy konkrét felső korlát.)

**Következmény 2.33** *Ha egy egyenlőtlenség-rendszer megoldható, akkor van erős bázis-megoldása is.*

**Biz.** A 2.31 tételben $c = 0$-ra (0) fennáll, így a tétel alapján (1) is. •

Az irodalomban gyakran Caratheodory tételnek hívják a 2.33 következménynek az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ alakra vonatkozó speciális esetét, ami szerint, ha van megoldás, akkor van olyan is, amelynek a nem-nulla komponenseihez tartozó $A$-beli oszlopok lineárisan függetlenek.

Alkalmazhatjuk a Farkas lemma balról szorzással felírt általános alakját (2.20 tétel) a 2.31 tétel kiterjesztésére arra az esetre, amikor az $R$ poliéder a

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0 \tag{2.25}$$

egyenlőtlenség-rendszer megoldás-halmazát jelöli.

**TÉTEL 2.34 (Korlátossági tétel)** *Tegyük fel, hogy az $R$ poliéder nemüres, és legyen $c = (c_0, c_1)$ adott vektor. A következők ekvivalensek.*

*(0) A $\{cx\}$ lineáris függvény $R$-n felülről korlátos.*
*(1) Minden $z \in R$ elemre létezik (2.25)-nek olyan $x^*$ erős bázis-megoldása, amelyre $cx^* \geq cz$.*
*(2) Nem létezik olyan $q = (q_0, q_1)$ vektor, amelyre $cq > 0$, és $q_1 \geq 0, Pq_0 + Aq_1 = 0, Qq_0 + Bq_1 \leq 0$.*
*(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre*

$$y_0P + y_1Q = c_0,\ y_0A + y_1B \geq c_1,\ y_1 \geq 0. \bullet \tag{2.26}$$

Befejezésül megemlítjük, hogy a 2.23 és a 2.33 tételek alkalmazásával megkaphatjuk a Farkas lemma egy erősebb alakját.

**TÉTEL 2.35** *Az $\{Ax = b,\ x \geq 0\}$ rendszernek akkor és csak akkor van olyan megoldása, amelyben az $x$ pozitív változóinak megfelelő $A$-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ha nem létezik olyan $y$, amelyre $yA \geq 0$, $yb = -1$ és $A$-nak létezik $r(A, b) - r(b)$ lineárisan független oszlopa, amelyekre $y$ merőleges. (Röviden, vagy a primál, vagy a duál problémának létezik bázis-megoldása).* $\bullet$

A primál feltétel geometriailag azt mondja, hogy ha a $b$ vektor benne van néhány vektor $K$ kúpjában, akkor már benne van ezen vektorok közül vett lineárisan független vektorok kúpjában is. Egy $y$ duális bázis-megoldás geometrialilag a következőt jelenti. Amennyiben $r(A, b) = r(A) + 1$, úgy az $y$ ortogonális $r(A)$ lineárisan független oszlopra, ezért $yA = 0$, vagyis az $y$ normálisú homogén hipersík tartalmazza $A$ oszlopait, de $b$-t nem. Amennyiben $r(A, b) = r(A)$, úgy az $y$ normálisú $K$-t tartalmazó, $b$-t nem tartalmazó homogén féltér olyan, hogy határoló hipersíkja, amely a kúp egy 'határoló lapját' (maximális valódi oldalát) tartalmazza. Ha a kúp teljes dimenziós, úgy a hipersík ezen határoló lap hipersíkja.

**Következmény 2.36 (C. Caratheodory)** *Ha a $d$-dimenziós tér egy $z$ pontja $p \geq d + 1$ darab pont konvex kombinációja, akkor ezen pontok között van legfeljebb $d+1$, amelyeknek $z$ konvex kombinációja.*

**Biz.** Készítsünk el egy mátrixot, amelynek $p$ oszlopa van és az egyes oszlopok a $p$ pont helyvektorait tartalmazzák, majd egészítsük ki a mátrixot még egy csupa egyesből álló sorral. A keletkező $(d+1) \times p$-es mátrixot jelölje $A$. Az, hogy $z$ előáll a megadott pontok konvex kombinációjaként azt jelenti, hogy az $Ax = (z, 1)$-nek létezik nem-negatív megoldása. De akkor létezik bázis-megoldása is, ami azt jelenti, hogy az előállításban legfeljebb annyi együttható nemnulla, mint ahány sora van az $A$ mátrixnak, vagyis $d + 1$. $\bullet$

2002. december 17.ulinp13

# 2.4 OPTIMALITÁS: A DUALITÁS TÉTEL

Először azt vizsgáltuk, hogy egy $R$ poliéder mikor nemüres, majd azt, hogy egy $cx$ lineáris célfüggvény mikor korlátos felülről $R$-n. Most rátérünk a lineáris programozás alapkérdésének tárgyalására: amennyiben $R$ nemüres és $\{cx : x \in R\}$ korlátos felülről, hogyan jellemezhetjük a $cx$-t maximalizáló pontokat és a maximum értékét. Röviden, maximalizáljuk $cx$-t az $R$ poliéder felett:

$$\max\{cx : x \in R\} \tag{2.27}$$

A (2.27) feladatot **lineáris program**nak nevezzük. Természetesen a poliéder lehet más alakban is megadva, szorozhatunk balról, és maximalizálás helyett szerepelhet minimalizálás (lásd a (2.43) és a (2.44) alakokat). Miután $R$ nemüres és $cx$ felülről korlátos $R$-n, a 2.31 tétel alapján jogos (2.27)-ben maximumról beszélni.

Geometriailag egy lineáris program azt jelenti, hogy a $c$ vektor irányában keressük az $R$ legtávolabbi pontját, vagyis azt a pontot, amelyben egy $c$ normálisú hipersík, ha kívülről a poliéderhez toljuk, azt megérinti. Speciális eset, amikor a $c$ egy egységvektor (például $c = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, ekkor a lineáris programozás feladata úgy interpretálható, hogy egy poliédernek a legmagasabb pontját kell megkeresni. Ez igen egyszerűnek látszik, ráadásul az általános $c$ esete egyszerű fogással ilyen alakra hozható. Mégsem ismert olyan hatékony (polinomiális futásidejű) eljárás, amely a Gauss-eliminációhoz hasonló egyszerű lépésekből áll. Egy egyenlőtlenség-rendszer megoldására szolgáló Fourier-Motzkin eljárás ilyen egyszerű lépésekből áll, és könnyen módosítható is egy lineáris program megoldására, de nem hatékony. A szimplex algoritmussal a következő részben fogunk megismerkedni. Ez az FM eljáráshoz hasonlít abban, hogy egyszerű lépésekből áll és matematikai értelemben nem hatékony. A gyakorlatban ugyanakkor igen jól használható.

## 2.4.1 Optimalitási feltételek

Egy lineáris programmal kapcsolatban fontos kérdés, hogy létezik-e olyan egyszerűen ellenőrizhető eszköz, amelynek segítségével a poliéder egy megadott $x^*$ elemének optimalitásáról gyorsan meggyőződhetünk. Amennyiben $x^*$ nem optimális, egy olyan eszköz is kívánatos, amelynek segítségével az $x^*$-nál a poliédernek egy jobb eleméhez tudunk hozzájutni ($x$ jobb: $cx > cx^*$).

Legyen $x^*$ az $R = \{x : Qx \leq b\}$ egy adott eleme. Azt mondjuk, hogy egy $\vec{x}'$ irány $x^*$-nál **lehetséges elmozdulás**, ha van olyan (kicsiny) pozitív $\lambda$ szám, amelyre $x^* + \lambda x' \in R$. Ha ráadásul $cx' > 0$, akkor $\vec{x}'$-t **növelő iránynak** hívjuk ($c$-re és $x^*$-re nézve). Egyszerű megfigyelni, hogy $\vec{x}'$ pontosan akkor lehetséges elmozdulás, ha $Q^=_* x' \leq 0$, ahol $Q^=_*$ a $Q$ azon soraiból álló részmátrix, amelyekre az általuk meghatározott $Qx \leq b$-beli egyenlőtlenséget a $x^*$ egyenlőséggel teljesíti.

**TÉTEL 2.37** *Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Qx \leq b\}$ poliéder nemüres és $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos. Az $R$ egy megadott $x^*$ elemére a következő állítások ekvivalensek.*

*(1) $cx^* \geq cx$ minden $x \in R$, azaz $x^*$ maximalizálja a $cx$ függvényt az $R$-n (röviden, $x^*$ optimális).*
*(2) Nem létezik növelő irány, azaz olyan $x'$ vektor, amelyre $Q^=_* x' \leq 0$ és $cx' > 0$.*
*(3) Létezik olyan $y^*$ vektor, amely kielégíti az*

$$y^* \geq 0, y^*Q = c \tag{2.28}$$

*duális feltételt, és amelyre fennáll az*

$$y^*(i) > 0 \Rightarrow \ _iqx^* = b(i) \tag{2.29}$$

*optimalitási kritérium (ami szavakban: az $y^*$ bármely komponense csak akkor lehet pozitív, ha a neki megfelelő primál egyenlőtlenséget $x^*$ egyenlőséggel teljesít).* (2.28) *fennállása esetén* (2.29) *azzal ekvivalens, hogy*

$$cx^* = by^*, \tag{2.30}$$

*továbbá azzal, hogy*

$$y^*(b - Qx^*) = 0. \tag{2.31}$$

**Biz.** (1) $\Rightarrow$ (2) Ha létezik a szóbanforgó $x'$, akkor kicsiny pozitív $\lambda$-ra az $x^* + \lambda x'$ vektor $R$-ben van, ami $cx' > 0$ miatt ellentmond $cx^*$ maximalitásának.

(2) $\Rightarrow$ (3) Ha nem létezik a szóbanforgó $x'$, akkor a Farkas lemma (balról szorzós alakja) miatt van olyan $y' \geq 0$, amelyre $y'Q^=_* = c$, így $y'$-t nulla komponensekkel kiegészítve egy (2.29)-t kielégítő $y^*$-t kapunk.

(3) $\Rightarrow$ (1) Tetszőleges $x \in R$ esetén

$$cx = (y^*Q)x = y^*(Qx) \leq y^*b, \tag{2.32}$$

vagyis az $y^*b$ érték felső korlát $\{cx : x \in R\}$-re. Ebből adódik, hogy egy $x^* \in R$ elem bizonyosan optimális, ha (2.32)-t egyenlőséggel teljesíti. Másrészt (2.29),(2.30), (2.31) mindegyike azzal ekvivalens, hogy $x^*$ egyenlőséggel teljesíti (2.32). •

Az előbbi bizonyítás lépéseinek a másolásával kiterjeszthetjük a tételt az általános alakra.

**Gyakorlat 2.14** *Igazoljuk, hogy egy általános* $R = \{(x_0, x_1) : x_1 \geq 0, Px_0 + Ax_1 = b_0, Qx_0 + Bx_1 \leq b_1\}$ *alakban megadott poliéder* $x^* = (x_0^*, x_1^*)$ *elemére az* $x' = (x_0', x_1')$ *vektor* $\vec{x}'$ *iránya pontosan akkor lehetséges elmozdulás, ha* $Px_0' + Ax_1' = 0$ *és* $Qx_0' + Bx_1' \leq 0$, *és* $x_1^*(i) = 0$ *esetén* $x_1'(i) \geq 0$.

**TÉTEL 2.38** *Tegyük fel, hogy a*

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \leq b_1,\ x_1 \geq 0 \tag{2.33}$$

*rendszerrel definiált* $R$ *poliéder nemüres és* $\{cx = c_0x_0 + c_1x_1 : x \in R\}$ *felülről korlátos. Legyen* $x^* = (x_0^*, x_1^*)$ *az* $R$ *egy eleme, és jelölje* $(Q^=_*, B^=_*)$ *a* $(Q, B)$ *mátrix azon sorai által alkotott részmátrixot, amelyekre a hozzájuk tartozó egyenlőtlenségeket* $x^*$ *egyenlőséggel teljesíti, míg* $b^=_{1*}$ *jelölje a* $b_1$ *megfelelő részét. A következő állítások ekvivalensek.*

*(1)* $cx^* \geq cx$ *minden* $x \in R$, *azaz* $x^*$ *maximalizálja a* $cx$ *függvényt az* $R$*-n (röviden,* $x^*$ *optimális).*
*(2) Nem létezik növelő irány, azaz olyan* $x' = (x_0', x_1')$ *vektor, amelyre* $cx' > 0$,

$$Px_0 + Ax_1 = b_0, Q^=_* x_0 + B^=_* x_1 \leq b^=_{1*} \tag{2.34}$$

*és*

$$x_1^*(i) = 0 \Rightarrow x_1'(i) \geq 0. \tag{2.35}$$

*(3) Létezik olyan* $y^* = (y_0^*, y_1^*)$ *vektor, amely kielégíti az*

$$y_1^* \geq 0, y_0^*P + y_1^*Q = c_0,\ y_0^*A + y_1^*B \geq c_1 \tag{2.36}$$

*duális feltételt, és amelyre fennáll az*

$$x_1^*(j) > 0 \Rightarrow y_0^*a_j + y_1^*b_j = c_1(j) \tag{2.37}$$

*valamint az*

$$y_1^*(i) > 0 \Rightarrow\ _iqx_0^* +\ _ibx_1 = b_1(i), \tag{2.38}$$

*optimalitási kritérium.* (2.36) *fennállása esetén az optimalitási kritérium azzal ekvivalens, hogy*

$$cx^* = by^*, \tag{2.39}$$

*és azzal, hogy*

$$y^*(b - Mx^*) = 0, \tag{2.40}$$

*ahol* $M = \begin{pmatrix} P & A \\ Q & B \end{pmatrix}$.

**Megjegyzés** Az optimalitási kritérium szavakkal kifejezve azt jelenti, hogy egy előjelkötött $x_1^*(j)$ primál változó vagy $y_1^*(i)$ duál változó csak akkor lehet pozitív, ha a neki megfelelő duál vagy primál egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül.

**Biz.** (1) $\Rightarrow$ (2) Ha létezik a szóbanforgó $x'$, akkor kicsiny pozitív $\lambda$-ra a $x^* + \lambda x'$ vektor $R$-ben van, ami $cx' > 0$ miatt ellentmond $x^*$ maximalitásának.

(2) $\Rightarrow$ (3) Jelölje $P'$ a $(P,A)$ mátrix azon részmátrixát, amely a $P$-ből és azon $A$-beli $a_i$ oszlopokból áll, amelyekre $x_1^*(i)>0$, és legyen $A'$ az $A$ maradék része. (Tehát $(P',A')=(P,A)$). Álljon $Q'$ a $Q_*^=$ mátrixból kiegészítve a $B_*^=$ azon oszlopaival, amelyekre az $x_1^*$ megfelelő komponensei pozitívak, és legyen $B'$ a $B_*=$ maradék része. (Tehát $(Q',B')=(Q_*^=,B_*^=)$). Analóg módon definiáljuk $(c_0',c_1')$-t.

Ha (2) szerint nem létezik a szóbanforgó $x'$, akkor a Farkas lemma 2.20 tételben megfogalmazott alakja szerint van olyan $(y_0,y_1)$, amelyre $y_1\geq 0$, $y_0P+y_1Q_*^= = c_0', y_0A+y_1B_*^= \geq c_1'$. Legyen $y_0^* := y_0$, és legyen $y_1^*$ az a vektor, amelyet $y_1$-ből kapunk nulla komponensek hozzávételével (éspedig annyival, ahány sora $Q_*^<$-nek van). Az így kapott $(y_0^*,y_1^*)$ vektor kielégíti a duál feltételeket és az optimalitási kritériumot.

(3) $\Rightarrow$ (1) Tetszőleges $x\in R$ esetén

$$cx=c_0x_0+c_1x_1\leq[(y_0^*,y_1^*)\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}]x_0+[(y_0^*,y_1^*)\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}]x_1=(y^*M)x= \tag{2.41}$$

$$=y^*(Mx)=y_0^*[Px_0+Ax_1]+y_1^*[Qx_0+Bx_1]\leq y_0^*b_0+y_1^*b_1=y^*b, \tag{2.42}$$

vagyis az $y^*b$ érték felső korlát $\{cx : x\in R\}$-re. Ebből adódik, hogy az $x^*\in R$ elem bizonyosan optimális, ha (2.41) és (2.42) mindegyike egyenlőséggel teljesül. Az első azt jelenti, hogy $c_1x_1 = (y_0^*,y_1^*)\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x_1^*$, ami pontosan akkor áll fenn, ha $x_1^*(j)>0$ esetén $y_0^*a_i+y_1^*b_i=c_1(i)$, azaz (2.37) teljesül. Az $x^*$ akkor teljesíti (2.42)-t egyenlőséggel, ha $y_1^*[Qx_0^*+Bx_1^*]=y_1^*b_1$, ami pontosan akkor áll fenn, ha $y_1^*(i)>0$ esetén ${}_iqx_0^*+{}_ibx_1^*=b_1(i)$, azaz (2.38) teljesül.

Másrészt (2.39), (2.40) mindegyike azzal ekvivalens, hogy $x^*$ mind (2.41)-t, mind (2.42)-t egyenlőséggel teljesíti. •

Megjegyzzük, hogy a 2.38 tétel bizonyítására alternatív lehetőség a 2.37 tételből a korábban már megismert átalakításokkal jutni az általános alakra.

**Gyakorlat 2.15** *Írjuk fel az optimalitási feltételeket a* $\max\{cx : Ax=b, x\geq 0\}$, $\max\{cx : Bx\leq b, x\geq 0\}$ *lineáris programokra.*

### 2.4.2 A dualitás tétel

A korlátossági tételben láttuk, hogy ha $cx$ felülről korlátos az $R=\{x : Qx\leq b\}$ nemüres poliéderen, akkor tetszőleges olyan $y$ vektorra, amelyre $y\geq 0, yQ=c$ a $by$ érték felső korlát $\{cx : x\in R\}$ maximumára. A legjobb (ilyen típusú) felső korlátot az ilyen $by$ értékek minimuma jelenti. Érdekes, hogy a legkisebb felső korlát meghatározásának feladata, vagyis a $\min\{by : y\geq 0, yQ=c\}$ problémája is egy (balról szorzással felírt) lineáris program, amit **duális programnak** hívunk, megkülönböztetendő a $\max\{cx : Qx\leq b\}$ **primál programtól.** A kérdésre, hogy az így kapott legjobb korlát vajon mindig elérhető-e, másszóval hogy a primál optimum és a duál optimum értéke mindig megegyezik-e, a dualitás tétel adja meg a választ.

**TÉTEL 2.39 (Dualitás tétel, speciális alak)** *Tegyük fel, hogy az* $R=\{x : Qx\leq b\}$ *primál poliéder nemüres. Tegyük fel továbbá, hogy* $\{cx : x\in R\}$ *felülről korlátos (ami a 2.31 tétel szerint azzal ekvivalens, hogy a duális* $R^*=\{y : y\geq 0, yQ=c\}$ *poliéder nemüres). Ekkor a primál optimalizálási feladatban a maximum egyenlő a duál feladatban szereplő minimummal, azaz* $\max\{cx : Qx\leq b\}=\min\{by : y\geq 0, yQ=c\}$.

**Biz.** Ha $x\in R$ és $y\in R^*$, akkor $cx=(yQ)x=y(Qx)\leq yb$, és így max $\leq$ min következik. Az egyenlőség igazolásához egy olyan $x^*\in R$ és $y^*\in R^*$ primál és duál megoldás-párt kell találnunk, amelyekre $cx^*=by^*$. Az 2.32 következmény szerint, ha $\{cx : x\in R\}$ felülről korlátos, akkor a maximum egy $x^*$ erős bázis-megoldáson felvétetik. A 2.37 tétel szerint létezik olyan $y^*\in R^*$ vektor, amelyre $y^*(b-Qx^*)=0$, amiből $y^*b=cx^*$ következik. •

A dualitás tételt is megfogalmazhatjuk az általános alakra. A primál probléma a következő:

$$\max\{(c_0x_0 + c_1x_1) : Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \le b_1,\ x_1 \ge 0\}. \tag{2.43}$$

A primál problémához hozzárendelt duális lineáris program a következő:

$$\min\{(c_0y_0 + c_1y_1) : y_0P + y_1Q = c_0,\ y_0A + y_1B \ge c_1,\ y_1 \ge 0\}. \tag{2.44}$$

A (2.44)-ban szereplő poliédert $R^*$-gal jelöljük és **duális** poliédernek hívjuk. (Figyelem: $R^*$ az $m := m_1 + m_2$ dimenziós térben van, míg $R$ az $n := n_1 + n_2$ dimenziósban. Az $R^*$ nem csak az $R$ primál poliédertől függ, hanem a $c$-től is, sőt az $R$ megadásától is!)

**TÉTEL 2.40 (Dualitás tétel)** *Tegyük fel, hogy a* (2.43) *rendszer által definiált $R$ primál poliéder nemüres. Tegyük fel továbbá, hogy a $cx = c_0x_0+c_1x_1$ célfüggvényre nézve $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos (vagy ekvivalensen a duális $R^*$ poliéder nemüres). Ekkor a* (2.43) *primál optimalizálási feladatban a maximum egyenlő a* (2.44) *duál feladatban szereplő minimummal.*

A speciális alakhoz hasonlóan, a tétel a 2.38 tételből közvetlenül adódik.

**Feladat 2.16** *Irjuk fel a dualitást tételt* $\max\{cx : Bx \le b, x \ge 0\}$ *illetve a* $\max\{cx : Ax = b, x \ge 0\}$ *primál lineáris programokra.*

**Feladat 2.17** *Irjuk fel a* $\min\{\alpha : Ax - \alpha b = b, (x, \alpha) \ge 0\}$ *lineáris program duálisát, igazoljuk mind a primál, mind a duál rendszer megoldhatóságát, és a dualitás tételből vezessük le a Farkas lemmát* (2.13 tétel).

**Feladat 2.18** *Tegyük fel, hogy az* $\{x : Ax = b, x \ge 0\}$ *poliéder nemüres. Az $A$ egy $a_i$ oszlopát* **érdektelennek** *mondjuk, ha a poliéder minden $x$ elemére $x(i) = 0$. Igazoljuk, hogy $a_i$ akkor és csak akkor érdektelen, ha van olyan $y$ vektor, amelyre $yb = 0$, $yA \ge 0$ és $ya_i$ pozitív.*

Azt mondjuk, hogy egy $c'x$ célfügvény vagy a $c'$ vektor valamely $R$ poliéderre nézve **neutrális** (semleges), ha $R$ minden $x$ elemére $c'x$ értéke ugyanaz. Két vektort (célfüggvényt) akkor mondunk **ekvivalensnek**, ha különbségük neutrális.

**Feladat 2.19** *Tekintsük az* $\min\{cx : Ax = b, x \ge 0\}$ *lineáris programot. Legyen $A'$ az $A$ érdekes oszlopai által alkotott részmátrix és jelölje $c'$ a $c$ megfelelő részét. Igazoljuk hogy $c$ akkor és csak akkor neutrális, ha létezik olyan $y$, amelyre $yA' = c'$.*

**Feladat 2.20** *Az* $R := \{Ax = b, x \ge 0\}$ *poliéder valamely $x_0$ eleme akkor és csak akkor minimalizálja $cx$-t $R$-n, ha létezik egy olyan $c$-vel ekvivalens nemnegatív vektor, amely merőleges $x_0$-ra.*

**Feladat 2.21** *Tekintsük az* $R := \{x : Ax \le b, x \ge 0\}$ *primál és* $R^* = \{y : yA \ge c, y \ge 0\}$ *duál poliédereken definiált* $\max\{cx : x \in R\}$ *és* $\min\{by : y \in R^*\}$ *primál-duál lineáris program párt, és tegyük fel, hogy $R$ és $R^*$ nem üres. Igazoljuk, hogy az $A$-nak van olyan $A'$ nemszinguláris részmátrixa (mindegy milyen méretű), amelyre az $A'x' = b'$ egyértelmű $x'$ megoldásából nullák hozzávételével keletkező $x_1$ eleme $R$-nek (ahol $b'$ azon része $b$-nek, amely az $A'$ sorainak felel meg) továbbá az $y'A' = c'$ egyértelmű $y'$ megoldásából nullák hozzávételével keletkező $y_1$ eleme $R^*$-nak. Mutassuk meg, hogy $x_1$ primál optimum, $y_1$ duál optimum.*

### 2.4.3 Lineáris és logikai következmény

Vizsgáljuk meg, hogy egy (nemüres) poliéder mikor fekszik teljesen egy adott zárt féltérben. Tekintsük az általános alakú a

$$Px_0 + Ax_1 = b_0,\ Qx_0 + Bx_1 \le b_1,\ x_1 \ge 0 \tag{2.45}$$

egyenlőtlenség-rendszert, melynek megoldás-halmazát jelölje $R$. Legyen $M = \begin{pmatrix} P & A \\ Q & B \end{pmatrix}$, és tegyük fel, hogy $R$ nemüres. Legyen $c = (c_0, c_1)$ adott vektor. Az $(x_0, x_1)$ vektort néha röviden $x$-szel jelöljük, és hasonlóképp a $\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$ vektort $b$-vel. Azt mondjuk, hogy a

$$c_0x_0 + c_1x_1 \le \gamma \tag{2.46}$$

egyenlőtlenség **logikai következménye** a (2.45) rendszernek, ha (2.45) minden megoldása teljesíti (2.46)-t. Ez nyilván avval egyenértékű, hogy az $R$ poliéder benne van az $\{x : cx \leq \gamma\}$ féltérben. A (2.46) egyenlőtlenség **lineáris következménye** (2.45)-nek, ha létezik olyan $y := (y_0, y_1)$, amelyre

$$y_1 \geq 0,\ y_0 P + y_1 Q = c_0,\ y_0 A + y_1 B \geq c_1,\ \ yb \leq \gamma. \tag{2.47}$$

**TÉTEL 2.41** *Feltéve, hogy $R$ nemüres,* (2.46) *akkor és csak akkor lineáris következménye* (2.45)*-nek, ha logikai.*

**Biz.** Tegyük fel először, hogy $cx \leq \gamma$ lineáris következmény, azaz létezik a szóbanforgó $y$. Ekkor (2.45) bármely $x$ megoldására $cx = c_0x_0 + c_1x_1 \leq [(y_0, y_1)\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}]x_0 + [(y_0, y_1)\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}]x_1 = (yM)x = y(Mx) = y_0[Px_0 + Ax_1] + y_1[Qx_0 + Bx_1] \leq y_0b_0 + y_1b_1 = yb \leq \gamma$, azaz $cx \leq \gamma$ valóban logikai következmény.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $cx \leq \gamma$ logikai következmény. Először azt a speciális esetet nézzük, amikor $A, B, P$ mindegyike üres, azaz $R = \{x : Qx \leq b\}$. Azt kell kimutatnunk, hogy $cx \leq \gamma$ lineáris következmény, ami most azt jelenti, hogy létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yQ = c$ és $yb \leq \gamma$. Tegyük fel, nem ez a helyzet, azaz nem létezik olyan $y \geq 0$, amelyre $yQ = c$ és $y(-b) \geq -\gamma$. Ekkor a Farkas lemma (balról szorzós alakja) miatt van olyan $(x, \alpha)$ vektor, amelyre

$$\alpha \geq 0, Qx - \alpha b \leq 0, cx - \alpha\gamma > 0. \tag{2.48}$$

Ha most $\alpha = 0$, akkor ez a

$$Qx \leq 0,\ cx > 0 \tag{2.49}$$

alakot ölti. Ebből következik, hogy az $R$ poliéder egy $z$ elemére bármilyen pozitív $\lambda$ esetén $z + \lambda x$ benne van $R$-ben, ugyanakkor $c(z + \lambda x)$ bármilyen nagy lehet, ha $\lambda$ nő, vagyis $cx \leq \gamma$ nem volna logikai következmény. Vagyis $\alpha$-nak pozitívnak kell lennie. Feltehető, hogy $\alpha = 1$, mert $\alpha$-val végigoszthatunk. Most (2.48) azzal ekvivalens, hogy $Qx \leq b,\ cx > \gamma$ vagyis az $x$ létezése cáfolja, hogy $cx \leq \gamma$ logikai következmény volna.

