Operációkutatási verseny, 2009, I. forduló

A következő feladatok megoldásában szabad használni ismert algoritmusokat, tételeket, vagy hivatkozni ilyenekre. De ez csak akkor számít teljes értékűnek, ha szerepel a használt eredmény elérhetőségi helye. (Pl. Tavaly az ilyen-olyan előadásban szerepelt a max-folyam/min-vágás tétel, VAGY, a wikipedia ez-és-ez szócikkében olvasható a Kruskal algoritmus, stb.) Általánosítások, kiterjesztések után többlet pont jár.

1. Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, amelyben s és t két kijelölt csúcs. Tervezzünk olyan polinomiális futásidejű algoritmust, amely megad egy s-et tartalmazó S halmazt és egy t-t tartalmazó T halmazt, melyek diszjunktak és a befok összegük a lehető legkisebb. (Egy halmaz befoka a bemenő élek száma).

2. Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf, amelyben s és t két kijelölt csúcs. Adott továbbá a csúcsok részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Tervezzünk polinomiális futásidejű algoritmust egy olyan út keresésére s és t között, amely az $\mathcal{F}$ minden X tagjára legfeljebb egy X és $V - X$ között haladó élt használ. Mi mondható, ha a gráf irányított?

3. Legyen $G = (V, E)$ irányítatlan gráf. Adott a csúcsok részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszere. Tervezzünk polinomiális futásidejű algoritmust egy olyan feszítő fa keresésére, amely az $\mathcal{F}$ minden tagjába pontosan egyszer lép bele.

4. Egy irányított gráf élein adott egy nemnegatív költségfüggvény. Ismeretes, hogy a Dijkstra algoritmus segítségével hatékonyan meg lehet keresni egy legolcsóbb utat s-ből t-be. Miként lehetne algoritmikusan eldönteni, hogy létezik-e két darab legolcsóbb út s-ből t-be, melyek a végpontjaiktól eltekintve pontdiszjunktak.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy aciklikus digráf éleinek van olyan F részhalmaza, amely egyrészt minden egyirányú vágást lefog, másrészt minden él benne van pontosan egyszer lefogott egyirányú vágásban. (Amennyiben a csúcsok egy valódi nemüres X részhalmazából nem lép ki él, úgy az X-be belépő élek halmazát egyirányú vágásnak nevezzük).

6. Adott a P irányított út részútjainak egy $\mathcal{P}$ rendszere úgy, hogy P minden éle páros sok $\mathcal{P}$-beli útban van benne. Készítsünk hatékony algoritmust, amely pirossal vagy kékkel színezi a $\mathcal{P}$-beli utakat úgy, hogy P minden éle ugyannyi piros útban van, mint kékben.

7. Egy városban, amelyben éppúgy lehetnek egyirányú, mint kétirányú utcák, adott s pontból szeretnénk adott t pontba egy olyan utat megtervezni, amelyen leghamarabb s-ből t-be érünk. Minden utca két egymást követő keresztutca közötti szakaszához ismert az áthaladási idő. Bizonyos kereszteződésekben nem lehet balra fordulni, másokban meg jobbra. Egyes lámpás kereszteződésekben a balra fordulás időbe telik: ez is meg van adva. Dolgozzunk ki modellt a probléma kezelésére.

Beadási határidő: 2009. október 1. 10:00 az előadásomon.

(Frank András)