Nézzük most azt az esetet, amikor $A$ és $B$ üres. Az $R$-t definiáló rendszer a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{2.50}$$

alakra egyszerűsödik, és ilyenkor a $cx \leq \gamma$ egyenlőtlenség definíció szerint akkor lineáris következmény, ha létezik olyan $y := (y_0, y_1)$, amelyre

$$y_1 \geq 0,\ y_0 P + y_1 Q = c,\ yb \leq \gamma. \tag{2.51}$$

(2.50) azzal ekvivalens, hogy $Px \leq b_0, -Px \leq -b_0, Qx \leq b_1$. Ennek a rendszernek logikai következménye a $cx \leq \gamma$ egyenlőtlenség, így az első rész szerint létezik olyan $(y_0', y_0'', y_1) \geq 0$ vektor, amelyre $y_0'P + y_0''(-P) + y_1Q = c$ és $y_0'b_0 + y_0''(-b_0) + y_1b_1 \leq \gamma$, de ekkor $y_0 := y_0' - y_0''$ választással (2.51) teljesül, azaz $cx \leq \gamma$ lineáris következmény (2.50)-nek.

Az általános eset bizonyításához legyen $B^* := \begin{pmatrix} B \\ -I \end{pmatrix}$, $Q^* := \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix}$, ahol $I$ egy $n_2 \times n_2$-es egységmátrix, míg 0 egy $n_2 \times n_1$-es nulla-mátrix. Legyen $b_1^* := \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ahol 0 most egy $n_2$ dimenziós 0-vektor. A megelőző eset $P$ és $Q$ helyén rendre $P^*$-gal és $Q^*$-gal illetve $b_1$ helyén $b_1^*$-gal éppen az általános alakkal ekvivalens. •

A megelőző szakaszban megmutattuk, hogy a dualitás tétel miképp vezethető le a Farkas lemmából és abból a tételből, hogy a maximum (erős bázis-megoldáson) felvétetik. A 2.41 tétel bizonyítása csak a Farkas lemmára támaszkodott. Most megmutatjuk, hogy a dualitás tétel könnyen levezethető a 2.41 tételből.

**TÉTEL 2.42 (Dualitás tétel, speciális alak)** *Tegyük fel, hogy mind az $R := \{Bx \leq b, x \geq 0\}$ primál, mind az $R^* := \{yB \geq c, y \geq 0\}$ duál poliéder nemüres. Ekkor $cx \leq by$ fennáll minden $x \in R, y \in R^*$ esetén, és van olyan $x^* \in R, y^* \in R^*$, melyekre egyenlőség érvényes, azaz* $\max\{cx : x \in R\} = \min\{by : y \in R^*\}$.

**Biz.** Az $x$ és $y$ nem-negativitása miatt $x \in R, y \in R^*$ esetén $cx \leq (yB)x = y(Bx) \leq yb$, így mindenesetre $cx$ felülről korlátos $R$-n, $by$ pedig alulról $R^*$-n. Legyen $\gamma_s := \sup\{cx : x \in R\}$ és $\gamma_i := \inf\{by : y \in R^*\}$. Ekkor tetszőleges $x \in R, y \in R^*$ esetén $cx \leq \gamma_s \leq \gamma_i \leq by$. A tételhez azt kell belátnunk, hogy létezik $x^* \in R$, amelyre $cx^* = \gamma_i$ és létezik $y^* \in R^*$, amelyre $by^* = \gamma_s$. Szimmetria miatt elég $y^*$ létezését belátnunk, $x^*$-é analóg módon következik.

Most tehát a $cx \leq \gamma_i$ egyenlőtlenség logikai következménye a $Bx \leq b, x \geq 0$ egyenlőtlenség-rendszernek, így a 2.41 tétel szerint létezik olyan $y^* \geq 0$, amelyre $y^*B \geq c$ és $y^*b \leq \gamma_i$. De itt a $\gamma_i$ definíciója miatt nem szerepelhet szigorú egynelőtlenség, azaz $y^*b = \gamma_i$. •

Megjegyzendő, hogy megfordítva, a 2.41 tétel a dualitás tételből közvetlenül adódik. Nézzük a technikailag legegyszerűbb $Qx \leq b$ esetet, és tegyük fel, hogy a $cx \leq \gamma$ logikai következmény. Ez azt jelenti, hogy $\max\{cx : Qx \leq b\} \leq \gamma$, így a dualitás tétel miatt $\gamma \geq \max\{cx : Qx \leq b\} = \min\{yb : y \geq 0, yQ = c\}$. Vagyis létezik olyan $y \geq 0$ amelyre $yQ = c$ és $\gamma \geq yb$.

### 2.4.4 Neumann tétele

A játékelméletben fontos alkalmazásra lel a következő tétel. Egy vektor **tetején** értsük a legnagyobb komponensének az értékét. A vektor **alja** legyen a legkisebb komponensének az értéke.

**TÉTEL 2.43 (Neumann János)** *Tetszőleges nemüres $A$ mátrixra az $A$ oszlopvektorai által feszített politopban lévő elemek tetejének a minimuma egyenlő az $A$ sorvektorai által feszített politopban lévő elemek aljának maximumával. Formálisabban,* $\min\{(\max Ax) : x \geq 0, 1x = 1\} = \max\{(\min yA) : y \geq 0, 1y = 1\}$, *ahol az $1x$ rövidítés a csupa 1 vektor és az $x$ skalárszorzatát jelöli.*

**Biz.** A primál feladat egy olyan minimális $w$ szám keresésével ekvivalens, amelyre létezik $x \geq 0$ vektor úgy, hogy $1x = 1$ és $Ax \leq (w, w, \ldots, w)$ érvényes. Ez viszont éppen a

$$\min\{w : -Ax + (w, w, \ldots, w) \geq 0, x \geq 0, 1x = 1\} \tag{2.52}$$

lineáris programmal egyenértékű.

A duális feladat egy olyan maximális $z$ szám keresésével ekvivalens, amelyre létezik $y \geq 0$ vektor úgy, hogy $1y = 1$ és $yA \geq (z, z, \ldots, z)$ érvényes. Ez viszont éppen a

$$\max\{z : y(-A) + (z, z, \ldots, z) \leq 0, y \geq 0, 1y = 1\} \tag{2.53}$$

lineáris programmal egyenértékű. Miután a (2.53) program duálisa éppen a (2.52) program, így a dualitás tételből adódik, hogy a $w$ minimális értéke egyenlő a $z$ maximális értékével. •

2002. december 17.ulinp14

### 2.4.5 Egy játekelméleti alkalmazás

Sári és Oszi a következő játékot játsszák. Egyszerre elrejtenek a kezükben egy vagy két forintot, majd tippelnek, hogy a másik egy vagy két forintot rejtett-e el. Amennyiben mindkettejük tippje helyes, avagy mindkettejük tippje hibás, úgy a játék döntetlen. Ha viszont pontosan az egyikük tippje helyes, úgy a jól tippelő elnyeri a kettejük által elrejtett pénz **összegét** (ami tehát 2,3 vagy 4 forint). Ez a játék egy fordulója. Kérdés, hogy ha $N$ fordulót játszanak, milyen stratégiát érdemes követniük.

Mindkét játékos egy lehetséges fordulóbeli játékát egy számpárral lehet megadni, amelynek első tagja azt jelenti, hogy hány forintot rejtett, a második tagja pedig azt, hogy hány forintot tippelt. Vagyis egy fordulóban mindkét játékos előtt négy lehetséges választás van: $[1,1]$, $[1,2]$, $[2,1]$, $[2,2]$. Nevezzük ezeket **elemi** vagy **tiszta** stratégiának. A későbbiekben ezen sorrend szerint fogunk rájuk hivatkozni (tehát pl. a 3-dik elemi stratégia $[2,1]$).

Ha Sári például mindig az $[1,1]$ párt választja, akkor könnyen rosszul járhat, mert ezt ellenfele hamar kifigyelheti, és akkor a $[2,1]$ válasszal mindig nyer. Sári persze ravaszabbul is eljárhat, például mindig ugyanúgy rejt és tippel, mint ahogy Oszi tette a megelőző fordulóban, de ennek a stratégiának is az a hátulütője, hogy Oszi előbb-utóbb rájöhet az alkalmazott szabályra és akkor már könnyen nyer. Ez a veszély minden determinisztikusan meghatározott választási szabály esetén fennáll. Ezt elkerülendő Sári minden fordulóban a véletlentől teszi függővé a választását. Természetesen az a kérdés, hogy milyen valószínűséggel válasszon a négy lehetőség közül.

Tételezzük fel, hogy a lejátszott $N$ forduló során Oszi $c_i$-szer játszotta meg az $i$-dik elemi stratégiát ($i = 1, \ldots, 4$), azaz $\sum c_i = N$. Tegyük fel, hogy Sári a következő stratégiát alkalmazta: mindig az ellenkezőjét mondja annak, mint amit tippel és ezen belül $1/2$ valószínűséggel rejt 1 vagy 2 forintot. Másként szólva a $(0, 1/2, 1/2, 0)$ valószínűségek szerint választ minden fordulóban a négy elemi stratégiából. Várható értékben mekkora nyereségre számíthat?

Oszi $c_1$-szer játszott $[1,1]$-t. Átlagosan ezen $c_1$ eset felében Sári $[1,2]$-t játszik, amikoris Sári 2 forintot veszít, a másik $c_1/2$ esetben Sári $[2,1]$-t játszik, és ekkor 3 forintot nyer. Tehát Sári várható nyeresége $3c_1/2 - 2c_1/2 = c_1/2$.

$c_2 + c_3$ esetben Oszi mást tippel, mint rejt, ezek a fordulók tehát mind döntetlenek.

Végül Oszi $c_4$ esetben játszik $[2,2]$-t. Ezeknek átlagosan a felében Sári $[1,2]$-t játszik és nyer 3 forintot, míg a másik felében Sári $[2,1]$-t játszik és veszít 4 forintot. Ezen $c_4$ esetben tehát Sári várható össz-nyeresége $3c_4/2 - 4c_4/2 = -c_4/2$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az $N$ forduló során Sári várható össz-nyeresége $(c_1 - c_4)/2$ forint, ami persze veszteség, ha $c_4 > c_1$. Vagyis a fent választott $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ valószínűségi választás mellett Sári akkor jár a legrosszabbul, ha $c_4 = N$ és $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Ekkor Sári teljes vesztesége várhatólag $N/2$ forint, azaz fordulónként átlagosan $1/2$ Ft. Azaz Sári ezzel a stratégiával azt tudja biztosítani magának, hogy átlagos vesztesége Oszi bármilyen játéka esetén se haladja meg az $1/2$ forintos fordulónkénti átlagot.

Az $y = (0, 1/2, 1/2, 0)$ valószínűségek helyett természetesen választhatunk más eloszlást is. Nevezzünk egy $y$ vektort **sztochasztikusnak**, ha nem-negatív és $1 \cdot y = 1$. Minden sztochasztikus vektor egy **kevert stratégiát** definiál. Természetesen a fentiek mintájára tetszőleges kevert stratégiára rögzített $c := (c_1, \ldots, c_4)$ gyakoriságok esetén kiszámíthatjuk Sári várható nyereségét. Könnyű ellenőrizni, hogy ez éppen az $(yA)c$ szám lesz, ahol $A$ az úgynevezett kifizetési mátrix (Sári szempontjából). Azaz $A$ egy $4 \cdot 4$-s mátrix, amelynek $a_{ij}$ eleme Sári nyereségét (másszóval Oszi veszteségét) jelzi, ha Sári az $i$-dik, míg Oszi a $j$-dik elemi stratégiát játssza.

Sári akkor fogja egy másik kevert stratégiáját jobbnak tekinteni, mint a $(0, 1/2, 1/2, 0)$ kevert stratégia, ha a fordulónkénti átlagos nyeresége nagyobb, mint az előbb adódott $-1/2$ forint. Van-e ilyen jobb stratégia és hogyan lehet a legjobbat megtalálni?

Általánosabban fogalmazva legyen adva egy $A$ $n \times m$-es mátrix. A sorjátékos Sári és az oszlopjátékos Oszi azt játsszák, hogy minden fordulóban Sári kiválasztja $A$-nak egy $i$ sorát, míg Oszi $A$-nak egy $j$ oszlopát, és ennek megfelelően Oszi fizet Sárinak $a_{ij}$ forintot (ami persze azt jelenti, hogy ténylegesen Sári fizet, amennyiben $a_{ij}$ negatív.) Az előbbi játékhoz például a következő mátrix tartozik.

$$\begin{array}{c} \\ {[1,1]} \\ {[1,2]} \\ {[2,1]} \\ {[2,2]} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} [1,1] & [1,2] & [2,1] & [2,2] \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sári egy kevert stratégiáját egy $y$ ($m$-dimenziós) sztochasztikus vektor definiálja éspedig úgy, hogy Sári minden fordulóban $y(i)$ valószínűséggel választja az $i$-dik sort.

Tegyük fel, hogy $N$ forduló során Oszi $c_j$-szer játszotta meg a $j$-dik oszlopot ($\sum c_j = N$). Ekkor a $j$-dik oszlop gyakorisága $x_j := c_j/N$. Nyilván a gyakoriságok $x := (x_1, \dots, x_n)$ vektora sztochasztikus.

Mennyire jó Sárinak egy rögzített $y$ sztochasztikus vektor mint kevert stratégia? Adott $x$ gyakoriság esetén Sári össz-nyeresége várható értékben $(yA)c$, vagyis fordulónkénti átlagos nyeresége $(yA)x$. Ez azon $x$ gyakoriság mellett a legrosszabb Sárinak, amelyre $(yA)x$ legkisebb. Vagyis egy $y$ kevert stratégia $f(y)$ jóságát az $f(y) := \min((yA)x : x \text{ sztochasztikus})$ érték méri. Sárinak tehát az az $y$ a legjobb, amelyre $f(y)$ maximális.

Rögzített $y$ esetén nagyon könnyű $f(y)$-t megállapítani, hiszen ez az $\min(a_y x : x \geq 0, 1 \cdot x = 1)$ lineáris programnak az optimuma, ahol $a_y := yA$. Mivel az optimum csúcsokban vétetik fel és az $\{x : x \geq 0, 1 \cdot x = 1\}$ poliéder csúcsai épp a $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ alakú egységvektorok ($n$ darab), ezért $f(y)$ nem más, mint az $yA$ vektor legkisebb komponense.

Sári optimális kevert stratégiájának megkeresése tehát egy olyan sztochasztikus $y$ vektor megkeresésével egyenértékű, amelyre az $yA$ vektor legkisebb komponense a lehető legnagyobb. Tehát egy olyan maximális $z$ számot kell keresnünk, amelyre létezik $y \geq 0$ úgy, hogy $1 \cdot y = 1$ és $yA \geq (z, z, \dots, z)$. Ez viszont éppen a következő lineáris programozási feladat.

$$\max(z : y(-A) + (z, \dots, z) \leq 0, y \geq 0, 1 \cdot y = 1) \tag{P}$$

A duális lineáris program

$$\min(w : -Ax + (w, w, \dots, w) \geq 0, x \geq 0, 1 \cdot x = 1). \tag{D}$$

Ez az előbbiek mintájára azzal ekvivalens, hogy keressünk olyan sztochasztikus $x$ vektort, amelyre az $Ax$ vektor legnagyobb komponense a lehető legkisebb. Egy ilyen $x$ vektor nem csak a sorjátékos, Sári szempontjából elképzelhető leghátrányosabb gyakoriságként értelmezhető (ahogy eddig tettük), hanem az oszlopjátékos, Oszi optimális kevert stratégiájaként is. Tekintettel arra, hogy mind a primál, mind a duál lineáris programnak van megoldása, a szóbanforgó minimum és maximum létezik és a dualitás tétel szerint egymással egyenlők. Ebből kapjuk a következő tételt.

**TÉTEL 2.44 (Neumann János)** *Tetszőleges A mátrix által meghatározott mátrixjáték esetén a sorjátékos várható nyereségének maximuma egyenlő az oszlopjátékos várható veszteségének minimumával.*

Visszatérve a kiindulási mátrixjátékhoz, kiszámítható (például a szimplex módszer segítségével), hogy a legjobb kevert stratégia $[0, 3/5, 2/5, 0]$. Ennek alkalmazásával Sári biztosíthatja, hogy várható értékben nem veszít.

Ha ténylegesen játszani akarjuk a játékot, meg kell állapodni abban, hogy egy fordulóban ki mondja ki először a tippjét. Oszi nagyvonalú akar lenni és felajánlja, hogy mindig ő mondja ki először. Tehát mindketten rejtenek, majd Oszi kimondja a tippjét, utána Sári is kimondja a tippjét. Feltéve, hogy Sári gondolkodhat Oszi tippjének ismeretében (de persze azon már nem változtathat, hogy ő mennyit rejtett), ki tudja-e aknázni Sári ezt a látszólagos előnyt? Ránézésre azt gondolhatnánk, hogy ez nem jelenthet valódi előnyt, hiszen az elrejtett forintok száma minden fordulóban azelőtt kerül meghatározásra mielőtt akármelyik tipp elhangzik. Mindenesetre a fenti általános model segítségével a kérdést precízen meg lehet válaszolni. Az eredeti mátrixot még kiegészítjük négy sorral, mivel Sárinak négy új tiszta stratégiája adódott. Nevezetesen: A: Sári 1-t rejt és ugyanazt tippeli, mint Oszi, B: Sári 1-t rejt és az ellenkezőjét tippeli, mint Oszi, C: 2-t rejt és ugyanazt tippeli, mint Oszi, D: 2-t rejt és az ellenkezőjét tippeli, mint Oszi. A szimplex módszer segítségével ki lehet számítani, hogy Sári optimális kevert stratágiáját a következő sztochasztikus vektor adja meg: $[0, 56/99, 40/99, 0, 0, 2/99, 0, 1/99]$. Ennek alkalmazásával Sári (Oszi bármilyen játéka esetén is) átlagosan $4/99$ forint nyereségre számolhat fordulónként.

2002. december 17.ulinp15

## 2.5 POLIÉDEREK HATÁROLÓ ALKATRÉSZEI

### 2.5.1 Csúcsok és extrém irányok

Tekintsünk egy nemüres $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliédert. Korábban már bevezettük a csúcs fogalmát a poliéder egy olyan pontjaként definiálva, amely nincs a poliéderhez tartozó szakasz belsejében. (Vagy ekvivalensen, nem áll elő tőle különböző poliéderbeli pontok konvex kombinációjaként.) Nem minden poliédernek van csúcsa, például az affin altereknek bizonyosan nincs. Hamarosan megadjuk a csúcsos poliéderek jellemzését, előbb azonban érdemes megtudni, hogy a csúcs geometriai definíciója miként tükröződik a poliéder mátrixszal adott megadásában.

**TÉTEL 2.45** *Az $R$ csúcsos poliéder egy $z$ elemére a következők ekvivalensek.*
(i) *$z$ csúcs.*
(ii) *$z$ bázis-megoldás.*
(iii) *Létezik olyan $c$ vektor, amelyre $cz > cx$ fennáll $R$ minden $z$-től különböző $x$ elemére.*

**Biz.** (i)$\Rightarrow$(ii) Legyen $z$ csúcs. Ha $z$ indirekt nem bázis-megoldás, azaz $r(Q_z^=) < r(Q)$, úgy van olyan $q$ nemnulla vektor, amelyre $Q_z^= q = 0$. Miután $Q_z^< z \ll b_z^<$, következik, hogy kis pozitív $\lambda$ értékre $z + \lambda q$ és $z - \lambda q$ mindegyike $R$-hez tartozik, ellentmondásban a feltevéssel, hogy $z$ csúcs.
(ii)$\Rightarrow$(iii) Tegyük fel, hogy $z$ bázismegoldás. Legyen $c$ a $Q_z^=$ sorainak az összege azaz $c = y_1 Q$, ahol $y_1$ azt a $(0-1)$-es vektort jelöli, amelyben a $Q_z^=$ sorainak megfelelő komponensek értéke 1. Tetszőleges $x \in R$ esetén $cx = (y_1 Q)x = y_1(Qx) \leq y_1 b = y_1(Qz) = (y_1 Q)z = cz$. Belátjuk, hogy itt $R$ semmilyen $x \neq z$ elemére sem szerepelhet egyenlőség. Valóban, egyenlőség esetén $Q_z^= x = b_z^=$, amiből $x' = x - z$-re $Q_z^= x' = 0$ és így $r(Q) = r(Q_z^=)$ miatt $Qx' = 0$ adódik. Ekkor viszont az $R$ bármely $z'$ elemére van olyan kicsiny pozitív $\lambda$, amelyre mind $z' + \lambda x'$, mind $z' - \lambda x'$ benne van $R$-ben, vagyis $R$-nek nem létezhetne csúcsa.
(iii)$\Rightarrow$(i) Ha $z$ indirekt nem csúcs, akkor létezik olyan $x' \neq 0$, hogy $x_1 := z + x' \in R, x_2 = z - x' \in R$. Most egyrészt $cz = (cx_1 + cx_2)/2$, másrészt (iii) miatt $cz > cx_1, cz > cx_2$, és így $cz > (cx_1 + cx_2)/2$. •

A következő eredmény jellemzi a csúcsos poliédereket.

**TÉTEL 2.46** *Egy $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéderre a következők ekvivalensek.*
(1) *$R$ csúcsos.*
(2) *$R$ egyenes-mentes.*
(3) *$Q$ oszlopai lineárisan függetlenek.*

**Biz.** (1)$\Rightarrow$(2) Tegyük fel indirekt, hogy $R$-nek van egy $x$ pontja és van egy $x' \neq 0$ vektor, hogy az $\{x + \lambda x' : \lambda \in \mathbf{R}\}$ egyenes $R$-ben van. Ekkor szükségképpen $Qx' = 0$ és így az $R$ minden $z$ elemére $\{z + \lambda x' : \lambda \in \mathbf{R}\}$ $R$-ben van, vagyis $R$ nem lehetne csúcsos.
(2)$\Rightarrow$(3) Ha indirekt létezne olyan nemnulla $x'$, amelyre $Qx' = 0$, akkor az $R$ tetszőleges $x$ elemére az $\{x + \lambda x' : \lambda \in \mathbf{R}\}$ $R$-ben volna, azaz $R$ nem volna egyenes-mentes.
(3)$\Rightarrow$(1) A 2.30 következmény miatt létezik $z$ bázis-megoldás. Ha ez indirekt nem csúcs, akkor létezik $x' \neq 0$, amelyre $z + x' \in R, z - x' \in R$. De ekkor $Q_z^= x' = 0$, és így $r(Q_z^=) r(Q)$ miatt $Qx' = 0$, ellentmondásban a (3) feltevéssel. •

Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéderhez hozzárendelhetjük az $A := \{q : Qq = 0\}$ **karakterisztikus alter**et. A 2.21 tétel miatt ez csak a poliédertől függ.

**TÉTEL 2.47** *Valamely nemnulla $q$ vektorra a következők ekvivalensek.*
(1) *$q$ eleme a karakterisztikus altérnek (azaz $Qq = 0$).*
(2) *$R$ bármely $x$ pontjára $x + \lambda q$ minden valós $\lambda$-ra $R$-ben van (vagyis az $x$-en átmenő $q$ irányú egyenes $R$-ben van).*
(3) *$R$-nek van olyan $z$ pontja, amelyre $z + \lambda q$ minden valós $\lambda$-ra $R$-ben van.*

**Biz.** Az (1)$\rightarrow$(2) irány triviális. A (2)$\rightarrow$(3) irány semmitmondó. Végül, ha (3) fennáll, akkor szükségképpen $Qq = 0$. •

**Következmény 2.48** *Egy nemüres poliéder akkor és csak akkor egyenes-mentes, ha a definiáló mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.* •

**Következmény 2.49** *Az $R$ poliéder egy $z$ pontját tartalmazó legbővebb, $R$-ben fekvő affin altér az $A$ karakterisztikus altér $z$-vel való eltoltja.*

**Biz.** A definícióból világos, hogy az $A+z$ affin altér $R$-ben van és tartalmazza $z$-t. Legyen most $x'$ eleme egy $z$-t tartalmazó $R$-ben fekvő affin altérnek. Azaz $z+\lambda x'$ minden $\lambda$-ra $R$-ben van. de akkor szükségképpen $Qx'=0$, azaz $x'\in A$. $\bullet$

Egy poliéder belső dimenzióján a benne fekvő maximális affin altér dimenzióját értettük.

**Következmény 2.50** * *Egy $R:=\{x: Qx\leq b\}\subseteq \mathbf{R}^n$ poliéder belső dimenziója $n-r(Q)$.*

Miután megtudtuk, hogy egy poliéder mikor tartalmaz egyenest, felvetődik a kérdés, hogy mikor tartalmaz félegyenest. Azt mondjuk, hogy a $\vec{q}$ irány a **poliéder iránya**, ha $R$ minden $x$ elemére az $\{x+\lambda q: \lambda\geq 0\}$ félegyenes $R$-ben van.

**TÉTEL 2.51** *Valamely nemnulla $q$ vektorra a következők ekvivalensek.*
(1) *$\vec{q}$ a poliéder iránya.*
(2) *$R$-nek van olyan $z$ pontja, amelyre a $\{z+\lambda q: \lambda\geq 0\}$ félegyenes $R$-ben van.*
(3) *$Qq\leq 0$.*

**Biz.** (1)$\to$(2) semmitmondó. A (2)$\to$(3) és (3)$\to$(1) irányok közvetlenül látszanak. $\bullet$

A tételből kapjuk, hogy a poliéder irányai metszetkúpot alkotnak, melyet **karakterisztikus** (néha **recessziós**) **kúpnak** hívunk.

**Gyakorlat 2.22** *Igazoljuk, hogy egy $\{x: Px=b_0, Qx\leq b_1\}$ alakban adott nemüres poliéder karakterisztikus kúpja $\{x: Px=0, Qx\leq 0\}$.*

**Következmény 2.52** *Egy poliédernek és karakterisztikus kúpjának extrém irányai ugyanazok.* $\bullet$

A 2.11 tételben láttuk, hogy egy poliéder előáll mint egy politop és egy generált kúp összege. Ezt az eredményt csúcsos poliéder esetén pontosabbá tehetjük.

**TÉTEL 2.53** *Minden $R$ egyenes-mentes (azaz csúcsos) poliéder előáll mint a csúcsai által feszített $R_K$ politop valamint a poliéder $C$ karakterisztikus kúpjának a vektor-összege.*

***Biz.** Tegyük fel, hogy $R=\{x: Px=b_0, Qx\leq b_1\}$ és legyen $z$ a poliéder egy pontja. Legyen $M=\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$ és $M_z^=$ az $M$ mátrixnak az a része, amelynek sorai által meghatározott egyenlőtlenségeket $z$ egyenlőséggel teljesíti, míg a $Q$ mátrix maradék részét jelölje $M_z^<$. (A $P$ automatikusan része $M_z^=$-nek.) A $z$ pont **szintjét** definiáljuk a $\sigma(z):=r(M)-r(M_z^=)$ különbséggel. Az 2.45 tétel alapján $R$ csúcsai éppen a 0 szintű pontok.

A szint szerinti indukcióval fogjuk kimutatni, hogy a poliéder minden $z$ pontja előáll egy $R_K$-beli és egy $C$-beli pont összegeként. Ha a szint nulla, akkor tehát $z$ csúcs, így eleme $R_K$-nak. Tegyük most fel, hogy $s(z)>0$ és azt, hogy minden alacsonyabb szintű pontra a szóbanforgó előállítás létezik.

Mivel $r(M)>r(M_z^=)$, létezik olyan $q$, amelyre $M_z^=q=0$ és $M_z^<q\neq 0$. Feltehető, hogy $M_z^<q$-nak van negatív komponense, különben $q$-t helyettesíthetjük a negatívjával.

Tegyük először fel, hogy $M_z^<q$-nak nincsen pozitív komponense, azaz $M_z^<q<0$ (vagyis $q\in C$). Ekkor létezik olyan $\lambda_1>0$ szám, amelyre $x_1:=z-\lambda_1 q$ az $R$-ben van és $\sigma(x_1)<\sigma(z)$. (Nevezetesen, $\lambda_1:=\min((b_1(i)-\ {}_iaz)/(-{}_iaq)$, ahol a minimum az $Q$ azon ${}_ia$ soraira megy, amelyekre ${}_iaq<0$. Az $x_1$ szintje valóban kisebb, mint $z$ szintje, hiszen egyrészt $M_z^=x_1=b_z^=$, másrészt $M_z^<$ egyik ${}_ia$ sorára ${}_iax_1=b(i)$ és ez a sor ${}_iaq\neq 0$ és $M_z^=q=0$ miatt lineárisan független $M_z^=$ soraitól.) Indukció alapján $x_1$ előáll $x_1=y_1+y_1'$ alakban, ahol $y_1\in R_K$ és $y_1'\in C$. De most $z=x_1+\lambda_1 q=y_1+y_1'+\lambda_1 q$ és $y_1'+\lambda_1 q\in C$, így $z$ is előáll az $R_K$-beli $y_1$ és egy $C$-beli elem összegeként.

Tegyük most fel, hogy $M_z^<q$-nak létezik pozitív komponense is, és legyen ${}_1a$ és ${}_2a$ az $M_z^<$ mátrixnak két olyan sora, amelyre ${}_1aq<0$ és ${}_2aq>0$. Ekkor léteznek pozitív $\lambda_1$ és $\lambda_2$ számok, melyekre $x_1=z-\lambda_1 q\in R$ és $x_2=z+\lambda_2 q\in R$, és mind az $x_1$, mind az $x_2$ szintje kisebb, mint a $z$-é.

Indukcióval $x_i=y_i+y_i'$ $(i=1,2)$, ahol $y_i\in R_K$ és $y_i'\in C$. De ekkor $z=(\lambda_2x_1+\lambda_1x_2)/(\lambda_1+\lambda_2)=(\lambda_2y_1+\lambda_1y_2)/(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_2y_1'+\lambda_1y_2')/(\lambda_1+\lambda_2)$. Itt az összeg első tagja $R_K$-ban van, míg a második tagja $C$-ben. $\bullet$

**TÉTEL 2.54** *Egy R nemüres poliéderre a következők ekvivalensek.*
(1) *R korlátos,*
(2) *R nem tartalmaz félegyenest,*
(3) *R karakterisztikus kúpja,* $\{x : Px = 0, Qx \leq 0\}$ *triviális.*
(4) *R a csúcsainak konvex burka.*

**Biz.** (1) $\rightarrow$ (2) triviális. (2) $\rightarrow$ (3) Ha a karakterisztikus kúpnak volna $q$ nemnulla eleme, akkor, amint már az 2.51 tételben is láttuk, $R$ tartalmazná a $z + \vec{q}$ félegyenest minden $z \in R$ pontra. (3) $\rightarrow$ (4) Az 2.53 tétel szerint, ha a karakterisztikus kúp triviális, úgy $R$ a csúcsai által feszített politop. (4) $\rightarrow$ (1) Mivel véges sok csúcs van, ezek konvex burka korlátos. •

A 2.11 tételben azt is láttuk, hogy egy $C$ metszet-kúp előáll generált kúpként. Most megmutatjuk, hogy ha a kúp csúcsos, akkor $C$ az extrém irányai által generált kúp. Ennek érdekében a kúpot elmetszük egy alkalmas hipersíkkal úgy, hogy a metszet poliéder korlátos legyen, és a csúcsai a $C$ extrém irányainak felelnek majd meg. A következő tétel megmondja, hogyan kell a hipersíkot "alkalmasan" választani.

**TÉTEL 2.55** * *Legyen a* $C := \{x : Mx \leq 0\}$ *nemtriviális kúp egyenes-mentes, és legyen* $Z := \{x : Mx \leq 0, ax = -1\}$ *poliéder, ahol* $a := 1 \cdot M$ *az M sorainak az összege. Ekkor tetszőleges* $z \in Z$ *esetén* $\vec{z}$ *a kúp iránya. A kúp tetszőleges* $\vec{q}$ *iránya egyetlen z pontban metszi Z-t. Z korlátos. Egy* $z \in Z$ *pont akkor és csak akkor csúcsa Z-nek, ha* $\vec{z}$ *extrém iránya C-nek.*

***Biz.** Miután $C$ egyenes-mentes, $M$ oszlopai lineárisan függetlenek, így $Mq = 0$-ból $q = 0$ következik. Ezért $C$-nek tetszőleges $q$ nemnulla elemére $Mq \neq 0$, azaz van olyan $i$ index, amelyre ${}_iaq < 0$ fennáll. De ekkor $aq < 0$ is áll, és így létezik egy egyértelmű $\lambda > 0$ szám, amelyre $z := \lambda q \in M$. Vagyis a kúp $\vec{q}$ iránya előáll $\vec{z}$ alakban, ahol $z \in Z$. Fordítva, tetszőleges $z \in Z$ elem esetén $Mz \leq 0$, ezért $\vec{z}$ a kúp iránya.

$Z$ korlátosságához az 2.54 tétel alapján azt kell belátni, hogy karakterisztikus kúpja triviális, vagyis az $\{Mx \leq 0, ax = 0\}$ rendszernek nincs nemnulla megoldása. Ezt viszont már a bizonyítás elején láttuk.

Végül legyen $z \in Z$, azaz $Mz \leq 0, az = -1$. Ha $z$ nem csúcs, akkor előáll $(z_1 + z_2)/2$ alakban ahol $z_i \in Z, z_i \neq z$, $(i = 1, 2)$. De ekkor $\vec{z}$ a $\vec{z}_1$ és $\vec{z}_2$ $C$-beli irányok nemnegatív kombinációja. Vagyis ha $\vec{z}$ extrém iránya $C$-nek, akkor $z$ csúcsa $Z$-nek. Legyen most $z$ csúcsa $Q$-nak. Ha $\vec{z}$ nem éle $C$-nek, akkor van $C$-nek két olyan $x', y'$ eleme, amelyek nincsenek $\vec{z}$-ben, de $x' + y'$ $\vec{z}$-ben van. Ekkor viszont $z$ az $\vec{x}' \cap Q$ pontot és az $\vec{y}' \cap Q$ pontot összekötő szakasz belsejében van, azaz $z$ nem csúcsa $Q$-nak. •

**Következmény 2.56** *C egyenes-mentes nemtriviális metszet-kúpnak véges sok extrém iránya van, és C ezen irányok generált kúpja.* •

Azt már láttuk, hogy egyenes-mentes poliéder esetén csúcs és bázis-megoldás ugyanaz. Érdemes megállapítani egy egyenes-mentes kúp extrém irányának algebrai jelentését is.

**Következmény 2.57** *A* $C = \{x : Mx \leq 0\}$ *egyenes-mentes kúp egy z nemnulla eleme által meghatározott* $\vec{z}$ *irány akkor és csak akkor extrém iránya C-nek, ha z merőleges az M mátrix* $r(M) - 1 (= n - 1)$ *lineárisan független sorára.*

***Biz.** Az 2.55 tétel jelöléseit használva, az egyenes-mentesség miatt $Mz < 0$, és így $az < 0$. Miután $z$ bármely pozitív számszorosa ugyanazt az irányt definiálja, feltehetjük, hogy $az = -1$, azaz $z \in Q$. Az 2.23 tétel (ii) részében bebizonyítottuk (egy ekvivalens alakra), hogy az $\{Mx \leq 0, ax = -1\}$ rendszer egy $z$ megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás (azaz $Q$-nak egy csúcsa), ha $z$ merőleges $M$-nek $r(M) - 1$ lineárisan független sorára. Az 2.55 tétel szerint viszont egy-egy értelmű kapcsolat van a $Q$ poliéder csúcsai és a $C$ kúp extrém irányai között. •

**Következmény 2.58** *Minden R egyenes-mentes (azaz csúcsos) poliéder előáll mint a csúcsai által feszített politopnak valamint az extremális irányai által generált (csúcsos) kúpnak (vagyis az R karakterisztikus kúpjának) a vektor-összege.* •

Eddig csúcsos poliéderekkel foglalkoztunk, most belátjuk, hogy minden poliéder egy csúcsos poliéder és egy altér összege.

**TÉTEL 2.59** *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliéder az $A := \{x : Qx = 0\}$ karakterisztikus altér és az $R' := R \cap A^{\perp}$ poliéder vektor-összege, ahol $A^{\perp}$ az $A$ altér ortogonális kiegészítője (vagyis a $Q$ sorai által generált altér). Továbbá, az $R'$ poliéder egyenes-mentes (=csúcsos).*

***Biz.** Először belátjuk, hogy $R \subseteq A + R'$, azaz hogy bármely $z \in R$ elem előáll egy $A$-beli és egy $R'$-beli elem összegeként. Valóban, minden $z$ elem egyértelműen előáll egy $A$-beli $z_1$ és egy $A^{\perp}$-beli $z_2$ elem összegeként. Belátjuk, hogy $z_2 \in R'$. Ha nem ez volna a helyzet, akkor $z \in A^{\perp}$ miatt $z_2$ nem volna $R$-ben, azaz $z_2$ megsértené (2.23) valamelyik sorát. De akkor $Az_1 = 0$ miatt $z = z_1 + z_2$ is megsértené ugyanazt a sort, ellentétben a $z \in R$ feltevéssel. Így valóban $R \subseteq A + R'$. Másrészt a definíciókból világos, hogy $A + R' \subseteq R$, amiből $A + R' = R$.

Végül belátjuk, hogy $R'$ egyenes-mentes. A $Q^{\perp}$ mátrix sorai alkossák az $A$ altér egy bázisát. Ekkor tehát $Q$ sorai és $Q^{\perp}$ sorai egymásra merőlegesek, együtt kifeszítik az egész teret, azaz $\begin{pmatrix} Q \\ Q^{\perp} \end{pmatrix}$ teljes oszlop-rangú. Miután $R'$ az $\{Q^{\perp}x = 0, Px = b\}$ rendszer megoldás-halmaza, az 2.48 következményből adódik, hogy $R'$ egyenes-mentes. •

Az alábbi következmény tartalma az, hogy az 2.59 tételben, ha $R$ kúp, úgy $R'$ is kúp lesz.

**Következmény 2.60** ** Egy $R := \{x : Mx \leq 0\}$ metszet-kúp az $A := \{x : Mx = 0\}$ karakterisztikus altér (ami speciális metszet-kúp) és az $R' := R \cap A^{\perp}$ csúcsos metszet-kúp vektor-összege.*

***Biz.** Az előbbi tétel nyomán csak azt kell látnunk, hogy $R'$ metszet-kúp, de ez világos, hiszen egy altér metszet-kúp. •

2002. december 17.

ulinp21

### 2.5.2 Oldalak

Egy háromdimenziós poliédert lapok, élek illetve csúcsok határolnak. Ezeket a fogalmakat szeretnénk magasabb dimenzióra kiterjeszteni. Egy $R$ nemüres poliéder $F$ **oldala** (face) $R$-nek egy

$$F := \{x \in R : cx = \delta\} \tag{2.54}$$

alakú nemüres részhalmaza, ahol $\delta := \max\{cx : x \in R\}$ valamely $cx$ célfüggvényre, melyre a maximum létezik. A $c \equiv 0$ célfüggvényre a definíció azt adja, hogy $R$ maga is oldal. Egy $R$-től különböző oldalt **valódi oldal**nak nevezünk. A poliéder valódi oldala az optimum helyek halmaza valamely nemnulla lineáris célfüggvényre nézve, másként szólva a poliédernek az a része, amely egy hipersíkkal érintkezik, amikor azt kívülről a poliéderhez toljuk. A poliéder egy csúcsa például a 2.45 tétel szerint oldal. A definícióból látszik, hogy egy poliéder oldala maga is poliéder. **Valódi oldalon** (proper face) olyan oldalt értünk, amely nem az egész poliéder. Egy affin altér például olyan poliéder, amelynek nincs valódi oldala. Poliéder **minimális oldalán** egy tartalmazásra nézve minimális oldalt értünk. Egy tartalmazásra nézve maximális valódi oldalt **lapnak** (facet) nevezünk.

Az oldal fenti definíciójának hátránya, hogy nem könnyű vele dolgozni. Például nem látszanak belőle olyan elvárt tulajdonságok, minthogy két oldal nemüres metszete oldal, vagy hogy egy oldal oldala az eredeti poliédernek is oldala. Ezen segít a következő tétel, amely megmondja, hogy a poliéder egy konkrét egyenlőtlenség-rendszerrel történő megadásán miképp tükröződik az oldal fogalma.

**TÉTEL 2.61** *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy nemüres $F$ részhalmaza akkor és csak akkor oldala $R$-nek, ha létezik a $Q$ bizonyos soraiból álló olyan $Q'$ $Q'$ részmátrix, amelyre $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$, ahol $b'$ a $Q'$ sorainak megfelelő részvektora $b$-nek.*

**Biz.** Tegyük fel, hogy $F$ oldal, melyet (2.54) definiál. Tekintsük a $\min\{yb : yQ = c, y \geq 0\}$ duális lineáris programnak egy $y'$ optimális megoldását. Legyen $Q'$ a $Q$ azon ${}_iq$ soraiból álló részmátrix, amelyekre a megfelelő $y'(i)$ komponens pozitív. Tetszőleges $x \in R$-re $cx = (y'Q)x = y'(Qx) \leq y'b$. A dualitás tételből következik, hogy egy $x' \in R$ vektor akkor és csak akkor primál optimum (azaz eleme $F$-nek), ha az $y'$ minden pozitív komponensére a neki megfelelő primál feltétel egyenlőséggel teljesül (azaz $y'(i) > 0$-ból ${}_iqx = b(i)$ következik.) Így tehát $F = \{x \in R : Q'x = b'\}$.

Fordítva, legyen $Q'$ a $Q$ bizonyos sorai által alkotott mátrix, és $b'$ a $b$ megfelelő része, amelyekre $\{x \in R : Q'x = b'\}$ nemüres. Jelölje $c$ a $Q'$ sorainak összegét (azaz $c = 1 \cdot Q'$), míg $\delta$ a $b'$ komponenseinek összegét ($\delta := 1 \cdot b'$). Most $cx = (1 \cdot Q')x = 1(Q'x) \leq 1b' = \delta$. Ebből adódóan valamely $x$ vektorra $x \in R, Q'x = b'$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x \in R, cx = \delta$, amiből a tétel következik. •

Tekintsük az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ nemüres poliédert. Az alábbiakban megvizsgáljuk az $R$ néhány tulajdonságát a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{2.55}$$

leíró rendszer függvényében.

A $Qx \leq b$ rendszer egy $qx \leq \beta$ egyenlőtlenségéről azt mondjuk, hogy **implicit egyenlőség**, ha $R$ minden eleme egyenlőséggel teljesíti (azaz, ha a fordított $qx \geq \beta$ egyenlőtlenség logikai következménye az $R$-t meghatározó rendszernek. Geometrialilag ez azt jelenti, hogy az $R$ poliéder teljesen az $\{x : qx = \beta\}$ hipersíkban fekszik.) Az implicit egyenlőségek által alkotott egyenlőség-rendszert $Q^{=}x = b^{=}$-vel jelöljük. Egy nem implicit egyenlőtlenséget **valódinak** mondunk, és az általuk alkotott rendszert $Q^{<}x \leq b_1^{<}$-vel jelöljük. (Az explicit $Px = b_1$ egyenlőség-rendszer tagjait automatikusan implicit egyenlőségeknek tekintjük.)

A $Qx \leq b_1$ egyenlőtlenség-rendszer egyik $qx \leq \beta$ tagját **feleslegesnek** nevezzük (a (2.55)-re nézve), ha az elhagyásával keletkező rendszer ugyanazt a poliédert definiálja. (Másszóval, $qx \leq \beta$ logikai következménye annak a rendszernek, amelyet (2.55)-ból kapunk $qx \leq \beta$ kihagyásával.) Egy nem felesleges egyenlőtlenség neve **lényeges**. Hasonlóképpen beszélhetünk arról, hogy egy $Px = b_0$-beli egyenlőség **lényeges** vagy **felesleges** annak megfelelően, hogy kihagyása $R$-nél bővebb poliédert eredményez-e vagy $R$-t változatlanul hagyja.

Egy poliéder leírásából egymás után kihagyva az (aktuálisan) felesleges egyenlőtlenségeket és egyenlőségeket olyan leírást kapunk, amelyben már minden egyenlőség és egyenlőtlenség lényeges. A kapott rendszer persze függhet az elhagyás sorrendjétől, hiszen egy eredetileg felesleges egyenlőtlenség egy másik elhagyásakor lényegessé válhat. Például, ha a poliéder a három dimenziós tér egy $e$ egyenese, amely három (különböző) $e$-t tartalmazó sík metszeteként van adva, akkor $e$ ezek közül bármelyik kettő metszeteként is megadható. Azt is feltehetjük, hogy minden szereplő $qx \leq \beta$ egyenlőtlenség valódi, mert különben helyettesíthetjük az $yx = \beta$ explicit egyenlőséggel. Nevezzük az $R$ poliéder (2.55) alakú leírását **minimálisnak**, ha minden egyenlőség és egyenlőtlenség lényeges és minden egyenlőtlenség valódi. Látjuk tehát, hogy létezik minimális leírás.

**Lemma 2.62** *Ha $qx \leq \beta$ valódi és lényeges egyenlőtlensége* (2.55)*-nek, akkor $R$-nek van olyan $z$ pontja, amelyre $qz = \beta$.*

**Biz.** Miután $qx \leq \beta$ valódi, létezik olyan $x' \in R$, amelyre $qx' < \beta$. Miután $qx \leq \beta$ lényeges, létezik olyan $x''$, amely (2.55) rendszerből a $qx \leq \beta$ egyenlőtlenséget megsérti, de a többit mind kielégíti. Az $x'x''$ szakasz egyik vége $R$-ben van, másik nincs, így a szakasznak van olyan $z$ pontja, amely $R$-ben van és $qz = \beta$. •

**TÉTEL 2.63** *Tegyük fel, hogy az $R$ poliéder egy minimális* (2.55) *alakú rendszerrel van adva. A következő állítások ekvivalensek.*
(i) *$R$ affin altér.*
(ii) *$R$-nek nincs valódi oldala.*
(iii) *Minden lényeges egyenlőtlenség implicit egyenlőség (azaz $Q$ üres).*

**Biz.** Tegyük fel, hogy $R$ affin altér. Ekkor van $\{x : Ax = d\}$ alakú leírása. A 2.61 tétel szerint az oldal fogalma nem függ a poliéder leíró rendszerétől. Mivel itt csak egyenlőségek szerepelnek, $R$-nek nem lehet valódi oldala.

Tegyük most fel, hogy (ii) teljesül. Ha indirekt (iii) nem állna, akkor a (2.55)-ben létezne egy $qx \leq \beta$ valódi, lényeges egyenlőtlenség. Ehhez $R$-nek van olyan $x'$ pontja, amelyre $qx' < \beta$, és a 2.62 lemma szerint olyan $z$ pontja is, amelyre $qz = \beta$. De ekkor $\{x \in R : qx = \beta$ valódi (nemüres) oldala lenne $R$-nek.

A (iii)$\rightarrow$(i) irány triviális. •

Miután minimális oldalnak nincsen valódi oldala, az előző tételből kapjuk:

**Következmény 2.64** *Minden minimális oldal affin altér.* •

Hasznos a következő lemma.

**Lemma 2.65** * *Az $R$ poliédernek van olyan eleme, amely minden valódi egyenlőtlenséget szigorúan teljesít.*

***Biz.** Minden valódi egyenlőtlenséghez van $R$-nek olyan eleme, amely azt szigorúan teljesíti. Ezen elemek számtani közepe (vagy bármely pozitív együtthatós konvex kombinációja) $R$-ben van és valamennyi valódi egyenlőtlenséget szigorúan teljesíti. •

**TÉTEL 2.66** * *Tegyük fel, hogy (2.55) minimális leírása $R$-nek. Az $R$ akkor és csak akkor van benne egy $H := \{x : ax = \beta\}$ hipersíkban (másszóval $ax = \beta$ akkor és csak akkor logikai következménye (2.55)-nek), ha létezik olyan $y_0$, amelyre $y_0P = a$ és $y_0b_0 = \beta$ (azaz, $ax = \beta$ lineáris következménye $Px = b_0$-nak.)*

***Biz.** Ha létezik $y_0$, akkor persze $R$ minden $x$ elemére $ax = \beta$, azaz $R$ benne van a $H$ hipersíkban. Tegyük most fel, hogy $R$ benne van $H$-ban, azaz mind az $ax \leq \beta$, mind az $ax \geq \beta$ egyenlőlenség logikai következménye a (2.55) rendszernek. Korábban láttuk (2.41 tétel), hogy ha $ax \leq \beta$ logikai következmény, akkor létezik olyan $y = (y_0, y_1)$, amelyre $y_1 \geq 0$, $y_0P + y_1Q = a$, és $yb \leq \beta$. Itt nem állhat szigorú egyenlőtlenség, hiszen akkor $ax < \beta$ is következne (2.55)-ből, holott $ax \geq \beta$ következik. Tehát $yb = \beta$.

Belátjuk, hogy $y_1 = 0$. Valóban, a 2.65 lemma szerint $R$-nek van olyan $x_0$ eleme, amelyre $Qx_0 \ll b_1$. Mivel $x_0 \in R \subseteq H$, így $\beta = qx_0 = (y_0P + y_1Q)x0 = y_0(Px_0) + y_1(Px_0) \leq y_0b_0 + y_1b_1 = yb = \beta$. Szükségképpen az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül, ami $Qx_0 \ll b_1$ miatt azt jelenti, hogy $y_1 = 0$. •

**Feladat 2.23** *Igazoljuk, hogy ha egy nemüres poliéder minimális leírásában lévő $px = \beta$ egyenlőséget helyettesítjük a $px \leq \beta, -px \leq -\beta$ egyenlőtlenségekkel, akkor ezek lényegesek.*

Jelölje $Q_F^=$ a $Q$ azon sorai által alkotott részmátrixot, amelyeknek megfelelő egyenlőtlenséget az $F$ minden eleme egyenlőséggel teljesíti. Ezeket hívjuk **implicit $F$-egyenlőségeknek**.

**Lemma 2.67** * *Tegyük fel, hogy $R$ egy minimális (2.55) rendszerrel van megadva. Legyen $F$ az $R$-nek egy oldala. Legyen $Q'$ a $Q$-nak egy $m' \times n$-es részmátrixa. A $Q'$ által meghatározott $F' := \{x \in R : Q'x = b'_1\}$ oldal akkor és csak akkor ugyanaz mint $F$, ha $Q'$ része $Q_F^=$-nek és $r(Q') = r(Q_F^=)$.*

***Biz.** Tegyük fel először, hogy $F = F'$. Miután $F$-nek a 2.65 lemma alapján van olyan eleme, amely minden valódi $F$-egyenlőtlenséget szigorúan teljesít, a $Q'x \leq b'_1$ minden sora implicit $F$-egyenlőség, azaz $Q'$ része $Q_F^=$-nek. Ha indirekt $r(Q') < r(Q_F^=)$, akkor van olyan $x'$, amelyre $Q'x' = 0$, és a $Q_F^=$ valamely ${}_iq$ sorára ${}_iqx' < 0$. Ekkor kicsiny pozitív $\varepsilon$-ra és az $F'$ valamely $z$ elemére a $z + \varepsilon x'$ pont $F'$-ben van, de szigorúan teljesíti a ${}_iqx \leq b(i)$ egyenlőtlenséget, ellentmondásban ennek implicit $F$-egyenlőség voltával.

A fordított irányhoz tegyük fel, hogy $Q'$ részmátrixa $Q_F^=$-nek és $r(Q') = r(Q_F^=)$. Mivel $Q'x = b'$ egyenletei implicit egyenlőségek, ezért $F$ minden eleme kielégíti őket és így $F \subseteq F'$. A fordított tartalmazás igazolásához legyen $x' \in F'$. Az $r(Q') = r(Q_F^=)$ feltevés miatt $Q_F^=x' = b_F^=$, amiből speciálisan $Q_F^=x' = b_F^=$ adódik, azaz $x' \in F$. •

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy pontosan megmondjuk a bázis-megoldások geometriai jelentését.

**TÉTEL 2.68** *A $Qx \leq b$ egyenlőtlenség-rendszer egy megoldása akkor és csak akkor bázis-megoldás, ha eleme az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy minimális oldalának.*

***Biz.** Tekintsük az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy minimális $F$ oldalát. Miután az előbb láttuk, hogy $F$ affin altér, ezért $F = \{x : Q_F^=x = b_F^=\}$. Az $F$ minimalitásából következik, hogy $F$ minden $x$ elemére $Q_F^<x \ll b_F^<$. Tehát $F$ tetszőleges $z$ elemére éppen a $Q_F^=x \leq b_F^=$ rendszer az, amelynek tagjait a $z$ egyenlőséggel teljesíti.

Állítjuk, hogy $r(Q) = r(Q_F^=)$. Valóban, ha a ${}_jq$ sor lineárisan független volna $Q_F^=$ soraitól, akkor volna olyan $x'$, amelyre $Q_F^=x' = 0$, ${}_jqx' = 1$. De ekkor egyrészt $f + \lambda x'$ tetszőleges $\lambda$-ra teljesíti a $Q_F^=x = b_F^=$ egyenlőséget, azaz benne van $F$-ben, és így $R$-ben is, másrészt viszont alkalmas $\lambda$-ra $f + \lambda x'$ nem teljesíti az ${}_jqx \leq b(j)$ egyenlőtlenséget, azaz még sincs $R$-ben. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $r(Q) = r(Q_F^=)$, tehát az $F$ minden eleme valóban bázis-megoldás.

Legyen most $z$ bázis-megoldás és tekintsük a $Qx \leq b$ rendszernek a $z$ által egyenlőséggel teljesített $Q_z^=x \leq b_z^=$ részét. Tekintsük az $F_z := \{x : Qx \leq b, Q_z^=x = b_z^=\}$ oldalát $R$-nek. Belátjuk, hogy ez minimális oldal. Ha indirekt létezne valódi oldala, akkor az $Qx \leq b$ rendszerben volna olyan $qx \leq \beta$ egyenlőtlenség, amelyre $qz < \beta$, de $F_z$ valamely $x'$ elemére $qx' = \beta$. Miután $z$ bázis-megoldás, $r(Q) = r(Q_z^=)$, és így létezik egy $y'$, amelyre $q = y'Q_z^=$. De akkor $0 = \beta - \beta > qx' - qz = q(x' - z) = (y'Q_z^=)(x - z) = y'(Q_z^=x) - y'(Q_z^=z) = y'b' - y'b' = 0$, amely ellentmondás mutatja, hogy $F_z$-nek nem lehet valódi oldala. •

### 2.5.3 Dimenzió, lapok

Egy altér **dimenziója** a belőle kiválasztható lineárisan független elemek maximális száma. A $Z$ affin altér, definíció szerint, egy altér eltoltja. Az első fejezetben szerepelt, hogy az affin altér előállítható $Z = \{x : Qx = b\}$ alakban és az altér, amelynek eltolásából $Z$ keletkezett egyértelmű, éspedig $\{x : Qx = 0\}$ (ami tehát $Z$ karakterisztikus altere). A $Z$ affin altér **dimenziója** az őt meghatározó altér dimenziója. Például a pont nulla dimenziós, az egyenes egy dimenziós, stb. Affin alterek metszete is affin altér, feltéve, hogy nem üres. Az is rögtön látszik, hogy minden affin altér hipersíkok metszete (egy **hipersík** valamely $qx = \beta$ egyenlet megoldás halmaza.)

Az $\{x : Qx = 0\}$ altér tekinthető a $Q$ sorai által generált altér ortogonális kiegészítő alterének, így ennek dimenziója $n - r(Q)$. Ebből kapjuk, hogy az $\{x : Qx = b\}$ affin altér dimenziója $n - r(Q)$. Egy tetszőleges $\mathbf{R}^n$-beli $R$ nemüres halmaz **dimenzióján** az $R$-t tartalmazó legszűkebb affin altér dimenzióját értjük. (A legszűkebb affin altér nem más, mint az $R$-t tartalmazó affin elterek metszete.)

**TÉTEL 2.69** *Tegyük fel, hogy a nemüres $R$ poliédert definiáló (2.55) rendszer minimális. Ekkor a legszűkebb $R$-t tartalmazó affin altér $Z := \{x : Px = b_0\}$*

***Biz.** Nyilvánvaló, hogy $R \subseteq Z_R$. Tegyük fel indirekt, hogy létezik egy $Z_R$-nél szűkebb affin altér, amely tartalmazza $R$-t. Ekkor van olyan $H := \{x : qx = \beta\}$ hipersík, amelyre $R \subseteq H$, $Z_R \not\subseteq H$. A 2.66 tétel szerint $R \subseteq H$ azt jelenti, hogy létezik $y_0$, amelyre $q = y_0 P$ és $\beta = y_0 b_0$, amiből következik, hogy bármely olyan $x'$-re, amelyre $Q^= x' = b^=$ teljesül, fennáll $qx' = \beta$, azaz $Z_R \subseteq H$, ellentmondás. •

**Következmény 2.70** *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ nemüres poliédert tartalmazó legszűkebb affin altér $Z_R := \{x : Q^= x = b^=\}$ , ahol $Q^=$ jelöli az implicit egyenlőségeknek megfelelő részmátrixot. A poliéder dimenziója $n - r(Q^=)$.* •

A tételt alkalmazhatjuk a poliéder egy $F$ oldalára.

**Következmény 2.71** * *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ poliéder egy $F$ oldalát tartalmazó legszűkebb affin altér $\{x : Q_F^= x = b_F^=\}$. Az $F$ oldal dimenziója $n - r(Q_F^=)$. Minimális oldal dimenziója $n - r(Q)$.* •

Egy $c$ vektort illetve az általa meghatározott $cx$ célfüggvényt akkor mondjuk **semlegesnek** (vagy neutrálisnak) az $R =: \{x : Qx \leq b\}$ poliéderre nézve, ha $R$ minden $x$ elemére $cx$ értéke ugyanannyi. A semleges vektorok nyilván alteret alkotnak, melyet jelöljünk $S_R$-rel.

**TÉTEL 2.72** * *A semleges vektorok $S_R$ altere éppen a $Q$-t tartalmazó legszűkebb $Z_R$ affin altér $A_R$ karakterisztikus alterének ortogonális kiegészítője. Egy $c$ vektor akkor és csak akkor semleges, ha benne van $Q^=$ sorterében.*

***Biz.** A 2.70 tétel szerint $A_R = \{x : Q^= x = 0\}$. Mivel $Q^=$ sortere $\{x : Q^= x = 0\}$ altér ortogonális kiegészítője, a tétel két állítása egymással ekvivalens.

Ha $c = yQ^=$ valamilyen $y$-ra, azaz $c$ benne van $A_R$-ben, akkor nyilván $R$ minden $x$ elemére $cx = (yQ^=)x = y(Q^= x) = yb^=$. Mivel a jobboldal független $x$-től, $c$ valóban semleges. Fordítva, ha $c$ nincs benne $Q^=$ sorterében, akkor létezik egy olyan $x'$, amelyre $Q^= x' = 0$ és $cx' \neq 0$. Az $R$ egy $x_0$ elemére és kicsiny $\lambda > 0$ számra $x_0 + \lambda x'$ benne van $R$-ben. Mivel $cx' \neq 0$, kapjuk, hogy $cx_0 \neq c(x_0 + \lambda x')$, azaz $c$ nem semleges. •

Egy poliéder két csúcsát nevezzük **szomszédosnak**, ha az összekötő szakaszuk a poliéder oldala. (Három dimenzióban ez annak felel meg, hogy az összekötő szakaszuk a poliédernek éle.)

**TÉTEL 2.73** *Az $R = \{x : Qx \leq b\}$ csúcsos poliéder $u$ és $v$ csúcsaira a következők ekvivalensek.*
*(i) $u$ és $v$ szomszédosak.*
*(ii) A $Q$ azon soraiból alkotott $Q_{uv}^=$ részmátrix, melyeknek megfelelő egyenlőtlenségeket mind $u$, mind $v$ egyenlőséggel teljesíti, $n - 1$ rangú.*
*(iii) Léteznek $Q$-nak olyan $Q_u$ és $Q_v$ $n \times n$-es nemszinguláris részmátrixai, amelyekre $u$ a $Q_u x = b_u$ rendszer, míg $v$ a $Q_v x = b_v$ rendszer egyértelmű megoldásai, és amelyeknek $n - 1$ soruk közös.*

***Biz.** $(i) \to (ii)$ Legyenek $u$ és $v$ szomszédosak, vagyis az összekötő $F$ szakaszuk oldal. Ekkor $F$ előáll $F = \{x : Qx \leq b, Q_F^= x = b_F\}$ alakban. Mivel szakasz dimenziója 1, a 2.71 következményből kapjuk, hogy $r(Q_F^=) = n - 1$. Mivel $u, v$ benne vannak $F$-ben, így $Q_{uv}^=$ tartalmazza $Q_F^=$-t, tehát $r(Q_{uv}^=) \geq n - 1$. Itt egyenlőségnek kell állnia, mert ha $r(Q_{uv}^=) = n$ volna, akkor a $Q_{uv}^= x = b_{uv} =$ rendszernek nem lehetne két különböző megoldása (mármint $u$ és $v$.)
$(ii) \to (iii)$ Válasszunk ki a $Q_{uv}^=$ mátrixnak $n - 1$ lineárisan független sorát, majd ezt egészítsük ki a $Q_u^=$ egy sorával egy nemszinguláris $Q_u$ mátrixszá, illetve a $Q_v^=$ egy sorával egy nemszinguláris $Q_v$ mátrixszá. A $Q_u x = b_u$ rendszernek ekkor létezik egyértelmű megoldása és $u$ megoldása, és ugyanígy $Q_v x = b_v$-nek $v$ a megoldása.
$(iii) \to (i)$ Az $n - 1$ közös sor által alkotott mátrixot jelöljük $Q'$-vel. Ekkor az $F := \{x : Qx \leq b, Q'x = b'\}$ poliéderben $u$ is, $v$ is benne van, tehát $F$ oldala $R$-nek, melynek dimenziója 1, vagyis $F$ az $u$-t és $v$-t összekötő szakasz. •

Fentebb láttuk, hogy az implicit egyenlőségek éppen az $R$-t tartalmazó legszűkebb affin alteret határozzák meg. Mi a valódi egyenlőtlenségek geometriai tartalma?

**TÉTEL 2.74** *Tegyük fel, hogy a $\{Px = b_0,\ Qx \leq b_1\}$ rendszer minimális, és hogy az $R$ megoldás halmaz nemüres. Ekkor az $R$-t tartalmazó legszűkebb affin altér $\{x : Px = b_0\}$. Továbbá egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn az $R$ lapjai és a $Qx \leq b_0$ egyenlőtlenségei között, azaz $\{x \in R : {}_iqx = b_1(i)\}$ lapot alkot, és minden lap előáll ilyen alakban.*

***Biz.** Először tegyük fel, hogy $F$ lapja $R$-nek. Ekkor $F = \{x \in R : Q^=_F x = b^=_F\}$. Mivel $F \subset R$, létezik egy $x_0 \in R-F$ pont. Ez az $Q^=_F x \leq b^=_F$ rendszer egyik $qx \leq \beta$ egyenlőtlenségét szigorúan teljesíti: $qx_0 < \beta$. Tehát $qx \leq \beta$ a $Qx \leq b$ rendszernek valódi egyenlőtlensége, így $F' := \{x \in R : qx = \beta\}$ valódi oldala $R$-nek, amely tartalmazza $F$-t, és miután $F$ tartalmazásra nézve maximális oldal, $F = F'$ következik. Tehát $R$ lapja előáll a kívánt alakban.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $qx \leq \beta$ a $Qx \leq b$ rendszernek valódi egyenlőtlensége. Jelölje $Q'x \leq b'$ azt a részét $Q^<x \leq b^<$-nak, amelyet az $qx \leq \beta$ kihagyásával kapunk. A feltevés szerint $qx \leq \beta$ lényeges, így létezik $x_2 \in R$, amelyre $Q'x_2 \leq b'$ és $qx_2 > \beta$. Másrészt láttuk már, hogy létezik olyan $x_1 \in R$, amelyre $Q^<x_1 \ll b^<$. Az $x_1$ és $x_2$ alkalmas konvex kombinációját véve kapjuk, hogy létezik olyan $x_0 \in R$, amelyre $Q'x_0 < b'$ és $qx_0 = \beta$. Ebből következik, hogy $F := \{x \in R : qx = \beta\}$ valódi oldal. Mivel pedig egyetlen olyan eredetileg valódi egyenlőtlenség van, amely implicit $F$-egyenlőség, $F$ maximális valódi oldal. •

**Következmény 2.75** *Minden valódi oldal lapok metszete.* •

**Következmény 2.76** * *Tegyük fel, hogy mind a $\{Px = b_0,\ Qx \leq b_1\}$ rendszer, mind a $\{P'x = b'_0,\ Q'x \leq b'_1\}$ rendszer minimális. Az ezek által definiált nemüres $R$ és $R'$ poliéderek akkor és csak akkor egyenlők, ha $P$ és $P'$ sortere ugyanaz, továbbá a $Qx \leq b_1$ és $Q'x \leq b'_1$ rendszer egyenlőtlenségei között egy-egy értelmű kapcsolat van, amelyben az egymának megfelelő $qx \leq \beta$ és $q'x \leq \beta'$ egyenlőtlenségekre fennáll, hogy a $(q,\beta) - (q',\beta')$ vektor benne van a $(P, b_0)$ mátrix sorterében (ami ugyanaz, mint a $(P', b'_0)$ mátrix sortere).* •

**Feladat 2.24** *Egy poliéder minden lapjának dimenziója eggyel kisebb, mint a poliéder dimenziója.*

**Feladat 2.25** *Igazoljuk, hogy ha két rendszer ugyanazt a poliédert definiálja, akkor erős bázis-megoldásaik halmaza ugyanaz.*

2002. december 17.

**ulinp22**

## 2.6 A SZIMPLEX ALGORITMUS

### 2.6.1 Megengedettség

Ebben a szakaszban megismerkedünk a Farkas lemma illetve a dualitás tétellel kapcsolatos fő algoritmikus eredményekkel. Azt már korábban láttuk, hogy egy lineáris célfüggvény metszet-poliéder feletti optimalizálására van véges algoritmus, hiszen ha $cx$ felülről korlátos, akkor a maximum erős bázis-megoldáson is felvétetik, és ezekből csak véges sok van. Ezzel a megközelítéssel az a baj, hogy erős bázis-megoldásból igen sok lehet (exponenciálisan sok). Például, ha a poliéder, amely felett a $cx$ célfüggvényt akarjuk maximalizálni, egy $n$-dimenziós egységkocka kocka, azaz $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$, akkor ezt a feladatot mind a $2^n$ csúcs $cx$ szerinti sorbarendezésével már a nem túlságosan nagy $n = 100$-as méretnél sincs semmilyen esélyünk megoldani, a legjobb számítógépet használva sem, ugyanakkor a problémát ránézésre rögtön meg lehet oldani.

A szimplex algoritmus George Dantzigtól származik. Az a lényege, hogy a poliéder csúcsait szisztematikusan, javuló sorrendben tekinti át. Óriási felhalmozott tapasztalat mutatja, hogy a szimplex algoritmus a gyakorlatban nagyon hatékony, tipikusan lineáris számú csúcs átvizsgálása után megtalálja az optimumot. Annál szomorúbb, hogy konstruáltak olyan példa sorozatot, ahol a szimplex algoritmus végiglátogatja az összes, exponenciálisan sok csúcsot, mielőtt az optimálisat megtalálná. Ez azt jelenti, hogy matematikai szempontból a szimplex algoritmus nem tekinthető hatékonyabbnak, mint a durva, összes csúcsot számba vevő algoritmus. (Kimutatták azonban, hogy ha nem a legrosszabb előforduló esettel akarjuk az algoritmus hatékonyságát mérni, hanem az átlagos lépésszámot tekintjük, akkor a szimplex algoritmus polinomiális futás idejű.)

Kezdjük a Farkas lemmával, annak a 2.35 tételben megfogalmazott erősebb változatával, amely tehát azt mondja ki, hogy az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ primál és az $\{yA \geq 0, yb = -1\}$ duál feladatok közül pontosan az egyiknek van bázis-megoldása:

**TÉTEL 2.77** *Az $\{Ax = b,\ x \geq 0\}$ rendszernek akkor és csak akkor van olyan megoldása, amelyben az $x$ pozitív változóinak megfelelő $A$-beli oszlopok lineárisan függetlenek, ha nem létezik olyan $y$, amelyre $yA \geq 0,\ yb < 0$ és $A$-nak létezik $r(A,b) - r(b)$ lineárisan független oszlopa, amelyekre $y$ merőleges.* •

**Bizonyítás** a szimplex algoritmussal. Már a Farkas lemma bizonyításánál láttuk, hogy a két lehetőség kizárja egymást. Azt látjuk be algoritmikusan, hogy legalább az egyik lehetőség fennáll. A Gauss-eliminációval először eldöntjük, hogy az $Ax = b$ rendszernek van-e egyáltalán megoldása. Ha nincs, akkor a Gauss-elimináció egy olyan $y$ vektort szolgáltat, amelyre $yA = 0$ és $yb \neq 0$. Itt $-1$-gyel történő esetleges szorzás után feltehetjük, hogy $yb < 0$ azaz a (b) alternatívára jutottunk. (Most $t = r(A,b) = r(A) + 1$).

Tegyük fel tehát, hogy $Ax = b$ megoldható. Feltehetjük, hogy $A$ sorai lineárisan függetlenek, mert ha nem, akkor az A soraiból kiválasztunk $r(A)$ lineárisan lineárisan független sort (ezt valójában a Gauss-elimináció már meg is tette) és csak az ezek által alkotott részmátrixszal dolgozunk tovább. Válasszunk ki az $A$ oszlopaiból egy $B_1$ bázist (ami tehát egy $m \times m$-es részmátrix) és tekintsük a $B_1 x = b$ egyértelmű $x_1$ megoldását (ezeket tehát az előbbi Gauss-elimináció meghatározta.) Ha $x_1$ nemnegatív, akkor ez a primál feladat bázis-megoldása.

Tegyük fel most, hogy $x_1$-nek van negatív komponense. Az alapalgoritmus itt egy tetszőleges negatív komponenst választ. Példával kimutatható, hogy ilyenkor az algoritmus végtelen ciklusba eshet, ezért ennek elkerülésére indokolt valamilyen megkötést tenni. Jelölje $i_1$ a legkisebb indexet, amelyre $x_1(i_1) < 0$. (Ez a Bland féle legkisebb index szabály). Legyen $y_1$ olyan vektor, amely $B$ minden oszlopára merőleges, kivéve, hogy $y_1 a_{i_1} = 1$. (Az $yB_1 = d$ minden $m$-dimenziós $d$-re egyértelműen megoldható.) Most $q = 1$-re

$$y_q b = y_q(B_q x_q) = (y_q B_q)x_q = x_q(i_q) < 0. \tag{2.56}$$

Amennyiben minden $a_i$-re $y_1 a_i \geq 0$, úgy a duális feladat bázis-megoldását kaptuk.

Tegyük fel tehát, hogy valamely $j_1$ indexre $y_1 a_{j_1} < 0$ és válasszuk $j_1$-t a lehető legkisebbnek. (Ismét a legkisebb index szabályt alkalmazzuk). Természetesen ekkor $a_{j_1}$ nincs a $B_1$ bázisban, és az is látható, hogy $B_1$-ben $a_{i_1}$-t $a_{j_1}$-re cserélve egy másik bázist kapunk, amit jelöljünk $B_2$-vel. (Valóban, az $a_{j_1}$ vektor nem függhet lineárisan a $B_1$-nek $a_{i_1}$-től különböző oszlopaitól, hiszen az $y_1$ vektor ezen utóbbiak mindegyikére merőleges, míg $a_{j_1}$-re nem.) Iteráljuk az eljárást most a $B_2$ bázissal kezdve, ameddig csak lehet.

Igazolnunk kell, hogy az eljárás véges sok lépésben véget ér. Tegyük indirekt fel, hogy nem ez a helyzet. Mivel csak véges sok bázis-megoldás van, lesznek olyan oszlopvektorok, melyek időről időre ki- majd újra bekerülnek a bázisba. Legyen $a_r$ a legnagyobb ilyen indexű. Tehát az $r$-nél nagyobb indexű oszlopok egy bizonyos időponttól fogva már nem változtatják helyzetüket: vagy egyszer és mindenkorra benn vannak a bázisban, vagy kívül. Legyen egy ezutáni pillanatban $B_p$ egy olyan előforduló bázis, amelyben $a_r$ benne van, de $B_{p+1}$-ben nincs. Legyen $B_q$ $(q > p)$ egy olyan későbbi bázis, amelyben $a_r$ nincs benne, de $B_{q+1}$-ben benne van. Ekkor tudjuk, hogy $y_q$ a $B_{q+1}$ minden oszlopára merőleges, kivéve $a_r$-t, amelyre $y_q a_r < 0$. A második választási szabályból az is következik minden $a_r$ előtti $a_i$ oszlopra, hogy $y_q a_i \geq 0$.

Az első választási szabály miatt $x_p$ minden $r$-nél kisebb indexű komponense nem-negatív. Így tehát az $1 \leq i < r$ indexekre $(y_q a_i) x_p(i) \geq 0$ és $(y_q a_r) x_p(r) > 0$. A $B_q$ mátrixnak egyetlen olyan $a_j$ oszlopa van, amelyre $y_q$ nem merőleges, de mivel éppen ez az oszlop esik ki a $B_q$ bázisból, az $a_j$ szükségképpen megelőzi $a_r$-t. Tehát $y_q$ merőleges a $B_q$-nak $a_r$ utáni oszlopaira, de mivel az $r$-nél nagyobb indexű oszlopokon a $B_q$ és a $B_p$ bázis megegyezik (itt használva $r$ maximális választását), $y_q$ merőleges $B_p$ minden $r$-nél nagyobb indexű oszlopára. Így felhasználva (2.56)-t, kapjuk, hogy $0 > y_q b = y_q(B_p x_p) = (y_q B_p) x_p \geq 0$, és ez az ellentmondás a tételt és egyúttal az algoritmus végességét is bizonyítja. •

Az algoritmus kissé általánosabb alakban is használható. Például, ha a $\{Px_0 + Ax_1 = b, x_1 \geq 0\}$ rendszer megoldhatóságát akarjuk eldönteni, akkor az előző eljárást a következőképpen kell módosítani. A kezdeti $B_1$ bázist úgy határozzuk meg, hogy a $P$ maximálisan sok lineárisan független oszlopát egészítjuk ki $A$ oszlopaiból $r(P, A)$ darab lineárisan független oszloppá. Az eljárást úgy módosítjuk, hogy csak az $A$-beli bázis elemeket cserélhetjük, a kezdeti $B_1$ bázis $P$-ből kiválasztott elemei végig fixen maradnak. Rögtön látható, hogy az így módosított eljárás új bizonyítást ad a 2.19 tételre. A még általánosabb 2.18 alakra is kiterjeszthető az algoritmus, ha a tétel bizonyításában leírt visszavezetést alkalmazzuk. Megállapíthatjuk tehát, hogy a fenti eljárás bármely alakban adott lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldására alkalmas.

Miért hívják a fenti algoritmust szimplex algoritmusnak? Az $m$-dimenziós térben, ha veszünk úgy $m+1$ pontot, hogy ezek egyike sincs benne a többi konvex burkában, akkor az $m+1$ pont konvex burka definíció szerint egy **szimplex**-et alkot. Egy dimenzióban ez egy szakasz, két dimenzióban háromszög, három dimenzióban tetraéder.

Tegyük fel, hogy a síkban adottak a $p_1, \ldots, p_n$ pontok, és el akarjuk dönteni, hogy ezek konvex burkában benne van-e egy megadott $b'$ pont. Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy nincs három pont egy egyenesen. Készítsünk el egy $2 \times n$-es $A'$ mátrixot, melynek $i$-edik oszlopa a $p_i$ pont koordinátáit tartalmazza. Legyen $A$ az a mátrix, amely $A'$-ből keletkezik egy csupa egyesből álló harmadik sor hozzávételével. A $b'$-t is egészítsük ki egy egyessel egy három dimenziós $b$ vektorrá. Ekkor a feladat azzal ekvivalens, hogy az $\{Ax = b, x \geq 0\}$ rendszernek van-e megoldása. Egy bázis-megoldáshoz tatozó három oszlopvektor három olyan $p_i$ pontnak felel meg, amelyek egy $b'$-t tartalmazó háromszöget alkotnak. Egy duális bázis-megoldás egy olyan egyenesnek felel meg (miért?), amely két $p_i$ ponton átmegy, és az általa meghatározott egyik zárt félsík tartalmazza az összes $p_i$ pontot, de nem tartalmazza $b'$-t. Mármost a szimplex algoritmus ezen a geometriai nyelven a következőképpen fut. Induljunk ki egy tetszőleges $B_1$-gyel jelölt háromszögből, melynek csúcsai mondjuk $p_1, p_2, p_3$. Állapítsuk, meg, hogy $b'$ benne van-e $B_1$-ben. Ha benne van akkor készen vagyunk: $b'$ benne van a $p_i$ pontok konvex burokában. Ha $b'$ nincs benne a háromszögben, akkor a háromszögnek az egyik $e_1$ oldalegyenese, mondjuk $p_2p_3$, elválasztja $b'$-t $p_1$-től. (A háromszögnek egy vagy két ilyen elválasztó oldalegyenese lehet, a $b'$ elhelyezkedésétől függően: az általános algoritmus ezek egyikét választja, a Bland féle szabály pontosan előírja, hogy melyiket kell választani.) Amennyiben az $e'$ egyenes által határolt, a $b'$-t tartalmazó nyílt félsíkban nincsen $p_i$ pont, akkor készen vagyunk; megkaptuk az elválasztó egyenest. Ha van, mondjuk a $p_4$ pont, akkor $p_1$-t becseréljük $p_4$-re és a keletkező $\{p_2, p_3, p_4\}$ háromszöggel folytatva iteráljuk az eljárást.

A fenti algoritmus szemléletesesn tehát azt jelenti, hogy a $p_i$ pontok által alkotott háromszögek segítségével mintegy letapogatjuk a sík egy darabját, és eközben vagy ráakadunk a $b'$ pontra vagy megtalálunk egy elválasztó egyenest. Magasabb dimenzióban ez azt jelenti, hogy a $p_i$ pontjaiból készített szimplexekkel tapogatjuk a teret, hogy megtaláljuk a $b'$ pontot. Innen tehát az elnevezés.

A következő példa mutatja, hogy ha a futás során nem alkalmazzuk a Bland féle szabályt, akkor az algoritmus ciklizálhat. Legyen $b'$ az origó és $n = 6$. Az origó középpontú egységkörön legyen $p_1, p_3, p_5$ egy egyenlő oldalú háromszög három csúcsa. E pontokat az origóval összekötő szakaszok felező pontjait az origó körül az óramutató járása szerint csöppnyit elforgatva kapjuk rendre a $p_2, p_4, p_6$ pontokat. Ha most $B_i$ jelöli a $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}$ pontok által alkotott háromszöget (modulo 6 tekintve), akkor a szimplex algoritmus egymás után ezen háromszögeket választhatja (ezt ellenőrizzük le!), míg vissza nem ér a kiindulási $B_1$-be.

**Feladat 2.26** *Hol tér el először az előbbi példában a szimplex algoritmus, ha ugyanazzal a $B_1$ háromszöggel kezdünk és alkalmazzuk a Bland féle legkisebb index szabályt?*

**Feladat 2.27** *Tegyük fel, hogy csak a bázisba bekerülő új oszlop kiválasztásánál alkalmazzuk a legkisebb index szabályt, a bázisból kikerülő oszlop meghatározásánál nem. Ciklizálhat-e ilyenkor az algoritmus vagy már ilyenkor is bizonyíthatóan mindig véges lesz?*

**Feladat 2.28** *Tekintsük a Farkas lemma következő alakját: Az $yA \le c$ rendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha létezik olyan $x \ge 0$, amelyre $Ax = 0$ és $cx < 0$. Tegyük fel, hogy $A$ sorai lineárisan függetlenek. Igazoljuk, hogy a következő algoritmus véges. (A bizonyításban vagy a fenti bizonyítás lépéseit imitáljuk, vagy pedig azt mutassuk ki, hogy az alábbi algoritmus nem más, mint a fenti algoritmus adaptációja):*

Legyen $B_1$ az $A$ egy $m \times m$-es nemszinguláris részmátrixa és legyen $y_1$ az $yB_1 = c_{B_1}$ egyértelmű megoldása. Amennyiben $y_1 A \le c$, akkor készen vagyunk, megtaláltuk a kívánt $y$-t. Ha $y_1 A \not\le c$, úgy legyen $a_j$ az $A$ mátrix legkisebb indexű oszlopa, amelyre $y_1 a_j < c(j)$. Tekintsük a $B_j x = -a_j$ egyértelmű $x_1'$ megoldását, és jelölje $x_1$ azt a vektort, amely $x_1'$-ből keletkezik az $x_1(j)$ helyen 1-gyel, a többin pedig 0-val kiegészítve. Ekkor $Ax_1 = 0$ és $cx_1 = c_{B_1}x_1' + c(j) = (y_1 B_1)x_1' + c(j) < (y_1 B_1)x_1' + y_1 a_j = (y_1 A)x_1 = 0$. Így ha $x_1 \ge 0$, akkor $x_1$ teljesíti a Farkas lemma második alternatíváját. Amennyiben $x_1 \not\ge 0$, úgy legyen $i$ a legkisebb index, amelyre $x_1(i) < 0$, és cseréljük ki a $B_1$-beli $a_i$ oszlopot az $a_j$ oszlopra. A keletkező $B_2$ mátrixszal folytava iteráljuk az eljárást.

**Feladat 2.29** *Terjesszük ki a fenti algoritmust a Farkas lemma következő változatára. Az $\{yP = c_0, yA \le c_1\}$ rendszernek pontosan akkor nincs megoldása, ha létezik olyan $x = (x_0, x_1)$, amelyre $(P, A)x = 0$, $x_1 \ge 0$ és $cx < 0$.*

### 2.6.2 Optimalizálás

Térjünk rá arra, hogy a fenti eljárás hogyan használható a $\min\{cx : Ax = b, x \ge 0\}$ primál lineáris program és $\max\{by : yA \le c\}$ duális lineráris program megoldására. Jelölje $R := \{x : Ax = b, x \ge 0)$ a primál, $R^* := \{y : yA \le c\}$ pedig a duál poliédert. Feltesszük, hogy $A$ sorai lineárisan függetlenek, ami azt jelenti, hogy $R^*$ csúcsos.

A megengedettségre vonatkozó szimplex algoritmussal először megkeresünk $R^*$-nak egy $y_0$ csúcsát (azaz $yA \le c$ egy bázis-megoldását). Amennyiben $R^*$ üres, úgy az eljárás egy olyan $x' \ge 0$ vektort szolgáltat, amelyre $Ax' = 0$, $cx' < 0$, és ilyenkor vagy a primál poliéder is üres, vagy ha van is egy $x_0$ pontja, akkor $x_0 + \lambda x'$ minden pozitív $\lambda$-ra $R$-ben van, így $cx$ nem korlátos alulról. Ekkor tehát az algoritmus futása befejeződik.

Tegyük fel tehát, hogy rendelkezésünkre áll $y_0$. Jelölje $A_0^=$ az $A$-nak azon $a_i$ oszlopai által alkotott részmátrixát, amelyekre $y_0 a_i = c(i)$, míg a maradék oszlopok részmátrixa legyen $A_0^<$. A fenti eljárással döntsük el, hogy az $\{A_0^= x' = b,\ x' \ge 0\}$ rendszernek létezik-e megoldása. Amennyiben létezik, úgy $x'$-t nulla komponensekkel kiegészítve $R$-nek egy olyan $x_0$ elemét kapjuk, amely teljesíti az optimalitási feltételeket (azaz, ha valamely $i$-re $x_0(i)$ szigorúan pozitív, akkor $y_0 a_i = c(i)$). Ekkor $x_0$ primál optimum, $y_0$ duál optimum és az eljárás véget ér.

Ha a szóbanforgó $x'$ nem létezik, akkor a fenti eljárás megtalálja $A_0^=$-nak egy $m-1$ lineárisan független oszlopból álló $A_0'$ részmátrixát valamint egy olyan $y'$ vektort, amelyekre $y'A_0^= \le 0, y'A_0' = 0$ és $y'b > 0$.

(Figyelem! Az $\{y'A_0^= \le 0, y'b \ge 1\}$ rendszer egy bázis-megoldása azt jelenti, hogy $y'$ az $A_0^=$ mátrixnak $m-1$ lineárisan független oszlopára merőleges. Az $yA \le c$ rendszer egy bázis megoldása azt jelenti, hogy $A$-nak van $m$ lineárisan független $a_i$ oszlopa, amelyre $ya_i = c(i)$.)

Amennyiben $y'A_0^< \le 0$, úgy az adódik, hogy $y'A \le 0$, $y'b > 0$ és így (a Farkas lemma triviális irányát alkalmazva) a primál feladat nem megoldható, vagy ekvivalensen a duál feladat nem korlátos. Ilyenkor az algoritmus véget ér.

Tegyük most fel, hogy $y'A_0^< \not\leq 0$. Válasszuk $\lambda$-t a legnagyobb olyan számnak, amelyre $(y_0+\lambda y')A \leq c$ teljesül, azaz $(y_0 + \lambda y')a_i \leq c(i)$ fennáll az $A_0^<$ mindegyik $a_i$ oszlopára. Vagyis $\lambda$ a legnagyobb szám, amelyre $\lambda y'a_i \leq c(i) - y_0 a_i$ teljesül az $A_0^<$ valamennyi olyan $a_i$ oszlopára, amelyre $a_i y' > 0$. Egyszóval legyen $\lambda_0 := \min(c(i) - y_0 a_i)/y'a_i)$, ahol a minimum az $A_0^<$ olyan $a_i$ oszlopaira megy, melyekre $a_i y' > 0$.

Legyen $y_1 := y_0 + \lambda_0 y'$. A $\lambda_0$ választásából adódóan $y_1$ eleme $R^*$-nak.

**Lemma 2.78** *$y_1$ csúcsa $R^*$-nak.*

**Biz.** Azt kell látni, hogy $A$-nak van $m$ lineárisan független oszlopa, melyekre $y_1 a_i = c(i)$. Mindenesetre $y'A'_0 = 0$ miatt $A'_0$-nak az $m-1$ oszlopa ilyen. Legyen $a_j$ egy olyan oszlop, ahol a $\lambda_0$ definíciójában szereplő minimum felvétetik. Ekkor nyilván $y_1 a_j = c(j)$, így csak azt kell látnunk, hogy $a_j$ lineárisan független az $A'_0$ oszlopaitól. De ez valóban így van, hiszen $y'A'_0 = 0$ és $y'a_j \neq 0$. •

Az $y_1$ tehát valóban csúcsa $R^*$-nak, és ráadásul $y_0$-nál jobb csúcsa, hiszen $y'b > 0$ miatt $y_1 b > y_0 b$. Miután $R^*$-nak véges sok csúcsa van, az eljárás véges sok iteráció után befejeződik.

A algoritmusban a Farkas lemmára vonatkozó algoritmust szubrutinként használtuk, aminek belsejében persze alkalmazzuk a Bland féle legkisebb index szabályt. A fenti algoritmusban azonban, amikor az $y_0$-ról áttértünk $y_1$-re, a szóban forgó $a_j$ oszlop meghatározásánál nem volt szükség a Bland-szabályra.

2002. december 17.ulinp23

# 3. Fejezet

# OPTIMALIZÁLÁS GRÁFOKON

## 3.1 TELJESEN UNIMODULÁRIS MÁTRIXOK

Az alábbiakban egy mátrixot vagy egy vektort akkor nevezünk egésznek vagy egészértékűnek, ha minden elemük (komponensük) egész szám. Gyakran előfordul, hogy egy lineáris egyenlőtlenségrendszernek egész megoldására vagy egy lineáris programnak egész optimális megoldására van szükségünk. Bebizonyították, hogy mindkét feladat NP-teljes, így általánosságban olyan típusú kerek megoldást nem várhatunk, mint amilyent a Farkas lemma vagy a dualitás tétel nyújt. Speciális feltételi mátrixok esetén azonban szavatolható egészértékű megoldás vagy optimum létezése.

Valamely $A$ mátrixot akkor nevezünk **teljesen unimodulárisnak** (TU: totally unimodular), ha minden aldeterminánsa $(0, \pm 1)$ értékű. Speciálisan, ilyen mátrix minden eleme $0, +1$ vagy $-1$. Világos, hogy TU-mátrix transzponáltja is az. Sorokat vagy oszlopokat $-1$-gyel szorozva vagy elhagyva ismét TU-mátrixot kapunk. Továbbá, egységvektorokat sorként vagy oszlopként egy TU-mátrixhoz illesztve TU-mátrixot kapunk. Így, ha az $A$ TU-mátrixot kiegészítjük egy $I$ egység-mátrixszal, akkor a keletkező $(A, I)$ mátrix is TU-mátrix. Ha $A$ TU-mátrix, úgy $(A, -A)$ is az. (De ha mondjuk egy csupa 1 oszloppal egészítjük ki $A$-t, akkor nem feltétlenül kapunk TU-mátrixot: legyen $A$ az $\{1, 2, 3, 4\}$ pontokon az $\{12, 13, 14\}$ élekből álló gráf $4 * 3$-as incidencia mátrixa.)

Példaképp, legyen $A$ egy $D = (V, E)$ irányított gráf incidencia mátrixa, azaz $A$ sorai a $V$-nek, oszlopai $E$-nek felelnek meg, és az $a_{v,e}$ elem akkor $+1$ illetve $-1$, ha az $e$ él belép illetve kilép $v$-ből (egyébként 0).

**TÉTEL 3.1** (a) *Digráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.* (b) *Páros gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris.*

**Biz.** (a) Vegyünk egy $A'$ négyzetes részmátrixot, amelyről be akarjuk látni, hogy determinánsa $0, \pm 1$. Amennyiben ennek van olyan oszlopa, amelyben legfeljebb csak egy nem-nulla elem van, akkor ezen oszlop szerint kifejtve a determinánst, indukcióval kész vagyunk. Így feltehetjük, hogy minden oszlopban pontosan két nem-nulla van (merthogy több nem lehet). Ezek közül az egyik $+1$, a másik $-1$, vagyis a sorokat összeadva 0-t kapunk, azaz $A'$ sorai lineárisan függőek, így a determináns 0.

(b) Szorozzuk meg $-1$-gyel a mátrix azon sorait, amelyek a páros gráf egyik osztályában lévő pontoknak felelnek meg. Ekkor egy irányított gráf incidencia mátrixát kapjuk, amiről az előbb láttuk, hogy TU. •

**Hipergráfon** egy $(V, \mathcal{F})$ párt értünk, ahol $V$ adott alaphalmaz, $\mathcal{F}$ pedig $V$ részhalmazainak egy rendszere, amelyben ugyanaz a részhalmaz több példányban is szerepelhet. Az $\mathcal{F}$ tagjai a hipergráf **hiperélei**. Egy $H$ hipergráfot akkor nevezzünk **teljesen unimodulárisnak,** ha $H$ incidencia mátrixa teljesen unimoduláris. Ez egy olyan $0-1$ értékű mátrix, amelyben a soroknak a $V$ elemei felelnek meg, az oszlopoknak az $\mathcal{F}$ elemei, és a mátrix egy eleme pontosan akkor egy, ha az oszlopának megfelelő hiperél tartalmazza a mátrix-elem sorának megfelelő $V$-beli elemet. A gráfok speciális hipergráfok, ahol minden hiperél kételemű. Ezek közül már láttuk, hogy a páros gráfok teljesen unimodulárisak. Más gráfok viszont sohasem azok, hiszen egy páratlan kör incidencia mátrixának determinánsa $\pm 2$.

Mint láttuk, minden $D$ digráf $\pm 1$-es incidencia mátrixa TU. Ezt általánosítja a **hálózati mátrix.** Legyen $D$ olyan irányított gráf, amely irányítatlan értelemben összefüggő és legyen $F$ egy feszítő fa.

Az $A$ mátrix sorai az $F$ éleinek felelnek meg, míg az oszlopai az $F$-en kívüli éleknek. Minden $uv$ nem-fa élre a fában egy egyértelmű (nem biztosan irányított) út vezet $v$-ből $u$-ba. ennek egy $f$ elemére a mátrix $a_{f,e}$ elemét definiáljuk 1-nek, ha $f$ iránya megegyezik az útéval és $-1$-nek, ha azzal ellentétes. A mátrix minden más eleme 0.

**Lemma 3.2** *Hálózati mátrix részmátrixa is az. Hálózati mátrix sorát vagy oszlopát $-1$-gyel szorozva hálózati mátrixot kapunk.*

**Biz.** Egy oszlop eltörlése annak felel meg, hogy a megfelelő nem-fa élt a digráfból kihagyjuk. Egy sor törlése annak felel meg, hogy a megfelelő fa-élt a digráfban összehúzzuk. Egy sor vagy oszlop $-1$-gyel való szorzása annak felel meg, hogy a megfelelő élt (akár fa-él, akár nem-fa él) átirányítjuk. •

**TÉTEL 3.3** *Az $A$ hálózati mátrix teljesen unimoduláris.*

**Biz.** A lemma alapján elég belátni, hogy egy négyzetes hálózati mátrix determinánsa $0, 1$ vagy $-1$. Tekintsük a fának egy $v$ végpontját. Ha az $F$ fa $v$-vel szomszédos éléhez tartozó sorban lévő nem-nulla elemek $\alpha$ száma legfeljebb 1, akkor a determináns kifejtési szabály alapján indukcióval készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $\alpha > 1$, vagyis $v$ szomszédos legalább két nem-fa éllel. Átirányítás miatt feltehető, hogy ezek közül pontosan egy van $v$ felé irányítva. Legyen ez $sv$ és legyen $vt$ egy másik nem-fa él. Ha az $sv$-nek megfelelő oszlopot, hozzáadjuk a $vt$-nek megfelelő oszlophoz, akkor egyrészt persze a determináns értéke nem változik, másrészt ismét hálózati mátrixot kapunk, éspedig azé a gráfét, amelyben a $vt$ él helyett az $st$ él szerepel.

Ilyen átalakításokkal egy olyan gráfot kaphatunk, amelyben az $F$ feszítő fa változatlan, egyetlen nem-fa él (nevezetesen $sv$) szomszédos $v$-vel, vagyis a hozzátartozó hálózati mátrix $v$-nek megfelelő sorában egy nem-nulla elem van. Ilyen hálózati mátrixról pedig már láttuk, hogy a determinánsa $0, \pm 1$, ugyanakkor a fenti operációk nem változatták a determináns abszolút értékét. •

**Következmény 3.4** *Egy olyan hipergráf, amely egy irányított fa élhalmazán van definiálva és a hiperélek irányított utak, teljesen unimoduláris.*

Egy hipergráfot **laminárisnak** mondunk, ha bármely két hiperéle vagy diszjunkt vagy az egyik tartalmazza a másikat. Például, ha $F = (V, E)$ egy $s$ gyökerű fenyő és minden $e = uv$ éléhez tekintjük a $v$-ből a fenyőben elérhető pontok halmazát, akkor ezen halmazok lamináris rendszert alkotnak. Valójában nem nehéz bebizonyítani ezen állítás megfordítását is, mely szerint minden lamináris halmazrendszer lényegében ilyen alakban áll elő.

Legyen $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ két lamináris hipergráf az $S$ alaphalmazon. Jelölje $A_i$ $(i = 1, 2)$ az incidencia mátrixukat, amelyben az oszlopok $S$ elemeinek felelnek meg, míg a sorok $\mathcal{F}_i$ elemeinek, és legyen $M := \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$.

**TÉTEL 3.5** *$M$ teljesen unimoduláris.*

**Biz.** Vegyük $M$-nek egy négyzetes részmátrixát. Az ebben lévő egyesek száma szerinti indukcióval ennek determinánsáról kimutatjuk, hogy 0 vagy $\pm 1$. Mivel $A_i$ bármely részmátrixa is egy lamináris rendszer incidencia mátrixa (miért?!), így feltehetjük, hogy a vizsgált részmátrix maga $M$. Ha $M$-ben minden elem nulla, akkor persze a determináns is nulla. Ha $M$-nek van olyan sora vagy oszlopa, amelyben legfeljebb egy nem-nulla elem van, akkor indukcióval (és kifejtési szabállyal) készen vagyunk.

Ha $\mathcal{F}_1$ is és $\mathcal{F}_2$ is partíció, akkor $A_1$ sorösszege is és $A_2$ sorösszege is a csupa 1 vektor, tehát $A$ sorai lineárisan függőek, így $\det(M) = 0$. Tegyük, most fel, hogy mondjuk $\mathcal{F}_1$ nem partíció. Ekkor van egy olyan minimális $Z$ tagja, amely része $\mathcal{F}_1$ egy másik tagjának. Ha most $\mathcal{F}_1$-nek valamennyi $Z$-tartalmazó tagjából kivonjuk $Z$-t, ami azzal ekvivalens (a laminaritás miatt), hogy a megfelelő sorokból kivonjuk $Z$ sorát, akkor a determináns értéke nem változik. Viszont a keletkező mátrixban kevesebb egyes szerepel, így indukcióval készen vagyunk. •

**Feladat 3.1** *Igazoljuk, hogy a 3.5 tételben szereplő $M$ mátrix hálózati mátrix!*

**Feladat 3.2** *Igazoljuk, hogy az alábbi mátrix teljesen unimoduláris, de sem ő, sem a transzponáltja nem hálózati mátrix:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 3.2 A FARKAS LEMMA ÉS A DUALITÁS TÉTEL TU-MÁTRIXOKRA

Az erős bázis-megoldás fogalma már eddig is hasznos volt (mert csak véges sok volt belőlük, és mert minden, a poliéderen felülről korlátos $cx$ célfüggvény esetén $\max cx$ erős bázis-megoldáson felvétetett.) E fogalom most újabb fontos szerephez jut.

**Lemma 3.6** *Tetszőleges $M$ TU-mátrixszal megadott egyenlőtlenség-rendszer esetén, ha a jobboldali korlátozó $b$ vektor egész, akkor minden erős bázis-megoldás egész.*

**Biz.** Legyen $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ és tekintsük a

$$Px = b_0, Qx \leq b_1 \tag{3.1}$$

rendszert. A Bázis-megoldások című szakaszban megfigyeltük, hogy minden erős bázis-megoldás előáll valamely $M'x' = b'$ egyenletrendszer egyértelmű megoldásának nulla komponensekkel való kiegészítéseként, ahol $M'$ az $M$ egy $[(r(M) \times (r(M)]$-es nem-szinguláris részmátrixa és $b'$ jelöli a $b$ azon részét, amely az $M'$ sorainak felel meg. Mármost, ha $M$ TU-mátrix, akkor a nem-szinguláris $M'$ determinánsa $+1$ vagy $-1$. A Cramer szabály szerint, miután $b'$ egész, az egyértelmű $x'$ megoldás is az. •

**Lemma 3.7** *Legyen $c$ tetszőleges (nem feltétlenül egészértékű) vektor. Bármely $M$ TU-mátrixszal megadott $K$ metszet-kúpnak, ha van olyan $x'$ eleme, amelyre $cx' > 0$, akkor $K$-nak van ilyen $(0, \pm 1)$-értékű eleme is.*

**Biz.** Legyen $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ és tegyük fel, hogy a $K$ kúp a $Px = 0, Qx \leq 0$ rendszer megoldás-halmaza. Mivel $x'$ pozitív számszorosa is $K$-ban van, feltehető, hogy $x'$ maga olyan, hogy minden komponense a $[-1, +1]$ zárt intervallumba esik. Vagyis a

$$(-1, \ldots, -1) \leq x \leq (1, \ldots, 1), \ Px = 0, Qx \leq 0 \tag{3.2}$$

rendszer által meghatározott korlátos poliédernek $x'$ olyan eleme, amelyre $cx' > 0$. Ekkor az 2.31 tétel szerint van olyan $x^*$ erős bázis-megoldása (3.2)-nek, amelyre $cx^* \geq cx'$. A 3.6 lemma miatt $x^*$ egészértékű, azaz minden komponense $0, \pm 1$. •

**TÉTEL 3.8** *Tegyük fel, hogy az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris. Ha a (3.1) primál probléma oldható meg és a korlátozó $b$ vektor egész, akkor (3.1)-nek van egész megoldása is. Ha az*

$$y_1 \geq 0, yM = 0, yb < 0 \tag{3.3}$$

*duális probléma oldható meg, ahol $y = (y_0, y_1)$, akkor van $(0, \pm 1)$-értékű $y$ megoldás is (függetlenül $b$ egészértékűségétől).*

**Biz.** A tétel első fele következik a 3.6 lemmából, és abból a korábbi eredményből, hogy ha létezik megoldás, akkor létezik erős bázis-megoldás is. A tétel második fele pedig a 3.7 lemma közvetlen folyománya. •

**TÉTEL 3.9** *Ha a $\max(cx : Px = b_0, Qx \leq b_1)$ lineáris programozási problémának létezik megoldása, az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris és $b$ egész, akkor az optimum egész vektoron is felvétetik (függetlenül attól, hogy $c$ egészértékű vagy sem).*

**Biz.** Miután az optimum erős bázis-megoldáson is felvétetik, a 3.6 lemmából az eredmény következik. •

Az alábbi tételek ugyanígy következnek a 2.54 és 2.37 tételekből a 3.6 és 3.7 lemmák segítségével.

**TÉTEL 3.10** *Tegyük fel, hogy $R = \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1\}$ nemüres, $b$ egész vektor, és $M$ teljesen unimoduláris. A következők ekvivalensek.*
*(1) $\{cx : x \in R\}$ felülről korlátos.*
*(2) Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$-értékű $x'$ vektor, amelyre $Px' = 0, Qx' \leq 0$, és $cx' > 0$.*
*(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$ és $yM = c$, és amely egész, amennyiben $c$ egész.*
•

**TÉTEL 3.11** *Tegyük fel, hogy az $R := \{x : Px = b_0, Qx \leq b_1)\}$ poliédernek $x^*$ egy eleme, az $M = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ mátrix teljesen unimoduláris és $b$ egész. Jelölje $Q^=_*$ azon részmátrixát $Q$-nak, amely sorainak megfelelő egyenlőtlenségeket $x^*$ egyenlőséggel teljesíti. A következők ekvivalensek.*
*(1) $x^*$ maximalizálja $cx$-t $R$ fölött.*
*(2) Nem létezik olyan $(0, \pm 1)$-értékű $x'$ vektor, amelyre $Px' = 0$, $Q^=_* x' \leq 0$, és $cx' > 0$.*
*(3) Létezik olyan $y = (y_0, y_1)$ vektor, amelyre $y_1 \geq 0$ $yM = c$, $y(B - Mx^*) = 0$, és $y$ egész, amennyiben $c$ egész.* •

Alkalmazásként levezetjük Kőnig Dénes tételét:

**TÉTEL 3.12 (Kőnig)** *Páros gráfban a független élek maximális $\nu$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau$ számával.*

**Biz.** Nyilván minden gráfra $\nu \leq \tau$. Az egyenlőség igazolásához azt kell kimutatnunk, hogy páros gráfban létezik olyan párosítás és olyan lefogó pontrendszer, melyek elemszáma megegyezik.

A páros gráf incidencia mátrixát jelölje $A$, amelyben a soroknak a gráf pontjai, az oszlopoknak a gráf élei felelnek meg. Tekinsük a következő primál-duál lineáris program párt:

$$\max(1x : Ax \leq 1, x \geq 0), \tag{3.4}$$

$$\min(1y : yA \geq 1, y \geq 0). \tag{3.5}$$

A 3.9 tétel szerint mindkét programnak az optimuma egészen felvétetik. Jelöljük ezeket rendre $x_0$-lal és $y_0$-lal. (3.4) minden egészértékű megoldása $0-1$ értékű, és rögtön látszik, hogy (3.5) minden optimális egészértékű megoldása is $0-1$ értékű. Legyen $M$ azon élek halmaza, melyeken $x_0$ az 1 értéket vesz fel, és legyen $T$ azon pontok halmaza, amelyeken $y_0$ egyet vesz fel. Az $Ax \leq 1$ feltétel azt jelenti, hogy $M$ párosítás a gráfban, míg az $yA \geq 1$ feltétel azt jelenti, hogy $T$ az éleket lefogó pontrendszer. A primál és duál optimum értékek egyenlősége pedig azt jelenti, hogy $|M| = |T|$, ami a célunk volt. •

Természetesen a primál programban az azonosan 1 célfüggvény helyett választhatunk tetszőleges $c$ célfüggvényt. Ekkor a fenti módszer a Kőnig tétel Egerváry Jenőtől származó általánosítását adja:

**TÉTEL 3.13 (Egerváry)** *Páros gráfban egy párosítás maximális költsége egyenlő $\min(\sum_{v \in V} \pi(v) : \pi \geq 0, \pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$ minden $uv$ élre). Ha $c$ egészértékű, az optimális $\pi$ is választható egészértékűnek.* •

További általánosításokat kaphatunk, ha a primál feladatban a jobboldalt valamilyen (nem-negatív) $b$ vektornak választjuk. Ennek az a kombinatorikus jelentése, hogy maximális költségű fokszám-korlátozott részgráfot keresünk. Természetesen alsó korlátokat is kitűzhetünk a fokszámokra, mint ahogy korlátozhatjuk alulról és felülről azt, hogy egy élt hány példányban vehetünk be a keresett részgráfba. Valójában nem is érdemes megfogalmazni a különböző lehetőségekre vonatkozó min-max tételeket, mert a dualitás tétel és a páros gráf incidencia mátrixának teljes unimodularitása már magában hordozza a szükséges információt.

## 3.3 KEREKÍTÉS ÉS EGYENLETES SZÍNEZÉS

Akkor mondjuk, hogy egy $z$ egész szám az $x$ **szám kerekítése,** ha $|x - z| < 1$. (Tehát az $1,01$-nek az 11 és a 2 is kerekítése.) Ez speciálisan azt jelenti, hogy ha $x$ egész, akkor $x = z$. A $z$ vektor az $x$ **vektor kerekítése**, ha minden komponense kerekítés. Egy $x$ nem-egész szám $\lfloor x \rfloor$ alsó egész részén a legnagyobb $x$-nél kisebb egész számot értjük, míg $\lceil x \rceil$ felső egész részen a legkisebb $x$-nél nagyob számot. Egész $x$-re $\lfloor x \rfloor := \lceil x \rceil := x$. Amennyiben $x$ egy vektort jelöl, úgy $\lfloor x \rfloor$ azt a vektort jelöli, amelyet $x$-ből nyerünk a komponenseinek alsó egész részét véve. Az $x$ vektor $\lceil x \rceil$ felső egész részét analóg módon definiáljuk.

**Lemma 3.14** *Legyen $A$ teljesen unimoduláris mátrix és $x_0$ egy vektor. Ekkor létezik egy olyan $q$ egészértékű vektor, amelyre $\lfloor x_0 \rfloor \leq q \leq \lceil x_0 \rceil$ és $\lfloor Ax_0 \rfloor \leq Aq \leq \lceil Ax_0 \rceil$. Más szóval az $x_0$-nak van olyan $q$ kerekítése, hogy az $A$ minden $a$ sorára $aq$ kerekítése $ax_0$-nak.*

**Biz.** A feltevés szerint az $\lfloor x_0 \rfloor \leq z \leq \lceil x_0 \rceil$ és $\lfloor Ax_0 \rfloor \leq Az \leq \lceil Ax_0 \rceil$ rendszernek van megoldása, így a 3.8 tétel szerint van egész megoldása is. •

Érdemes megfogalmazni az alábbi következményt: *Ha $(S, \mathcal{F})$ teljesen unimoduláris hipergráf, úgy bármely $x_0 : S \to \mathbf{R}$ függvénynek létezik olyan $q$ kerekítése, hogy minden $A \in \mathcal{F}$ hiperélre a $(\sum q(v) : v \in A)$ szám kerekítése $(\sum x_0(v) : v \in A)$-nak.*

**TÉTEL 3.15** *Tetszőleges $m \times n$-es $B$ mátrixnak van olyan kerekítése, hogy a következő mennyiségek mind egynél kevesebbel változnak: minden sorösszeg, minden oszlopösszeg, az első $j$ sor elemeinek összege $(j = 1, 2, \ldots, m)$, az első $i$ oszlop elemeinek összege $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

**Biz.** Legyen $S$ a $B$ mátrix mezőinek halmaza. $B$ minden sorához legyen a sorban lévő mezők halmaza tagja $\mathcal{F}_1$-nek valamint minden $i$-re $(2 \leq i \leq m)$ az első $i$ sor mezőinek halmaza legyen tagja $\mathcal{F}_1$-nek (összesen tehát $2m - 1$ tagja van $\mathcal{F}_1$-ben). $\mathcal{F}_2$ analóg módon van definiálva az oszlopok segítségével. Ekkor $\mathcal{F}_i$ lamináris, így a 3.5 tétel és a 3.14 lemma alapján készen vagyunk. •

A teljesen unimoduláris mátrixok egy másik érdekes alkalmazása hipergráfok egyenletes színezésével foglalkozik.

**TÉTEL 3.16** *Legyen $A$ TU-mátrix, $b$ egész vektor, $k$ pozitív egész. Legyen $z$ olyan egész vektor, amelyre $Az \leq kb$. Ekkor $z$ előáll olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegeként, melyekre $Az_i \leq b$.*

**Biz.** $k$ szerinti indukció alapján elég egy olyan egész $z_1$ egész vektort találni, amelyre $Az_1 \leq b$ és $A(z - z_1) \leq (k-1)b$. Ugyanis ilyen $z_1$ létezése esetén $z' := z - z_1$ olyan, amelyre $Az' \leq (k-1)b$ és az indukciós feltevés alkalmazható $(k-1)$-re.

A fenti $z_1$ létezéséhez csak azt kell látni, hogy az $Az - (k-1)b \leq Ax \leq b$ poliédernek van egész pontja. A poliéder mindenesetre nemüres, hiszen $z/k$ benne van. Továbbá a feltételek egy TU-mátrixszal adhatók meg, így létezik a kívánt egész pont is. •

A fenti tétel kiterjeszthető arra az esetre, amikor $z$ nemnegativitását is megköveteljük, és az $Ax$-re nemcsak felső korlát van, hanem alsó is. Valóban, ha $A$ TU-mátrix, akkor az $(A, -A, I)$ mátrix is teljesen unimoduláris. Kapjuk a következőt.

**Következmény 3.17** *Ha $z \geq 0$ olyan egész vektor, amelyre $kb_1 \leq Az \leq kb_2$, akkor $z$ felbomlik olyan $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegére, melyekre $z_i \geq 0$, és $b_1 \leq Az_i \leq b_2$.*

Ezt felhasználhatjuk TU-mátrixok oszlopainak egyenletes $k$-színezésére. Az $A$ oszlopainak egy partícióját ("színezését") $A_1, A_2, \ldots, A_k$ részre akkor nevezzük **egyenletesnek**, ha $A$ minden $a$ sorára érvényes, hogy a sornak az egyes $A_i$ részekbe eső elemeinek összege minden $A_i$-re lényegében ugyanaz, tehát $\lfloor 1a/k \rfloor$ vagy $\lceil 1a/k \rceil$.

**TÉTEL 3.18** *Az $A$ TU-mátrix oszlopainak létezik egyenletes $k$ színezése.*

**Biz.** Legyen $d$ az $A$ oszlopainak az összege. Legyen $b_1 := \lfloor d/k \rfloor, b_2 := \lceil d/k \rceil$ . Ekkor a $z :\equiv 1$ benne van a $\{kb_1 \leq Ax \leq kb_2, x \geq 0\}$ poliéderben. Az előbbi következmény szerint $z$ felbomlik $z_1, z_2, \ldots, z_k$ egész vektorok összegére, melyekre $z_i \geq 0$, és $b_1 \leq Az_i \leq b_2$. Világos, hogy a $z_i$-k $0-1$ vektorok. Legyen $A_i$ az oszlopoknak azon halmaza, melyeknek megfelelő komponense $z_i$-nek 1. Ezek éppen a kívánt egyenletes színezést adják. •

**Következmény 3.19** *Egy páros gráf éleit meg lehet $k$ színnel úgy színezni, hogy minden $v$ csúcsra és mindegyik $j$ színre ($j = 1, \ldots, k$) a $v$-be menő $d(v)$ darab él közül $\lfloor d(v)/k \rfloor$ vagy $\lceil d(v)/k \rceil$ darab színe $j$. Ha $k$-t a maximális fokszámnak választjuk, akkor megkapjuk Kőnig élszínezési tételét, amely szerint páros gráf kromatikus indexe (élszínezési száma) a maximális fokszámmal egyenlő. Ha $k$-t a minimális $\delta$ fokszámnak választjuk, akkor Gupta egy tételét kapjuk, amely szerint $G$ páros gráf élhalmaza felbontható $\delta$ részre úgy, hogy mindegyik rész fedi az összes pontot.* •

**Következmény 3.20** *Adott egy $F$ irányított fa (speciális esetben irányított út) és $F$ irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat $F$-élek egy részhalmazának tekintünk. $\mathcal{P}$ tagjai megszínezhetők $k$ színnel (minden $k$ pozitív egészre) úgy, hogy $F$ minden $e$ élére az $e$-t tartalmazó egyszínű utak száma minden színre lényegében ugyanannyi, ahol a "lényegében ugyanannyi" azt jelenti, hogy bármely két színosztályra az eltérés legfeljebb egy lehet.* •

Ha a hálózati mátrix transzponáltjára alkalmazzuk a színezési tételt, akkor a következőt kapjuk.

**Következmény 3.21** *Adott egy $F$ irányított fa és $F$ irányított részútjainak egy $\mathcal{P} := \{P_1, \ldots, P_t\}$ rendszere, ahol minden utat $F$-élek egy részhalmazának tekintünk. Az $F$ élei megszínezhetők $k$ színnel (minden $k$ pozitív egészre) úgy, hogy $\mathcal{P}$ minden tagjában a színek lényegében egyenletes számban fordulnak elő.* •

**Feladat 3.3** *Egy egyszerű mohó algoritmus megadásával közvetlenül bizonyítsuk be a 3.21 következményt.*

2002. december 17.ulinp31

## 3.4 ÁRAMOK ÉS FOLYAMOK

A teljesen unimoduláris mátrixok szép tulajdonságainak legfontosabb felhasználási területe a hálózati folyamok (network flows) elmélete. Ez olyan lineáris programozási feladatok megoldásával és alkalmazásaival foglalkozik, amelyekben a feltételi mátrix egy irányított gráf incidencia mátrixa avagy annak transzponáltja. Mostani célunk azt megmutatni, hogy az alapvető megengedettségi és optimalitási tételek, hogyan következnek a TU-mátrixok tulajdonságaiból. Egy $R$ poliédert **egésznek** nevezünk, ha minden $c$ célfügvényre, amelyre $cx$ felülről korlátos $R$-en a $\max(cx : x \in R)$ egész vektoron (is) felvétetik.

Jelöljön $D = (V, E)$ egy irányított gráfot. Legyen $f : E \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ alsó kapacitás, $g : E \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ felső kapacitás úgy, hogy $f \leq g$. Valamely $x : E \to \mathbf{R}$ vektorra és $S \subseteq V$ részhalmazra legyen $\varrho_x(S) := \sum(x(uv) : uv \in E, uv$ belép $S$-be) és legyen $\delta_x(S) := \varrho_x(V - S)$. Az $x$ vektort **áramnak** (circulation) nevezzük, ha teljesül a rá **megmaradási szabály** (conservation rule), azaz $\varrho_x(v) = \delta_x(v)$ fennáll minden $v$ csúcsra. (Figyelem: az $f$-ben megengedünk $-\infty$ komponenst, ami persze csak annyit jelent, hogy az illető élen az áram értéke nincs alulról korlátozva. Ez azt is jelenti, hogy csak az olyan $e$ élen rendelünk majd az $f(e) \leq x(e)$ egyenlőtlenséghez duál változót, amelyen az $f(e)$ korlát véges. Analóg módon a $g$-nek lehetnek $+\infty$ komponensei, de az $x$ áram komponensei mindig valósak. Az $f$ alsó korlátban $+\infty$-t, a $g$ felső korlátban pedig $-\infty$-t nem engedünk meg. Néha előírjuk, hogy az $f$ vagy a $g$ komponensei egészértékűek legyenek; ebbe beleértjük a $\pm\infty$-t is.)

**Gyakorlat 3.4** *(a) Igazoljuk, hogy $x$ akkor és csak akkor áram, ha $\varrho_x(v) \leq \delta_x(v)$ fennáll minden $v$ csúcsra. (b) Ha $x$ áram, akkor $\varrho_x(Z) = \delta_x(Z)$ minden $Z \subseteq V$ részhalmazra is fennáll.*

Az $x$ áramot **megengedettnek** (feasible) mondjuk, ha

$$f \leq x \leq g. \tag{3.6}$$

**TÉTEL 3.22** *Tegyük fel, hogy $f$ és $g$ egész. A megengedett áramok halmaza, amennyiben nemüres, egész poliéder.*

**Biz.** Miután irányított gráf incidencia mátrixa teljesen unimoduláris, a 3.9 tételből az állítás következik. •

**TÉTEL 3.23 (Alan Hoffman, 1960)** *Akkor és csak akkor létezik megengedett áram, ha*

$$\varrho_f(X) \leq \delta_g(X) \text{ minden } X \subseteq V \text{ halmazra.} \tag{3.7}$$

*Továbbá, ha $f$ és $g$ egészértékűek és (3.7) fennáll, akkor létezik egészértékű megengedett áram is.*

**Biz.** A szükségesség igazolásához, tegyük fel, hogy $x$ megengedett áram. Ekkor $\delta_g(X) - \varrho_f(X) \geq \delta_x(X) - \varrho_x(X) = 0$, amiből (3.7) következik.

Az elegendőséghez tekintsük az $Ax \leq 0, x \leq g, -x \leq -f$ rendszert. Figyeljük meg, hogy a jelen esetben egy $x$ vektorra akkor és csak akkor teljesül az $Ax \leq 0$ egyenlőtlenség, ha $Ax = 0$. (Ezt kellett bizonyítani a 3.4 gyakorlat (a) részében.) A 3.8 tételt alkalmazva kapjuk, hogy ha a fenti rendszernek nincs megoldása, akkor van olyan $(y, u, v)$ $(0,1)$-értékű vektor amelyre $(*)$ $yA + u - v = 0$ és $(**)$ $ug - vf < 0$. Mivel $f \leq g$, így minden élre feltehető, hogy $u(e)$ és $v(e)$ közül legalább az egyik nulla (ha ugyanis mindkettő 1, akkor mindkettőt helyettesíthetjük nullával.)

Jelölje $Z$ azon $z$ pontok halmazát, ahol az $y(z) = 1$. Ekkor $(*)$ miatt minden olyan $e$ élre, amelynek mindkét vége vagy $Z$-ben vagy $V - Z$-ben van, $u(e) = v(e) = 0$. Továbbá minden $Z$-be belépő $e$ élre $v(e) = 1$, $u(e) = 0$ és minden $z$-ből kilépő élre $v(e) = 0, u(e) = 1$. Miután $ug = \delta_g(Z)$ és $vf = \varrho_f(Z)$, így $(**)$ ellentmond a (3.7) feltételnek. •

Az általános elméletből szépen kiadódott Hoffman tétele. Természetes azonban az igény, hogy egy rövid, direkt bizonyítás is rendelkezésünkre álljon. Íme:

**Direkt bizonyítás** (a (3.7) feltétel elegendőségére). Tekintsük a következő függvényt. $\gamma(X) := \delta_g(X) - \varrho_f(X)$. Most (3.7) azzal ekvivalens, hogy $\gamma$ nem-negatív. Az $X, Y \subseteq V$ halmazokra jelölje $d_x(X, Y)$ az $x(e)$ értékek összegét mindazon $e$ élekre, melyek $X - Y$ és $Y - X$ egy-egy pontját kötik össze (mindegy melyik irányban). A bizonyítás kulcsa a következő lemma.

**Lemma 3.24** $\gamma(X)+\gamma(Y)=\gamma(X\cap Y)+\gamma(X\cup Y)+d_{g-f}(X,Y)$.

**Biz.** Könnyen ellenőrizhetjük, hogy minden lehetséges él hozzájárulása a két oldalhoz ugyanannyi. •

A Hoffman tétel bizonyításához visszatérve nevezzünk egy olyan $e$ élt **pontosnak**, amelyre $f(e)=g(e)$. Nevezzünk **pontosnak** csúcsok egy $Z$ részhalmazát, amelyre $\gamma(Z)=0$. Tegyük fel indirekt, hogy a $D$ digráfra nem igaz a tétel, és válasszunk egy olyan ellenpéldát (adott $D$), amelyben a pontos élek és a pontos halmazok együttes száma maximális. Az nem lehet, hogy minden él pontos, mert akkor $x:=f(=g)$, a (3.7) miatt, megengedett áram volna. Legyen $a=st$ olyan él, amelyre $f(a)<g(a)$.

Állítjuk, hogy $a$ belép egy pontos $T$ halmazba. Valóban, ha nem lépne be, akkor $f(a)$-t meg tudnánk úgy növelni, hogy a módosított $f'$ alsó korlátra továbbra is fennállna $f'\leq g$ és $\varrho_{f'}(Z)\leq\delta_g(Z)$ minden $Z\subseteq V$-re, továbbá vagy az $a$ él válna pontossá, vagy pedig egy olyan halmaz, amelybe az $a$ él belép. Ez a lehetőség azonban ellentmondana a pontos élek és halmazok maximális együttes számára tett feltevésünknek. Tehát az $a$ él valóban belép egy $T$ pontos halmazba. Analóg módon látható, hogy $a$ kilép egy $S$ pontos halmazból.

Az $a$ él létezése folytán tudjuk, hogy a $d_{g-f}(S,T)$ érték szigorúan pozitív. A lemmát és (3.7)-t alkalmazva kapjuk, hogy $0+0=\gamma(S)+\gamma(T)>\gamma(S\cap T)+\gamma(S\cup T)\geq 0+0$, amely ellentmondás mutatja, hogy nem létezhet ellenpélda, és így a tétel következik. Ugyanez a gondolatmenet azt is mutatja, hogy ha $f$ és $g$ egészértékű, akkor van egészértékű megengedett áram is. • •

Miután egy TU-mátrix transzponáltja is TU, érvényes a Hoffman tétel alábbi ellenpárja.

**TÉTEL 3.25** *Akkor és csak akkor létezik olyan $\pi:V\to\mathbf{R}$ vektor (amely ráadásul egészértékű, ha $f$ és $g$ is az), amelyre $f(uv)\leq\pi(v)-\pi(u)\leq g(uv)$ minden $e=uv$ élre, ha a $c'$-vel élsúlyozott $D'$ segédgráfban nincsen negatív kör, ahol $uv$ akkor eleme $D'$-nek, ha vagy $uv\in E$ és ekkor $c'(uv):=g(uv)$, vagy $vu\in E$ és ekkor $c'(uv):=-f(vu)$.*

A tétel következik az alább megfogalmazott speciális alakjából, amikor csak felső korlátok vannak adva a $\pi(v)-\pi(u)$ különbségekre. Valóban,, az $e=uv$ élre adott $f(uv)\leq\pi(u)-\pi(v)$ alsó korlát ekvivalens egy újonnan behúzott $vu$ élre vonatkozó $\pi(u)-\pi(v)\leq -f(vu)$ felső korláttal.

**TÉTEL 3.26** *Adott $c:E\to\mathbf{R}$ költség-függvényre akkor és csak akkor létezik olyan (***megengedett potenciálnak** *nevezett) $\pi:V\to\mathbf{R}$ vektor, amelyre $\pi(v)-\pi(u)\leq c(uv)$ minden $e=uv$ élre, ha nem létezik negatív költségű irányított kör. Amennyiben $c$ egészértékű, úgy a potenciál is választható annak.*

**Biz.** Legyen $A$ a digráf incidencia mátrixa. A 3.8 tétel miatt vagy létezik a $\pi A\leq c$ rendszernek megoldása (amely egész, ha $c$ az) vagy létezik a duális $Ax=0, x\geq 0, cx<0$ rendszernek egy $(0,\pm1)$-es megoldása. Az első eset épp egy megengedett potenciál létezését jelenti, míg a második esetben, $x\geq 0$ miatt, $x$ egy $(0,1)$ értékű, negatív költségű áram, amely élidegen körökre bomlik és így e körök egyike is negatív. •

Tekintsük most a költséges áram problémát, azaz adott $c:E\to\mathbf{R}$ költségfüggvény esetén keressünk minimális költségű megengedett áramot, más szóval oldjuk meg a

$$\min(cx:Ax=0, f\leq x\leq g) \tag{3.8}$$

lineáris programot. (Természetesen az $x\leq g$ egyenlőtlenség itt azt jelenti, hogy $x(e)\leq g(e)$ az olyan élekre, ahol $g(e)$ véges. Duális változó tehát csak ilyen egyenlőtlenségekhez tartozik.)

Először vizsgáljuk meg, hogy $cx$ mikor korlátos alulról. Készítsünk el egy $D'=(V,E')$ digráfot, és élein definiáljuk a $c'$ költségfüggvényt a következőképpen. $D'$-ben $uv$ akkor él, ha vagy $vu\in E, f(vu)=-\infty$, és ekkor $c'(uv)=-c(vu)$, vagy pedig $uv\in E, g(uv)=\infty$, és ekkor $c'(uv)=c(uv)$.

**TÉTEL 3.27** *Feltéve, hogy létezik megengedett áram, a következők ekvivalensek.*
*(a) $cx$ korlátos alulról,*
*(b) nincs negatív összköltségű irányított kör $D'$-ben,*
*(c) létezik egy olyan $\pi:V\to\mathbf{R}$ függvény, amelyre*

$$\pi(v)-\pi(u)\leq c(uv),\ \textit{ha}\ uv\in E\ \textit{és}\ g(uv)=\infty,$$

*és*

$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } f(uv) = -\infty.$$

**Biz.** A (b) és (c) feltételek ekvivalenciája következik a 3.25 tételből

Tekintsük a megengedett áramok $P := \{x : Ax \leq 0, f \leq x \leq g\}$ poliéderét és alkalmazzuk a 3.10 tételt. Eszerint $\{cx : x \in P\}$ akkor és csak akkor korlátos alulról, ha nem létezik olyan $(0, \pm 1)$ értékű $x$ áram, amelyre $cx < 0$, $x(e) \leq 0$, ha $g(e)$ véges, és $x(e) \geq 0$, ha $f(e)$ véges. Ilyen $x$ létezése pedig épp a $D'$-beli negatív kör létezésével ekvivalens. •

Tegyük most fel, hogy $x$ megengedett áram. Készítsünk el egy $D_x = (V, E_x)$ digráfot és az élhalmazán egy $c_x$ költségfüggvényt a következőképpen. Az $uv$ él akkor tartozzék $E_x$-hez, ha vagy $uv \in E, x(uv) < g(uv)$, és ekkor legyen $c_x(uv) := c(uv)$, vagy pedig $vu \in E, x(vu) > f(vu)$, és ekkor legyen $c_x(uv) := -c(vu)$. A 3.11 tételt specializálva kapjuk a következőt.

**TÉTEL 3.28** *Adott $x$ megengedett áram esetén a következők ekvivalensek.*
*(a) $x$ optimális megoldása (3.8)-nak,*
*(b) $D_x$-ben nem létezik negatív összköltségű irányított kör,*
*(c) létezik egy olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$ függvény, amelyre*

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } x(uv) < g(uv),$$

*és*

$$\pi(v) - \pi(u) \geq c(uv), \text{ ha } uv \in E \text{ és } x(uv) > f(uv). \bullet$$

**Feladat 3.5** *Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be a 3.27 és a 3.28 tételek megengedett potenciálokra vonatkozó ellenpárját.*

**Feladat 3.6** *Fogalmazzuk meg a 3.25 tétel általánosítását, ha minden $v$ pontban a $\pi(v)$-re alsó és felső korlát is ki van tűzve.*

Fontos megjegyezni, hogy a hálózati mátrixokkal megadott lineáris programok megoldhatók áram problémaként. Legyen $D = (V, E)$ irányított gráf, $F$ feszítő fa és legyen $N := E - F$ a nem-fa élek halmaza. Legyen adott $f = (f_F, f_N)$ és $g = (g_F, g_N)$ korlát, melyekre $f \leq g$. Legyen továbbá $c = (c_F, c_N)$ egy olyan vektor, amelyre $c_F = 0$. Jelölje az $F$-hez tartozó $(0, \pm 1)$-es hálózati mátrixot $A$, míg a $D$ digráf $(0, \pm 1)$-es pont-él incidencia mátrixát $B$. Legyen továbbá $x = (x_F, x_N)$. Tekintsük a $\max(c_N x_N : f_F \leq A x_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N)$ lineáris programot. Belátjuk, hogy ez ekvivalens a $\max(cx : Bx = 0, f \leq x \leq g)$ maximális költségű áram feladattal.

Amennyiben $x = (x_F, x_N)$ áram (azaz $Bx = 0$), úgy könnyen látszik, hogy $x_F = A x_N$, és persze $cx = c_N x_N$. Emiatt $f \leq x \leq g$ ekvivalens a $f_F \leq A x_N \leq g_F, f_N \leq x_N \leq g_N$ feltételekkel. Fordítva, tegyük fel, hogy $x_N$ kielégíti ezen utóbbi egyenlőtlenségeket. Minden $e \in N$ nem-fa élhez legyen $\chi_e$ az $(1, a_e)$ vektor, ahol $a_e$ az $A$ mátrix $e$-hez tartozó oszlopa. (Másszóval, $\chi_e$ az $e$ élhez tartozó $C_e$ alapkör $0, \pm 1$-es incidencia vektora.) Ekkor persze $\chi_e$ áram, és így az $x := \sum(x_N(e)\chi_e : e \in N)$ is áram, méghozzá olyan, hogy $x(e) = x_N(e)$, ha $e \in N$. Látható, hogy $f_F \leq A x_N \leq g_F$ azzal ekvivalens, hogy $f_F(e) \leq x(e) \leq g_F(e)$ minden $e \in F$ élre fennáll. •

Gyakran az áramnál általánosabb fogalmat tekintenek. Például az $x$ vektorra azt írjuk elő, hogy minden $v$ pontra $\varrho_x(v) - \delta_x(v) = b(v)$, ahol $b : V \to \mathbf{R}$ előre adott vektor. Vagy még általánosabban, adott $p : V \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b : V \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ esetén $(p \leq b)$ minden $v$ csúcsra legyen

$$p(v) \leq \varrho_x(v) - \delta_x(v) \leq b(v). \tag{3.9}$$

Egy egyszerű fogással azonban ez a feladat áram problémává alakítható. Nevezetesen, vegyünk fel egy új $s$ csúcsot, és $D$ valamennyi pontjából vezessünk egy-egy élt $s$-be. Egy új $vs$ élen legyen $f(vs) := p(v), g(vs) := b(v)$. Jelölje a kibővített élek halmazát $E'$. Tetszőleges $x : E \to \mathbf{R}$ vektorhoz legyen $x' : E' \to \mathbf{R}$ a következőképpen definiálva: $x'(e) := x(e)$ ha $e \in E$, és $x'(e) := \varrho_x(v) - \delta_x(v)$ ha $e' = vs$ $(v \in V)$. Hasonlóképp terjesszük ki $f$-t és $g$-t az új élekre: $f(us) := p(u), g(us) := b(u)$. Könnyen látszik, hogy $x$ akkor és csak akkor teljesíti (3.6)-t és (3.7)-t, ha $x'$ megengedett áram.

**Feladat 3.7** *Hoffman tételének általánosításaként igazoljuk, hogy akkor és csak akkor létezik a (3.6)-t és (3.9)-t kielégítő $x$ vektor, ha $\varrho_f(X) - \delta_g(X) \leq \min(p(X), b(V - X))$ fennáll minden $X \subseteq V$-re.*

Legyen adott egy $s$ forráspont és egy $t$ nyelőpont úgy, hogy $s$-be nem lép be él és $t$-ből nem lép ki él. Ha az előbbi általánosított áram fogalmat arra az esetre specializáljuk, amikor $p(v) = b(v) = 0$ ha $v \in V - \{s,t\}$, $f \equiv 0$, $p(s) = 0$, akkor $st$-folyamról, vagy röviden folyamról beszélünk. Másszóval, **folyamon** egy olyan nemnegatív $x : E \to R_+$ vektort értünk, amely minden, $s$-től és $t$-től különböző pontra teljesíti a megmaradási szabályt. Amennyiben még az $x \leq g$ feltétel is teljesül, **megengedett folyamról** beszélünk. Egy $s$-t tartalmazó, de $t$-t nem tartalmazó $X$ halmazt nevezzünk $s\bar{t}$-halmaznak.

Tetszőleges $S$ $s\bar{t}$-halmaz és $x$ folyam esetén $\delta\varrho_x(S) - \varrho_x(S) = \sum(\delta_x(v) - \varrho_x(v) : v \in S) = \delta_x(s) - \varrho_x(s) = \delta_x(s)$. Vagyis minden $S$ $s\bar{t}$-halmazra a $\delta_x(S) - \varrho_x(S)$ értékkel definiált **tiszta kiáramlás** független $S$ választásától. Ezt a közös, $\delta_x(s)$-sel egyenlő értéket nevezzük az $x$ folyam **nagyságának.** Az $x(uv)$ szám a folyam **értéke** az $uv \in A$ élen. Az $x$ folyamot **út-folyamnak (kör-folyamnak)** nevezzük, ha $x$ csak egy $s$-ből $t$-be vezető út (irányított kör) mentén pozitív.

**Gyakorlat 3.8** *Igazoljuk, hogy minden nem-negatív folyam kör- és út-folyamok nem-negatív kombinációja.*

Alapvető az alábbi, L.R. Fordtól és D.R. Fulkersontól származó Maximális-Folyam Minimális-Vágás tétel (Max Flow Min Cut; MFMC).

**TÉTEL 3.29 (Maximális-Folyam Minimális-Vágás)** *Akkor és csak akkor létezik $k$ nagyságú megengedett folyam, ha minden $S$ $s\bar{t}$-halmazra $\delta_g(S) \geq k$. Ha e feltétel teljesül, és $g$ egészértékű, $k$ pedig egész, úgy a folyam is választható egészértékűnek.*

A tételt néha az alábbi ekvivalens alakban említik.

**TÉTEL 3.30** *A megengedett $st$-folyamok maximális nagysága egyenlő a $\delta_g(S)$ értékek minimumával, ahol a minimum az összes $s\bar{t}$-halmazra megy. Ha $g$ egészértékű, úgy a maximum egészértékű folyamon is felvétetik.*

**Biz.** Legyen $x$ megengedett $st$-folyam és $S$ $s\bar{t}$-halmaz. Ekkor $\delta_x(s) = \delta_x(S) - \varrho_x(S) \leq \delta_g(S)$, amiből $max \leq min$ következik.

A fordított irány igazolásához jelölje $m_g$ a szóbanforgó minimum értékét. (Ez a minimum nyilvánvalóan létezik, merthogy véges sok szám minimumáról van szó. Az viszont még ezen a ponton nem világos, hogy létezik maximális nagyságú folyam.) Adjunk $D$-hez egy új $e = ts$ élt és definiáljuk $f(e) = m_g, g(e) := \{\infty\}$. Az eredeti éleken legyen $f$ mindenhol nulla.

Könnyen látszik, hogy most (3.7) fennáll, és így a 3.23 tétel szerint létezik megengedett áram (amely ráadásul egészértékű, ha $g$ az). Kihagyva a hozzávett $e$ élt, $m_g$ nagyságú folyamot kapunk. $\bullet$

A fenti bizonyítás előnye, hogy nem csupán egész vagy racionális kapacitásokra működik. Hátránya viszont, hogy nem konstruktív.

**Feladat 3.9** *Az MFMC tételből vezessük le Menger tételének irányított élidegen változatát. (Azaz egy irányított gráfban akkor és csak akkor van egy $s$ pontból egy $t$ pontba $k$ élidegen út, ha minden $s\bar{t}$-halmazból lép ki legalább $k$ él.)*

Nemcsak a maximális folyam feladat vezethető vissza megengedett áramokra, hanem megfordítva, a Hoffman tétel is levezethető az MFMC tételből. Ennek érdekében minden $v \in V$ csúcsra legyen $\lambda(v) := \varrho_f(v) - \delta_f(v)$. (Az itt következő levezetésben feltesszük, hogy $f, g$ véges értékű: kis gyakorló feladat az általános eset kezelése.) Ha $\lambda$ mindenhol nulla, akkor $f$ megengedett áram, és készen vagyunk.

Ha $\lambda$ nem azonosan nulla, akkor az $S = (v : \lambda(v) > 0)$ és $T = (v : \lambda(v) < 0)$ halmazok nem-üresek. Készítsük el a $D' = (V', A')$ digráfot úgy, hogy $V' = V \cup \{s,t\}$ és $A' = A \cup (s,v) : v \in S \cup ((v,t) : v \in T)$. Definiáljuk a $g'$ kapacitás függvényt a következőképpen. $g'(sv) := \lambda(v)$ ha $v \in S, g'(vt) := -\lambda(v)$ ha $v \in T$, és $g'(a) := g(a) - f(a)$ ha $a \in A$. Legyen $M = \sum(\lambda(v) : v \in S)$. A következő lemma a kapcsolatot írja le egyrészt $D$ megengedett áramai és $D'$ megengedett $st$ folyamai között, másrészt $D'$ $M$-nél kisebb vágásai és $D$ (5.1)-et megsértő halmazai között.

**Lemma 3.31** *(a) Ha $x$ $M$-nagyságú megengedett $st$-folyam $D'$-ben (a $g'$ kapacitásra vonatkozóan), akkor $f + x$ (az eredeti $A$-ra megszorítva) megengedett áram.*

*(b) Ha $\delta_{g'}(X + s) < M$ valamely $X \subseteq V$ halmazra, akkor $X$ megsérti a Hoffman féle (3.7) feltételt.*

**Biz.** (a) A megengedettség, azaz $f \leq f+x \leq g$, következik a konstrukcióból. A megmaradási szabály nyilván fennáll $V-(S\cup T)$ pontjaiban. Mivel $x$ nagysága $M$, minden $s$-ből kilépő él telített. Így $S$-nek bármely $v$ pontjára az eredeti gráfban érvényes, hogy $x(sv)+\varrho_x(v) = \delta_x(v)$, azaz $\varrho_f(v)-\delta_f(v)+\varrho_x(v) = \delta_x(v)$, és így $\varrho_{f+x}(v) = \delta_{f+x}(v)$, vagyis a megmaradási szabály érvényes $S$ pontjaiban is. A bizonyítás $T$ pontjaira analóg módon végezhető el.

(b) $\lambda(S) = M > \delta_{g'}(X+s) = \delta_{g-f}(X)+\lambda(S-X)-\lambda(T\cap X)$, amibe $\lambda(S-X) = \lambda(S)-\lambda(S\cap X)$-t helyettesítve kapjuk, hogy $0 > \delta_{g-f}(X) - \lambda(S\cap X) - \lambda(T\cap X) = \delta_{g-f}(X) - \lambda(X) = \delta_{g-f}(X) + \delta_f(X) - \varrho_f(X)$, vagyis $\delta_g(X) < \varrho_f(X)$. •

**Feladat 3.10** *Vezessük le Hoffman tételét az MFMC tételből, ha $f$-nek lehetnek $\{-\infty\}$, $g$-nek pedig $\{+\infty\}$ komponensei.*

A fenti redukció azt is mutatja, hogy egy maximális folyam illetve minimális vágás meghatározására szolgáló algoritmus segítségével el lehet dönteni, hogy teljesül-e (3.7), és ha igen, akkor tudunk találni megengedett áramot.

2002. december 17.ulinp32

## 3.5 LEGRÖVIDEBB SÉTÁK ÉS UTAK

Adott a $D = (V, E)$ $n$ pontú, $m$ élű irányított gráf élein egy $c : E \to \mathbf{R}$ költség- (vagy másnéven súly-) függvény. **Sétán** egy olyan $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ sorozatot értünk, amelyben felváltva következnek pontok és élek, és mindegyik $e_i$ él a $v_{i-1}$ pontból vezet a $v_i$ pontba. A séta **zárt,** ha $v_0 = v_k$. A szereplő élek száma a séta **hossza.** Azt mondjuk, hogy $v_0$ a séta kezdőpontja, $v_k$ a séta végpontja. Amenyiben nincs ismétlődés, **útról** beszélünk. Rövidség kedvéért egy $s$-ből $v$-be vezető utat $sv$-útnak fogunk hívni.

Fő célunk minimális össz-költségű, másnéven legolcsóbb $sv$-utat találni. Ha a költség negatív is lehet, akkor a feladat már az azonosan $-1$ súlyozás esetén is NP-teljes, ugyanis ekkor a legrövidebb út feladat magában foglalja a Hamilton út problémának az előírt végpontú változatát, ami a tetszőleges végpontú Hamilton út problémához hasonlóan NP-teljes.

### 3.5.1 NEMNEGATÍV KÖLTSÉGEK: DIJKSTRA ALGORITMUSA

Tegyük fel először, hogy a $c$ súlyozás nemnegatív. Egy $s$ **gyökerű fenyőn**, röviden $s$-fenyőn egy olyan irányított fát értünk, amelynek minden pontja az $s$-ből irányított úton elérhető. Amennyiben a fenyő minden $v$ pontjára az $s$-ből odavezető út a $D$ digráf egy legolcsóbb $s$-ből $v$-be vezető útja, úgy **legolcsóbb utak** egy $s$**-fenyőjéről** beszélünk. Jelölje $w_n(v)$ az $s$-ből $v$ be vezető legolcsóbb út költségét.

**Lemma 3.32** *Legyen $T$ egy legolcsóbb utak $s$-fenyője és tegyük fel, hogy az $m_T := \min(w_n(u)+c(uv) :$ $uv$ kilép $T$-ből) minimum valamely $a = u_a v_a$ élen vétetik fel. Ekkor $T' := T + a$ is legolcsóbb utak fenyője.*

**Biz.** Nyilván csak az $s$-ből $v_a$-ba vezető $T'$ beli $P'$ útról kell belátnunk, hogy $D$-ben legolcsóbb. Legyen $P$ tetszőleges $sv$ út $D$-ben, és jelölje ennek ($s$ felől indulva) első $V(T)$-ből kilépő $e = u_e v_e$ élét. $P$-nek az $s$-től $u_e$-ig tartó $P''$ részútjára érvényes, hogy $c(P'') \leq c(P)$, hiszen $c$ nemnegatív. Az $a$ minimális választása miatt, $c(P') \leq c(P'')$ és a lemma következik. •

A 3.32 lemmán alapuló Dijkstra módszer $n - 1$ fázisból áll. $s$-ből kiindulva, élek egyenkénti hozzávételével felépítünk legolcsóbb utaknak egy $T$ $s$-fenyőjét. Ennek érdekében fenntartunk egy $k_T$ címkét, amely azt mondja meg, hogy az aktuális $T$-hez tartozó $m_T$ érték mely $v \in V - V(T)$ pontban vétetik fel. Minden fenyőn kívüli $v \in V - V(T)$ pontra fenntartunk egy $l(v) := \min(w_n(u) + c(uv) : uv$ kilép $T$-ből) címkét. Ezen kívül fenntartunk még egy $a(v)$ címkét is, amely azt mondja meg, hogy az $l(v)$-t meghatározó minimum mely $uv$ élen vétetik fel. Az $l(v)$ szemléletesen azt jelenti, hogy mekkora az $s$-ből $v$-be vezető, csak $V(T)$ pontjait használó utak költségének minimuma. Evvel a jelöléssel tehát $k_T$ az $l(v)$ minimum helye.

Ezen címkék segítségével meg tudjuk mondani, hogy melyik $a$ élt kell a soron következő lépésben $T$-hez venni. Nevezetesen, vesszük a $k_T$-ban lévő $a_v$ pontot és az $a(a_v)$-ben lévő $a = a_u a_v$ élt vesszük az aktuális $T$ fenyőhöz.

Egyszerű módosításokkal kapjuk meg a keletkező $T'$ fenyőhöz tartozó címkéket. Az $l(v)$ értékeket a következő szabály szerint módosítjuk. $l(v) := \min(l(v), l(v_a) + c(v_a v))$. Amennyiben a minimum a második tagon éretik el, az $a(v)$ címke tartalmát $v_a v$-re cseréljük. Ebben az esetben még azt is megnézzük, hogy a csökkentett $l(v)$ nem kisebb-e $m_T$-nél, és ha igen, akkor $k_T$ tartalmát az aktuális $v$ pontra cseréljük, $m_T$-t pedig $l(v)$-re.

Így az összes módosítás kiszámítása $O(n)$ lépést igényel, és a teljes algoritmus bonyolultsága $O(n^2)$.
•

### 3.5.2 KONZERVATÍV KÖLTSÉGEK

A legolcsóbb út problémája tehát viszonylag egyszerűen megoldható, ha a költségek nemnegatívok, de létezik egy még mindig jól kezelhető általánosabb eset is, amikor negatív élek ugyan előfordulhatnak, de nincsen olyan irányított kör, amelynek össz-költsége negatív (röviden: negatív kör). Az ilyen súlyozást **konzervatívnak** nevezzük. Egy nemnegatív költség-függvény például nyilvánvalóan konzervatív, éppúgy mint egy aciklikus digráf tetszőleges költség-függvénye.

Hogyan lehet hatékonyan eldönteni, hogy egy adott súlyozás konzervatív-e, és ha igen, miként határozzunk meg egy legolcsóbb utat?

**TÉTEL 3.33** *Egy $c$ súlyozás akkor és csak akkor konzervatív, ha létezik olyan $\pi : V \to \mathbf{R}$* **megengedett potenciálnak** *nevezett függvény a csúcsokon, amelyre*

$$\pi(v) - \pi(u) \leq c(uv) \text{ fennáll minden } uv \text{ élre.} \tag{3.10}$$

*Továbbá, ha $c$ egészértékű, akkor $\pi$ is választható annak.*

**1. Biz.** Ha létezik megengedett potenciál, akkor bármely $C$ irányított körre fennáll, hogy $c(C) = \sum_{i=1}^{k} c(v_i v_{i+1}) \geq \sum(\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = 0$, ami azt jelenti, hogy $c$ konzervatív. (Itt $v_1, \ldots, v_k$ a kör pontjait jelöli, és a $v_{k+1} = v_1$ jelölési konvencióval éltünk.)

Megfordítva, tegyük fel, hogy $c$ konzervatív. Be akarjuk látni, hogy létezik megengedett potenciál. Jelölje $\pi_j(v)$ a $v$-ben végződő legfeljebb $j$ élű séták költségének a minimumát. A definícióból adódik, hogy tetszőleges $uv$ élre

$$\pi_j(v) \leq \pi_{j-1}(u) + c(uv) \tag{3.11}$$

Állítjuk, hogy ha $c$ konzervatív, akkor $\pi_n(v) = \pi_{n-1}(v)$ minden csúcsra (ahol $n$ a pontszám). Ez nyilván igaz, ha egy legolcsóbb legfeljebb $n$ élű séta legfeljebb $n-1$ élű. Ha viszont pontosan $n$ élű, akkor biztosan tartalmaz egy $C$ kört, amit kihagyva egy legfeljebb $n-1$ élű sétát kapunk, melynek költsége $c(C) \geq 0$-val kisebb, mint $\pi_n(v)$. Persze kisebb nem lehet, így $c(C)$ szükségképpen 0, azaz van egy $\pi_n(v)$ költségű legfeljebb $n-1$ élű séta, és így valóban $\pi_n(v) = \pi_{n-1}(v)$.

(3.11)-t használva kapjuk, hogy $\pi_n(v) \leq \pi_{n-1}(u) + c(uv) = \pi_n(v) + c(uv)$, azaz $\pi_n$ megengedett potenciál, amely ráadásul egészértékű, amennyiben $c$ az volt. •

**2. Biz.** Jelölje $A$ az irányított gráf incidencia mátrixát. $\pi$ pontosan akkor megengedett potenciál, ha $\pi A \leq c$. A TU márixokra vonatkozó Farkas lemma szerint, ennek akkor és csak akkor nincs egész megoldása, ha létezik olyan $0-1$ értékű $x$ vektor, amelyre $Ax = 0$ és $cx < 0$. Legyen $F := \{e : s(e) = 1\}$. Az $Ax = 0$ feltétel azzal ekvivalens, hogy $\varrho_F(v) = \delta_F(v)$ minden $v \in V$. Ezért $F$ felbontható élidegen irányított körök egyesítésére, melyek közül az egyik $c(F) < 0$ miatt szükségképpen negatív. •

A $\pi_n(v)$ értékeket igen könnyű kiszámítani, az alábbi rekurzió segítségével. Legyen $\pi_0(v) \equiv 0$ és $\pi_{i+1}(v) = \min[\pi_i(v), \min(\pi_i(u) + c(uv) : uv \in E)]$. Ha most a $\pi_n(v)$ megengedett potenciál immár rendelkezésünkre áll, akkor alkalmazhatjuk Dijkstra algoritmusát minimális költségű $P$ út megkeresésére a $\bar{c}(uv) := c(uv) - \pi_n(v) + \pi_n(u)$ (nemnegatív!) költség-függvényre nézve. Ekkor $P$ automatikusan minimális $c$-költségű út lesz, hiszen bármely $s$-ből $t$-be vezető út $c$-költségének és $\bar{c}$-költségének az eltérése ugyanaz az úttól független $\pi_n(t) - \pi_n(s)$ szám.

**Feladat 3.11** *Adjunk a 3.33 tételre még egy bizonyítást, amely pontszám szerinti indukciót használ az alábbi vázlat alapján. Válasszunk ki egy tetszőleges $z$ pontot, minden $uz$ és $zv$ élpárra vegyünk egy új élt $u$-ból $z$-be, amelynek költsége legyen $c(uz) + c(zu)$, majd töröljük a $z$ pontot. A keletkező kisebb pontszámú gráfra alkalmazzunk indukciót.*

Tegyük fel, hogy az $s$ pontból a digráf valamennyi pontja elérhető irányított úton. Jelölje $l(v)$ az $s$-ből $v$-be vezető legolcsóbb út költségét egy $c$ konzervatív súlyozásra nézve.

**Következmény 3.34** *$l$ megengedett potenciál.*

**Biz.** Adjunk a digráfhoz egy új $s'$ pontot és egy új $s's$ élt, melynek költsége legyen egy alkalmasan nagy $M$ szám negatívja. Ekkor minden $v$-re a $v$-ben végződő legolcsóbb út $s'$-ben fog kezdődni. A 3.33 tétel bizonyításában láttuk, hogy ezen utak költsége megengedett potenciál. Ez viszont éppen az $l$ függvény $M$-mel való eltoltja, tehát $l$ is megengedett potenciál. •

Egy $uv$ élt a továbbiakban **pontos**nak fogunk hívni ($\pi$-re nézve), ha (3.10)-et egyenlőséggel teljesíti. Tetszőleges $\pi$ potenciál által definiált $t(uv) := \pi(v) - \pi(u)$ költség-függvényt **potenciálkülönbségnek** vagy **tenziónak** nevezünk.

**Feladat 3.12** *Igazoljuk, hogy egy éleken értelmezett költség-függvény akkor és csak akkor tenzió, ha minden kör összköltsége 0.*

**TÉTEL 3.35** *Konzervatív $c$ súlyozás esetén az $s$-ből $t$-be vezető utak súlyának $l(t)$ minimuma egyenlő $\pi(t) - \pi(s)$ maximumával, ahol a maximum az összes megengedett $\pi$ potenciálon veendő.*

**Biz.** Legyen $\pi$ megengedett potenciál és $P$ tetszőleges út $s$-ből $t$-be, melynek pontjai $v_1 = s, v_2, \ldots, v_k = t$. Ekkor $c(P) = \sum c(v_{i+1}v_i) \geq \sum(\pi(v_{i+1}) - \pi(v_i)) = \pi(t) - \pi(s)$, vagyis a tételben a min $\geq$ max irány következik.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához kell találnunk egy $P$ $st$-utat és egy $\pi$ megengedett potenciált, amelyekre $c(P) = \pi(t) - \pi(s)$. E célra viszont egy tetszőleges $P$ legolcsóbb $st$-út és az $l$ megengedett potenciál megfelel. •

**Következmény 3.36** *Ha $P$ olyan $st$-út, amely valamely megengedett $\pi$ potenciálra nézve pontos élekből áll, akkor $P$ legolcsóbb $st$-út.* •

**Feladat 3.13** *Adott az éleken egy tetszőleges költség-függvény. Határozzunk meg egy olyan $s$-ből $t$-be vezető utat, amelyen a legnagyobb súly a lehető legkisebb.*

**Feladat 3.14** *Tegyük fel, hogy az éleken két konzervatív költség-függvényünk adott: $c_1$ és $c_2$. Készítsünk algoritmust olyan $st$ út megkeresésére, amely a $c_1$-re nézve minimális költségű és ezen belül $c_2$-re nézve minimális költségű.*

**Feladat 3.15** *Igazoljuk, hogy ha egy $s$-ből $t$-be vezető $P$ út minden éle benne van egy legolcsóbb útban, akkor $P$ maga is legolcsóbb út.*

### 3.5.3 ACIKLIKUS DIGRÁFOK: A KRITIKUS UTAK MÓDSZERE

Tegyük most fel, hogy a $D$ digráf aciklikus (azaz nem tartalmaz irányított kört) és az $s$ pontból mindegyik másik pontba vezet út. Legyen a $c$ súlyozás tetszőleges: ez automatikusan konzervatív. Aciklikus digráfnak mindig van olyan pontja, amelyből nem vezet ki él és ezért a pontokat olyan $v_1 = s, v_2, \ldots, v_n$ sorba lehet rendezni, hogy minden él korábbi pontból későbbibe vezessen. Egy ilyen sorrendet mélységi kereséssel lineáris időben meg tudunk találni.

A legrövidebb utak fenyőjét aciklikus digráfban még a Dijkstra algoritmusnál is egyszerűbben fel tudunk építeni, mert a pontoknak a fenyőbe kerülési sorrendje nem menetközben derül ki, hanem az előre adott sorrend lesz. Tegyük fel, hogy az első $j-1$ pont által feszített részgráfban már meghatároztuk a legolcsóbb utak egy $F_{j-1}$ fenyőjét az $l(v_i)$ költségekkel egyetemben $(1 \leq i \leq j-1)$. A sorrendben következő $v_j$ pontra legyen $l(v_j) := \min(l(v_i) + c(v_iv_j) : v_iv_j \in E)$ és legyen $F_j := F_{j-1} + v_iv_j$, ahol a $v_iv_j$ egy olyan él, amelyen a minimum felvétetik.

Alkalmazásokban gyakori, hogy aciklikus digráfban maximális súlyú utat kell keresni. Az is előfordul, hogy nem annyira az optimális útra vagyunk kiváncsiak, mint inkább az optimális potenciálra. Tekintsük például a következő feladatot. Egy projekt különféle részfeladatok elvégzéséből áll, melyeknek előre adott a végrehajtási ideje. Tudjuk továbbá, hogy bizonyos részfeladatoknak meg kell előzni másokat (házépítésnél az alapozás megelőzi a fürdőszoba csempézést), azaz a részfeladatok halmazán adott egy részbenrendezés. Kérdés, hogy mi az a legrövidebb idő, amely alatt a teljes projekt elvégezhető. További elvárás megadni az egyes részfeladatok kezdési időpontját úgy, hogy minden feladat kezdésére az őt a részbenrendezésben megelőzők már elkészüljenek.

A megoldáshoz készítsünk el egy $D$ irányított gráfot a következőképpen. Reprezentáljunk mindegyik $z$ részfeladatot egy $u_z v_z$ irányított éllel, amelynek súlya legyen a $z$ végrehajtási ideje. Amennyiben a $z$ feladat megelőzi az $y$ feladatot, úgy vegyünk be $D$-be egy $v_z u_y$ élt 0 súllyal. Végül adjunk a digráfhoz egy $s$ forráspontot, amelyből minden $u_x$ pontba vezessünk 0 súlyú élt, és adjunk egy $t$ pontot, amelybe minden $v_x$ pontból vezessünk 0 súlyú élt. Feladatunk olyan $\pi(v)$ időpontok kijelölésével ekvivalens, amelyekre $\pi(s) = 0$, $\pi(t)$ minimális és minden $uv$ élre a $\pi(v) - \pi(u)$ időpontkülönbség legalább akkora, mint az él súlya. Ha most mindent negálunk, akkor aciklikus irányított gráfról lévén szó konzervatív súlyozást kapunk. Így a 3.35 tétel alkalmazásával rögtön kapjuk, hogy a *projekt végrehajtásának minimális ideje egyenlő a legsúlyosabb út súlyával.* Egy ilyen utat szoktak néha kritikus útnak nevezni, és az előzőekben leírt minimális út problémának az itteni feladatra adaptált változatát kritikus út módszernek (angolul PERT: project evaluation and review technique).

Tudunk tehát részbenrendezett halmazban maximális súlyú láncot keresni. Ezt alkalmazhatjuk a következő feladatokban.

**Gyakorlat 3.16** *Adott egy út bizonyos részútjainak $\mathcal{F}$ rendszere. Válasszunk ki $\mathcal{F}$-nek diszjunkt tagjait úgy, hogy az összhosszuk maximális legyen.*

**Feladat 3.17** *Adott két betűkből álló sorozat. Válasszunk ki algoritmikusan egy maximális sok tagból álló közös részsorozatot. A feladat még akkor is megoldható, ha az egyes betűknek különböző súlya van és a kiválasztott közös részsorozatban lévő betűk súlyösszegét akarjuk maximalizálni.*

**Feladat 3.18** *Igazoljuk algoritmikusan, hogy egy $P$ részbenrendezett halmazban a leghosszabb lánc elemszáma egyenlő a $P$-t fedő antiláncok minimális számával!*

**Feladat 3.19** *Határozzuk meg algoritmikusan egy véges sorozat legtöbb tagból álló monoton növekvő részsorozatát!*

**Feladat 3.20** *Igazoljuk, hogy egy $nm + 1$ különböző tagokból álló számsorozatnak vagy van $n + 1$ tagú monoton növő vagy egy $m + 1$ tagú monoton csökkenő részsorozata! Létezhet mind a két fajta részsorozat?*

2002. december 17.ulinp33

## 3.6 A MAGYAR MÓDSZER

A 3. fejezetben megmutattuk, hogy a lineáris programozás dualitás tétele teljesen unimoduláris feltételi mátrixok esetén miként vezet el Kőnig tételéhez és annak általánosításaihoz. Jelen célunk a Kőnig tételre és súlyozott kiterjesztésére algoritmikus bizonyítást adni.

### 3.6.1 Maximális elemszámú párosítások

**TÉTEL 3.37 (Kőnig Dénes)** *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban a diszjunkt élek maximális $\nu = \nu(G)$ száma egyenlő az éleket lefogó pontok minimális $\tau = \tau(G)$ elemszámával.*

**Biz.** Egy $\nu$ elemű párosítás lefogásához kell legalább $\nu$ csúcs, így az összes élhez is kell, ezért $\nu \leq \tau$.

A nemtriviális $\nu \geq \tau$ irány igazolásához konstruálunk egy $M$ párosítást és egy $L$ lefogást, melyek elemszáma ugyanaz. Az eljárás tetszőleges $M$ párosításból indul ki, ami kezdetben az üres halmaz is lehet. Az általános lépésben vagy találunk egy nagyobb párosítást, és ekkor a nagyobb párosításra vonatkozóan iteráljuk az eljárást, vagy pedig egy $|M|$-mel megegyező elemszámú lefogást, amikoris az algoritmus véget ér.

Irányítsuk meg $M$ éleit $T$-től $S$ felé, míg az összes többi élt fordítva. Jelölje $R_S$ illetve $R_T$ az $S$-ben illetve a $T$-ben az $M$ által fedetlen pontok halmazát. Jelölje $Z$ az $R_S$ pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg).

Két eset lehetséges. Amennyiben $R_T$-nek esik pontja $Z$-be, akkor megkaptunk egy olyan $R_S$-t és $R_T$-t összekötő $P$ utat, amely $M$-ben alternál. Most $M$ és $P$ szimmetrikus differenciája egy $M$-nél eggyel több élből álló $M'$ párosítás. (Technikailag az eljárást nagyon egyszerű végrehajtani: a megtalált út éleinek irányítását egyszerűen megfordítjuk.)

A másik esetben $R_T$ diszjunkt $Z$-től. $Z$ definíciója folytán $Z$-ből nem lép ki irányított él. Érvényes továbbá, hogy $Z$-be nem lép be megirányított $uv \in M$ párosítás él, hiszen $v$ csak $u$-n keresztül érhető el, így $v$ csak akkor lehetett irányított úton elérhető $R_S$-ből, ha $u$ is az volt.

Következik, hogy az $L := (T \cap Z) \cup (S - Z)$ halmaz egyrészt lefogja az összes élt, másrészt minden $M$-beli élnek pontosan az egyik végpontját tartalmazza, tehát $|M| = |L|$. •

A fenti bizonyítás egyúttal hatékony algoritmust is jelent a szóbanforgó optimumok meghatározására. A lépésszám megbecsléséhez figyeljük meg, hogy legfeljebb $n/2$ alkalommal kell utat keresnünk. Miután egyetlen út megkeresése az élszámmal arányos időben történhet, az összlépésszám nem nagyobb, mint $O(nm)$ (ahol $n$ a gráf pontszáma, míg $m$ az élszáma).

A Kőnig tételhez szorosan kapcsolódik Hall tétele.

**TÉTEL 3.38** *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban akkor és csak akkor létezik $S$-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-féle feltétel:*

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \text{ minden } X \subseteq S \text{ részhalmazra,} \tag{3.12}$$

*ahol $\Gamma(X)$ jelöli azon $T$-beli pontok halmazát, melyeknek van szomszédja $X$-ben.*

A tételt rögtön kicsit általánosabb alakban igazoljuk. Definiáljuk egy $X \subseteq S$ halmaz **hiányát** a $h(X) := (|X| - |\Gamma(X)|)$ értékkel és legyen $\mu = \mu(G, S)$ a maximális hiány, azaz

$$\mu := \max_{X \subseteq S} h(X) \tag{3.13}$$

**TÉTEL 3.39** *Egy $G = (S, T; E)$ páros gráfban egy párosítás által nem fedett $S$-beli pontok minimális száma egyenlő $\mu$-vel.*

**Biz.** A max $\leq$ min egyenlőtlenség nyilván fennáll. A fordított irány igazolásához legyen $M$ egy maximális (azaz $\nu$ elemű) párosítás és $L$ egy minimális (azaz $\tau = \nu$ elemű) lefogás. Legyen $X := S - L$. Ekkor $M$ pontosan $|S| - \nu$ elemét nem fedi $S$-nek. Másrészt $\Gamma(X) \subseteq L - S$ és így $|X| - |\Gamma(X)| \geq |S - L| - |L - S| = |S| - |L| = |S| - \tau = |S| - \nu$. •

Legyen $\mathcal{F}$ az $S$ maximális (azaz $\mu$) hiányú részhalmazainak rendszere, vagyis $\mathcal{F} := \{X \subseteq S : |X| - |\Gamma(X)| = \mu\}$. Az $\mathcal{F}$ tagjait röviden **max-hiányú** halmazoknak fogjuk hívni. Az előbbi bizonyítás mutatja, hogy egy-egy értelmű kapcsolat áll fenn a minimális lefogások és a max-hiányú $S$-beli halmazok között: Ha $L$ minimális lefogás, akkor $S - L$ max-hiányú halmaz, míg ha $H \subseteq S$ max-hiányú halmaz, akkor $\Gamma(H) \cup (S - H)$ minimális lefogás lesz.

**Lemma 3.40** *$\mathcal{F}$ zárt a metszet és unió képzésre.*

**Biz.** Könnyű ellenőrizni, hogy a $h$ függvény szupermoduláris, azaz $h(X)+h(Y) \leq h(X\cap Y)+h(X\cup Y)$. Tegyük most fel, hogy $X$ és $Y$ két maximális hiányú halmaz (azaz $\mathcal{F}$ elemei). Ekkor $\mu + \mu = h(X) + h(Y) \leq h(X \cap Y) + h(X \cup Y) \leq \mu + \mu$, és emiatt valóban $h(X \cap Y) = \mu, h(X \cup Y) = \mu$. •

A lemmából következik, hogy az összes max-hiányú halmaz metszete is és uniója is max-hiányú, azaz létezik egy egyértelmű legszűkebb és egy legbővebb max-hiányú halmaz. Megjegyzendő, hogy Kőnig fenti alternáló utas algoritmusa segítségével e két halmaz könnyen megkonstruálható. Például, a legszűkebb $K$ max-hiányú halmaz, amint azt könnyű kimutatni, éppen $Z \cap S$ lesz, ahol $Z$ jelölte az irányított segédgráfban az $R_S$-ből elérhető pontok halmazát. Ez egyúttal azt is mutatja, hogy az algoritmus által produkált $(S - K \cup \Gamma(K))$ lefogás nem függ az algoritmus futásától (szemben az algoritmus által szolgáltatott párosítással). A súlyozott párosítási algoritmus bizonyításához szükségünk lesz még az alábbi hasznos megfigyelésre.

**Lemma 3.41** *Legyen $K \subseteq S$ a legszűkebb max-hiányú halmaz $G$-ben. Ha a gráfból kitöröljük az összes olyan élt, amely $\Gamma(K)$ és $S - K$ között vezet, akkor a létrejövő $G'$ gráfban a maximális hiány ugyanaz, mint $G$-ben. Továbbá $G$ és $G'$ max-hiányú halmazainak rendszere ugyanaz.*

**Biz.** Miután $G$ egy $M$ maximális párosításának a $\Gamma(K)$-t fedő élei mind $K$-ban végződnek, az $M$ benne van $G'$-ben is, vagyis $G'$ max hiánya legfeljebb akkora, mint $G$-é, de persze kisebb nem lehet, mert $G'$ részgráfja $G$-nek. Ebből az is következik, hogy a $G$ egy max-hiányú halmaza $G'$-ben is max-hiányú. Legyen most $X$ tetszőleges max-hiányú halmaz $G'$-ben. Mivel $K$ max-hiányú $G'$-ben is, a 3.40 lemma szerint $K \cap X$ is max-hiányú $G'$-ben. De akkor $K \cap X$ max-hiányú $G$-ben, hiszen $K \cap X$ből indulo'élt nem töröltünk, és így a $K$ minimalitása folytán $K \subseteq X$. Ekkor viszont $\Gamma(X) = \Gamma'(X)$, azaz $X$ max-hiányú $G$-ben is. •

### 3.6.2 Maximális súlyú párosítások

Tételezzük most fel, hogy a páros gráf élein adott egy $c \geq 0$ (nem feltétlenül egészértékű) súlyfüggvény. Súlyozott párosításokra vonatkozóan több kérdést is feltehetünk. Például keressünk maximális súlyú párosítást, adott $k$-ra maximális súlyú $k$ élű párosítást, maximális súlyú teljes párosítást, minimális súlyú teljes párosítást. Most ezek közül a maximális súlyú teljes párosítás kérdését vizsgáljuk meg és ehhez feltesszük, hogy $G$-nek van **teljes** (azaz minden pontot fedő) párosítása. A lefogás általánosításaként nevezzünk egy pontokon értelmezett $\pi$ függvényt **súlyozott lefogásnak,** ha minden $uv$ élre $\pi(u) + \pi(v) \geq c(uv)$. Egy élt **pontosnak** fogunk nevezni ($\pi$-re nézve), ha itt egyenlőség áll. A $\pi$ súlyozott lefogás $\pi(V)$ **súlyán** a $\sum(\pi(v) : v \in A \cup B)$ összeget értjük. (Itt $V = S \cup T$).

Amennyiben $Q$ jelöli a gráf pont-él incidencia mátrixát, úgy a $\max\{cx : Qx = 1, x \geq 0\}$ lineáris program egészértékű megoldásai automatikusan $0 - 1$ értékűek, azaz éppen a teljes párosítások incidencia vektorai. A $\{\pi : \pi A \geq c\}$ duális poliéder egy eleme éppen egy súlyozott lefogás. Az alábbi tétel, (amely nem más, mint a 3.13 tétel) tartalma az, hogy a primál optimum mindig egészen vektoron felvétetik ($c$ egészértékűségétől függetlenül), míg a duál optimum egészértékű $c$ esetén egész vektoron felvétetik.

**TÉTEL 3.42 (Egerváry)** *tegyük fel, hogy a $G = (S, T; E)$ páros gráfnak létezik teljes párosítása. A teljes párosítások maximális $\nu_c$ súlya egyenlő a súlyozott lefogások minimális $\tau_c$ súlyával. Amennyiben $c$ egészértékű, az optimális $\pi$ is választható egészértékűnek.*

**Biz.** Legyen $M := \{u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n\}$ tetszőleges teljes párosítás $G$-ben, és $\pi$ egy súlyozott lefogás. Ekkor $c(M) := \sum c(u_iv_i) \leq \sum(\pi(u_i) + \pi(v_i) : i = 1, \ldots, n) = \pi(V)$, amiből $\nu_c \leq \pi_c$ következik. Itt egyenlőség pontosan akkor áll, ha $M$ minden éle pontos.

A fordított irányú egyenlőtlenség bizonyításához tehát kell találnunk egy $\pi$ súlyozott lefogást úgy, hogy a $\pi$-re vonatkozó pontos élekből álló részgráf tartalmazzon teljes párosítást. Ennek érdekében kiindulunk egy tetszőleges $\pi$ súlyozott lefogásból (amely egészértékű, amennyiben $c$ az). Például legyen $\pi$ a $T$ pontjaiban 0, míg bármely $S$-ben levő $v$ pontra $\pi(v)$ legyen a $v$-be futó élek súlyának maximuma.

Az általános lépésben tekintjük a pontos élek által (a $V = S \cup T$ ponthalmazon) alkotott $G_\pi$ részgráfot. Legyen $M$ egy már rendelkezésre álló párosítás $G_\pi$-ben. Irányítsuk meg $M$ éleit $T$-től $S$ felé, míg az összes többi $G_\pi$-beli élt fordítva. Jelölje $R_S$ illetve $R_T$ az $S$-ben illetve a $T$-ben az $M$ által fedetlen pontok halmazát. Jelölje $Z$ az $R_S$ pontjaiból az így kapott irányított gráfban irányított úton elérhető pontok halmazát (amit például szélességi kereséssel találhatunk meg). Amennyiben $R_T$-nek esik pontja $Z$-be, akkor megkapunk egy olyan $R_S$-t és $R_T$-t összekötő $P$ utat, amely $M$-ben alternál. Most $M$ és $P$ szimmetrikus differenciája egy $M$-nél eggyel több élből álló $M'$ párosítás. Ekkor az eljárás egy fázisa véget ér, és az új $M'$ párosítással indítva iteráljuk az eljárást.

Nézzük most azt az esetet, amikor $R_T$ diszjunkt $Z$-től. Legyen $K := Z \cap S$. Mivel $G$-nek van teljes párosítása, biztosan van olyan $e$ éle $G$-nek, amely $K$ és $T - \Gamma_\pi(K)$ között vezet, ahol $\Gamma_\pi(K)$ jelöli a $K$ szomszédainak halmazát a $G_\pi$-ben. Ilyen él nem lehet pontos, így a

$$\delta := \min\{\pi(u) + \pi(v) - c(uv) : uv \in E, u \in K, v \in T - \Gamma_\pi(K)\} \tag{3.14}$$

érték pozitív. Módosítsuk $\pi$-t úgy, hogy a $K$-minden elemén $\delta$-val csökkentjük, míg $\Gamma_\pi(K)$ minden elemén $\delta$-val növeljük, azaz

$$v \in K \text{ -ra } \pi'(v) := \pi(v) - \delta, v \in \Gamma_\pi(K) \text{ -ra } \pi'(v) := \pi(v) + \delta, \text{ egyébként } \pi'(v) := \pi(v). \tag{3.15}$$

A $\delta$ választása miatt az így módosított $\pi'$ továbbra is súlyozott lefogás, amely egészértékű, ha $c$ az volt. A $\pi'$-ra vonatkozó pontos élek $G_{\pi'}$ gráfja és $G_\pi$ ugyanazon éleket feszíti $Z$-ben, továbbá. $G_{\pi'}$-nek van legalább egy éle (ahol a $\delta$-t definiáló minimum felvétetett) $K$ és $T - \Gamma_\pi(K)$ között, ezért $G_{\pi'}$-ben az $R_S$-ből elérhető pontok halmaza szigorúan bővebb, mint $G_\pi$-ben.

Így egy fázis (ami alatt a pontos élek gráfjában a maximális párosítás elemszáma nem nő) $|S|$ útkereső eljárás alkalmazása után véget ér. Mivel egy útkeresés $O(|E|)$ lépésben végrehajtható és legfeljebb $|S|$ fázis van, az algoritmus teljes futásideje $O(|E||S|^2)$. •

A tétel bizonyításában leírt eljárás a Magyar Módszer, amelyet Egerváry gondolataira támaszkodva H. Kuhn fejlesztett ki.

Megmutatjuk, hogy a maximális súlyú (nem feltétlenül teljes) párosítás meghatározásának problémája egyszerű fogással visszavezethető a maximális súlyú teljes párosítására.

**TÉTEL 3.43** *Egy $G' = (S', T'; E')$ páros gráfban nemnegatív $c$ súlyfüggvény esetén a párosítások maximális $\nu'_c$ súlya egyenlő a nemnegatív (!) súlyozott lefogások minimális $\tau'_c$ súlyával. Amennyiben $c$ egészértékű, az optimális $\pi'$ is választható egészértékűnek.*

**Biz.** A $\nu'_c \leq \tau'_c$ egyenlőtlenség nyilvánvaló, így csak a fordított iránnyal foglalkozunk. Új pontok esetleges hozzávételével elérhetjük, hogy a páros gráf két osztálya egyforma méretű legyen. Egészítsük ki a gráfot 0 súlyú élek bevételével egy $G$ teljes páros gráffá. A súlyfügvény ezen kiterjesztését továbbra is jelölhetjük $c$-vel. A 3.42 tétel (második része) szerint $G$-nek létezik egy $M$ teljes párosítása és $c$-nek egy $\pi$ nemnegatív súlyozott lefogása, melyekre $c(M) = \sum \pi(v)$. Mivel az új élek súlya 0, így az új élek kihagyásával $M$-ből keletkező $G'$-beli $M'$ párosítás súlya változatlanul $c(M)$. Miután új pontból (ha van) csak 0 súlyú él megy ki, így $\pi$ értéke az új pontokon 0, vagyis, ha $\pi$-t megszorítjuk az eredeti pontokra, akkor a kelektező $\pi'$-re $\sum \pi'(v) = \sum \pi(v)$, és így $\sum \pi'(v) = c(M')$. •

Végül megjegyezzük, hogy tetszőleges rögzített $k$ pozitív egészre Ford és Fulkerson minimális költségű folyam algoritmusának segítségével ki lehet számolni a maximális (vagy minimális) súlyú $k$ élű párosítást, ha ilyen párosítás egyáltalán létezik.

**Feladat 3.21** *Igazoljuk, hogy ha egy $M$ párosítás valamely $\pi$ súlyozott lefogásra nézve pontos élekből áll, akkor $M$ az összes vele megegyező elemszámú párosítások közül maximális súlyú!*

2002. december 17.ulinp34

## 3.7 A NÖVELŐ UTAK MÓDSZERE

Korábban a Hoffman tételre támaszkodva bebizonyítottuk a Maximális-folyam Minimális-vágás (3.29) tételt. A bizonyítás első feléből kiolvasható, hogy egy $x$ folyam maximális nagyságú, amennyiben létezik egy olyan $S$ $s\bar{t}$-halmaz, amelyre teljesülnek az alábbi **optimalitási feltételek.**

(a) $x(a) = g(a)$ minden $a$ élre, amely kilép $S$-ből, és
(b) $x(a) = 0$ minden $a$ élre, amely belép $S$-be.

Jelen célunk egy ilyen $x$ folyam és $S$ halmaz algoritmikus megkeresése. Ezt először csak egészértékű (illetve racionális) $g$ kapacitás függvény esetén tesszük meg, majd tetszőleges $g$-re. Az eljárás egyúttal új bizonyítást ad a 3.29 tételre.

A Fordtól és Fulkersontól származó algoritmus tetszőleges $x$ megengedett $st$-folyamból indul ki (például $x \equiv 0$), és azt iteratívan javítja. Készítsünk el egy $D_x = (V, A_x)$ digráfot a következőképp. Egy $uv$ él $A_x$-hez tartozik, ha vagy (i) $uv \in A$ és $x(uv) < g(uv)$, és ekkor ezen élét $D_x$-nek **előre** élnek hívjuk, vagy (ii) $vu \in A$ és $x(vu) > 0$, és ekkor $uv$ neve **hátra** él. Jelölje $S$ az $s$-ből $D_x$-ben elérhető pontok halmazát.

**1. Eset** *$t \notin S$, azaz $t$ nem érhető el $s$-ből.* Mivel $D_x$ semelyik éle sem lép ki $S$-ből, az (a) és (b) optimalitási feltételek teljesülnek és az algoritmus végetér: az adott $x$ folyam nagysága egyenlő $\delta_g(S)$-sel.

**2. Eset** *$t \in S$, azaz $t$ elérhető $s$-ből.* Legyen $P$ tetszőleges $s$-ből $t$-be vezető irányított út $D_x$-ben.

Legyen $\Delta_1 := \min(g(uv) - x(uv) : uv$ előre éle $P$-nek) és $\Delta_2 = \min(x(v, u) : uv$ hátra éle $P$-nek). Legyen $\Delta = \min(\Delta_1, \Delta_2)$. Ekkor $\Delta$ pozitív. Nevezzük $P$ egy élét **kritikusnak,** ha $\Delta$ ezen az élen éretik el.

Módosítsuk $x$-t a következőképp. Ha $uv$ előre éle $P$-nek, növeljük $x(uv)$-t $\Delta$-val. Ha $uv$ hátra éle $P$-nek, csökkentsük $x(vu)$-t $\Delta$-val. Könnyen látható, hogy a módosított $x'$ megengedett folyam lesz, amelynek nagysága $\Delta$-val nagyobb, mint $x$-é. Következésképp, ha $g$ egészértékű, akkor a 2. eset csak véges sokszor fordulhat elő, vagyis véges sok növelés után az 1. eset következik be, amikor is az algoritmus véget ér. Tehát egész kapacitások esetén új bizonyítást kaptunk az MFMC tételre. •

Amennyiben $g$ racionális, a nevezők legkisebb közös többszörösével a kapacitásokat végigszorozva visszajutunk az egész kapacitású esethez. Ha viszont $g$ irracionális, akkor a fenti eljárás nem biztosan ér véget véges sok lépésben (amint az példával demonstrálható). Másik hátrány, hogy még egész kapacitások esetén is az iterációk száma arányos lehet az előforduló legnagyobb kapacitás nagyságával. Így az algoritmus bonyolultsága az input méretének exponenciális függvényével arányos, azaz nem polinomiális. (Egy szám nagysága a jegyei számának exponenciális függvénye.)

### 3.7.1 A skálázási technika

Az alábbiakban bemutatunk egy igen ügyes fogást, amelynek segítségével bizonyos eljárásokat polinomiális futásidejűvé lehet tenni. Használatát a maximális folyam problémán szemléltetjük, mert ott igen egyszerű, de számos alkalommal bonyolultabb körülmények között is használható.

Tételezzük fel, hogy a kapacitások egész számok és kettes számrendszerben vannak megadva. A legnagyobb kapacitás álljon $M$ jegyből. Összesen $M$ darab folyam problémát fogunk megoldani, mindegyikben a megelőzően megkapott maximális folyamot használjuk kiindulási folyamként. Jelölje $g_i$ azt a kapcitás függvényt, amely úgy áll elő, hogy minden élen az eredeti kapacitásnak (balról) az első $i$ jegyét tekintjük, míg a többit eltöröljük. Tegyük fel, hogy a $g_i$ kapacitás függvényre nézve már meghatároztuk az $x_i$ maximális folyamot. Ekkor $2x_i$ megengedett folyam a $g_{i+1}$-re nézve. A $2x_i$-ből kiindulva alkalmazzuk a fent leírt növelő út módszert a $g_{i+1}$ kapacitás függvényre vonatkozólag.

Miután minden $e$ élre $g_{i+1}(e)$ értéke vagy $2g_i(e)$ vagy $2g_i(e) + 1$, legfeljebb élszámnyi növelés után megkapjuk az $x_{i+1}$ maximális folyamot (a $g_{i+1}$-re nézve). Összesen tehát legfeljebb $M|A|$ növelés segítségével megkonstruáltunk egy eredeti kapacitásokra vonatkozó maximális folyamot.

### 3.7.2 Legrövidebb növelő utak

A fenti eljárás hátránya, hogy csak egész (és így racionális) kapacitásokra működik. Vagyis általános kapacitások esetén még mindig nincs konstruktív bizonyításunk az MFMC tételre. Ezen nehézség leküzdésére J. Edmonds and R. Karp [1972] és E.A. Dinitz [1970] javasolták, hogy minden iterációban a legkisebb élszámú növelő utat válasszuk. Ez az egyszerű megszorítás lehetővé teszi, hogy a Ford-Fulkerson algoritmus bonyolultságát $|V|$ és $|A|$ polinomjával korlátozzuk, függetlenül a kapacitások nagyságától. (Ezt persze úgy értve, hogy a számokkal végzett alapműveleteket egyetlen lépésnek tekintjük.)

Jelölje $\sigma_x(v)$ a $v$ távolságát $D_x$-ben $s$-től. (Ha nincs egyáltalán $s$-ből $v$-be út, akkor $\sigma_x(v) = \infty$). Legyen $P$ egy legrövidebb út $D_x$-ben $s$-ből $t$-be. Ekkor $P$ mindegyik $uv$ élére, $\sigma_x(v) = \sigma_x(u) + 1$.

**Lemma 3.44** *Amikor $P$ mentén végrehajtunk egy növelést, a $\sigma_x(v)$ érték semmilyen $v$-re sem csökken.*

**Biz.** Nézzük meg milyen hatással van a növelés a $D_x$ segédgráfra. Mivel a folyamot $D$-nek csak olyan élein változtattuk, melyek $P$ éleinek felelnek meg, $D_x$ csupán $P$ éleinél változhat. Éspedig, $D'_x$ lehetséges új élei $P$ élei megfordítva, ugyanakkor $P$ kritikus élei (ahol $\Delta$ felvététetik) eltűnnek $D_x$-ből. A $v$ pont $s$-től való távolsága csak akkor csökkenhetne, ha olyan $uw$ éleket adnánk a segédgráfhoz, melyekre $\sigma_x(w) > \sigma_x(u) + 1$, amiből a lemma következik. •

A növelések sorozatát fázisokra bontjuk. Egy fázis során $\sigma_x(t)$ ugyanaz marad. A lemma szerint legfeljebb $|V| - 1$ fázis lehetséges.

**Lemma 3.45** *Egy fázison belül legfeljebb $|A|$ növelésre kerülhet sor.*

**Biz.** Jelölje $\sigma_i(v)$ a $v$ pont távolságát $s$-től az $i$ fázis kezdetén az aktuális segédgráfban. Nevezzünk egy $uv$ élt **$i$-szorosnak,** ha $\sigma_i(v) = \sigma_i(u) + 1$. Az $i$-dik fázis során csupán $i$-szoros éleket használunk. Tudjuk, hogy egy növelés legalább egy $i$-szoros élt eltüntet az aktuális segédgráfból és nem hoz be új $i$-szoros élt. Mivel a segédgráfnak legfeljebb $|A|$ darab $i$-szoros éle van, a lemma következik. •

Mindezeket összetéve kapjuk, hogy legfeljebb $|V||A|$ növelésre van szükségünk. Egyetlen növelés $O(|A|)$ lépést igényel, így az algoritmus össz-bonyolultsága $O(|V||A|^2)$.

Miután a fenti algoritmusban választási lehetőségünk lehet a legrövidebb növelő út meghatározásában, a végül kapott maximális folyam függhet ezen választásoktól. Nem így a végső $S$!

**Feladat 3.22** *(a) A végül kapott minimális $\delta^+(S)$ vágás független az algoritmus futásától. (b) Ha $X$ és $Y$ minimalizálja az $\delta_g(Z)$ értéket az összes $s\bar{t}$-halmazra, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is minimalizáló $s\bar{t}$-halmazok. (c) A minimalizáló halmazok metszete $S$.*

**Feladat 3.23** *Adott $e$ élre hogyan lehet eldönteni, hogy (a) létezik-e olyan maximális folyam, amely telíti $e$-t, (b) minden maximális folyam telíti $e$-t.*

**Feladat 3.24** *Algoritmikusan határozzuk meg az összes $\{x, y\}$ rendezett csúcspárt, amelyre létezik olyan $X$ halmaz, hogy $s, x \in X, y \in V - X$ és $X$ minimális vágást határoz meg.*

2002. december 17.ulinp35

## 3.8 MINIMÁLIS KÖLTSÉGŰ FOLYAMOK

Legyen adva $D = (V, A)$ irányított gráf az $s$ forrás- és a $t$ nyelőponttal. Adott még az éleken a $g$ nemnegatív kapacitás függvény és a $c$ nemnegatív költségfüggvény. Feltesszük, hogy $g$ egészértékű. Korábban már láttuk, hogy miként lehet egy maximális $M$ nagyságú $s$-ből $t$-be vezető folyamot polinom időben kiszámítani. Most minden 0 és $M$ közé eső $k$ egészre szeretnénk találni egy olyan $k$ nagyságú folyamot, melynek költsége minimális. Egy $z$ folyam **költségét** a $cz = \sum(c(e)z(e) : e \in A)$ skaláris szorzattal definiáljuk. Azt mondjuk, hogy a $z$ $st$-folyam **minimális költségű folyam,** ha $z$ a legkisebb költségű a megengedett, $z$-vel azonos nagyságú $st$-folyamok közül.

Az alábbiakban ismertetjük Ford és Fulkerson [1962] algoritmusát. Legyen $\pi : V \to \mathbf{Z}_+$ olyan függvény a $V$-n, amelyre $\pi(s) = 0 \leq \pi(v) \leq \pi(t)$ minden $v \in V$-re. Ilyen függvényt **potenciálnak** hívunk. Használni fogjuk a következő jelölést. $\bar{c}(uv) = c(uv) - \pi(v) + \pi(u)$, ahol $uv \in A$. Potenciálok segítségével egy $z$ folyam $cz$ költségére az alábbi alsó korlátot nyerhetjük.

$\sum c(uv)z(uv) = \sum(\pi(v) - \pi(u))z(uv) + \sum \bar{c}(uv)z(uv) = \pi(t)k + \sum(\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) < 0) + \sum(\bar{c}(uv)z(uv) : \bar{c}(uv) > 0) \geq \pi(t)k + \sum \bar{c}(uv)g(uv) + 0.$

Ebből következik, hogy egy $z$ folyam bizonyosan minimális költségű, amennyiben létezik olyan $\pi$ potenciál, amelyre az egyenlőtlenség egyenlőséggel teljesül. Ez pontosan akkor van így, ha fennáll a következő két optimalitási feltétel.

$$\pi(v) - \pi(u) < c(uv) \Rightarrow z(uv) = 0, \qquad (i)$$

$$\pi(v) - \pi(u) > c(uv) \Rightarrow z(uv) = g(uv). \qquad (ii)$$

[Tetszőleges $\pi$ potenciálra a $\pi(v) - \pi(u)$ potenciál különbség egy semleges költségfüggvényt definiál az élhalmazon abban az értelemben, hogy minden $k$ nagyságú folyamnak ugyanaz a költsége, éspedig $k(\pi(t) - \pi(s))$. Így, ha a $c$ költségfüggvényt egy potenciál különbséggel eltoljuk, akkor a kapott $\bar{c}(uv) := c(uv) - (\pi(v) - \pi(u))$ költségfüggvény ekvivalens az eredetivel. Ennek alapján az optimalitási feltételeket úgy is lehet interpretálni, hogy egy $z$ folyam akkor és csak akkor minimális költségű, ha létezik egy olyan $\bar{c}$ ekvivalens költségfüggvény, amely ha egy $uv$ élen pozitív, úgy a folyam a minimumon van, azaz $z(uv) = 0$, míg ha $\bar{c}(uv)$ negatív, úgy a folyam a maximumon van, azaz $z(uv) = g(uv)$.]

Ford és Fulkerson módszere a maximális folyam kiszámítására vonatkozó Ford-Fulkerson algoritmus finomításának tekinthető. Minden lehetséges egész $k$ értékre megkonstruálunk egy minimális költségű $k$ nagyságú folyamot. Az eljárás az azonosan nulla folyammal és az azonosan nulla potenciállal indul. Ezután a folyam nagyságát növeljük egyenként, illetve menetközben néha a potenciált növeljük úgy, hogy az optimalitási feltételek végig fennállnak. Az algoritmus akkor ér véget, amikor maximális nagyságú folyamot illetve egy minimális vágást kaptunk.

**ITERATÍV LÉPÉS** Az általános helyzetben adott a $z$ folyam és a $\pi$ potenciál, és ezek kielégítik az (i) és (ii) feltételeket. Megkonstruálunk egy $D' = (V, A')$ segédgráfot a következőképpen. $D'$-nek kétféle éle van: előre és hátra. Egy $uv$ él **előre él,** ha $uv \in A, \bar{c}(uv) = 0$ és $z(uv) < g(uv)$. Egy $uv$ él **hátra él,** ha $vu \in A, \bar{c}(vu) = 0$ és $z(vu) > 0$.

Legyen $S$ az $s$-ből $D'$-ben irányított úton elérhető pontok halmaza. Két eset lehet.

**1. Eset** *$t \notin S$, azaz $t$ nem elérhető $s$-ből.*

Legyen $\varepsilon_1 = min(\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(S), z(uv) < g(uv))$ és $\varepsilon_2 = min(-\bar{c}(uv) : uv \in \delta^+(V-S), z(uv) > 0)$, ahol az üres halmazon vett minimumot $\infty$-nek definiáljuk. Legyen $\varepsilon = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Az optimalitási feltételek és az $S$ definíciója miatt $\varepsilon$ pozitív.

Amennyiben $\varepsilon = \infty$, akkor az algoritmus végetér. Ebben az esetben az $S$-ből kilépő eredeti élek mind telítettek, míg az $S$-be belépő eredeti élek mindegyikén a folyam nulla. Így tehát $\delta_g^+(S) = val(z)$, az aktuális $z$ folyam maximális nagyságú és az $S$-ből kilépő élek halmaza minimális vágást határoz meg.

Legyen most $\varepsilon < \infty$, és módosítsuk $\pi$-t úgy, hogy minden $v \in V - S$-re növeljük $\pi(v)$-t $\varepsilon$-nal. Az $S$ és az $\varepsilon$ definíciójából rögtön kapjuk:

**Állítás 3.46** *A módosított potenciál és a változatlanul hagyott $z$ folyam kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Készítsük el az új segédgráfot és ismételjük meg az eljárást. Figyeljük meg, hogy a segédgráfban a régi $S$ által feszített élek változatlanok maradnak és ezért az $s$-ből elért pontok halmaza szigorúan bővebb lesz, mint $S$. Ezért az 1. eset legfeljebb $|V|-1$-szeri előfordulása után biztosan vagy az $\varepsilon = \infty$ következik be, vagypedig az alábbi 2. eset.

**2. Eset** *$t \in S$, vagyis $t$ elérhető $s$-ből.* Legyen $P$ a $D'$-ben egy $s$-ből $t$-be vezető irányított út. Módosítsuk $z$-t a következőképpen. Legyen $z'(uv) = z(uv) + 1$, ha $uv$ a $P$-nek előre éle és legyen $z'(uv) = z(uv) - 1$, $vu$ a $P$-nek hátra éle.

A módosításból adódik:

**Állítás 3.47** *A módosított folyam és változatlanul hagyott potenciál kielégíti az optimalitási feltételeket.*

Ezzel az algoritmus leírását be is fejeztük. Mi mondható az eljárás futásidejéről? Lényegében $M$ darab növelésre van szükségünk (2. eset), így az eljárás polinomimális, amennyiben mind az $M$ minimális költségű folyamot meg kell határoznunk.

Elképzelhető persze olyan helyzet is, amikor például csak egy maximális nagyságú minimális költségű folyamot kell kiszámítanunk. Ebben az esetben az algoritmus természetesen nem biztosan polinomiális, hiszen lépésszáma az $M$ nagyságával arányos. De még ebben az esetben is két fontos speciális eset kezelhető.

Ha a legnagyobb kapacitás nem túlságosan nagy (nevezetesen, ha $|V|$ polinomjával korlátozható), akkor a fenti eljárás nyilván polinomiális, függetlenül attól, hogy a $c$ költség-függvény egészértékű-e vagy sem.

Tegyük most fel, hogy a kapacitások tetszőlegesek, a költség-függvény egészértékű és "kicsi". Ekkor az algoritmus következő módosítása erősen polinomiális algoritmust eredményez. Tekintsük az algoritmus egy közbenső helyzetét, amikor egy $\pi$ potenciál rendelkezésre áll. A szoros élek digráfjában (egy $uv$ él **szoros,** ha $\bar{c}(uv) = 0$) számítsunk ki (a Max-flow Min-cut algoritmusssal) egy maximális nagyságú $z$ folyamot és egy $S$ minimális ki-kapacitású $s\bar{t}$-halmazt. Ha $D$-ben minden $S$-be belépő és $S$-ből kilépő él szoros, akkor $S$ minimális vágást határoz meg és az aktuális $z$ folyam maximális nagyságú, amely kielégíti az optimalitási feltételeket. Ebben az esetben az algoritmus véget ér.

Amennyiben $D$-nek létezik nem-szoros éle, amely $S$-be be- vagy kilép, akkor $\varepsilon$, ahogy azt fentebb az 1. esetnél kiszámítottuk, véges lesz. Módosítsuk $\pi$-t úgy, mint az előbb, azaz minden $v \in V - S$-re növeljük $\pi(v)$-t $\varepsilon$-nal.

Azt állítjuk, hogy a $\pi(t)$ érték a $D$ digráf valamely (irányítatlan értelemben vett) $s$-ből $t$-be vezető útjának a költsége. Valóban, minden folyam-növeléskor a segédgráfban van olyan $st$ út, amely szoros élekből áll.

Következik, hogy a különböző $\pi(t)$ értékek száma (vagyis az 1. eset előfordulásainak száma) felülről korlátozható az élek össz-költségével. Tehát az eljárás polinomiális, ha a $c$ egészértékű és legnagyobb értéke $|V|$ polinomjával korlátozható.

Van olyan példa (sorozat), amely azt mutatja, hogy ha $c$-nek csak az egészértékűségét tesszük fel, akkor az algoritmus nem polinomiális.

**Feladat 3.25** *Igazoljuk, hogy tetszőleges $c$ esetén a fenti algoritmus véges sok lépésben véget ér.*

2002. december 17.ulinp36