Operációkutatási verseny, 2009, II. forduló

A következő feladatok megoldásában szabad használni ismert algoritmusokat, tételeket, vagy hivatkozni ilyenekre. De ez csak akkor számít teljes értékűnek, ha szerepel a használt eredmény elérhetőségi helye. Általánosítások, kiterjesztések után többlet pont jár.

1. A lineáris algebra egyik alaperedménye szerint véges sok vektorból álló S halmazból úgy lehet maximálisan sok lineárisan függetlent kiválasztani, hogy tetszőleges sorrendben egymás után választunk elemeket S-ből, csak arra ügyelve, hogy a kiválasztott vektorok lineárisan függetlenek legyenek. Tegyük most fel, hogy S minden eleméhez egy nemnegatív súlyt rendelünk és olyan lineárisan független vektorokat akarunk kiválasztani, melyek súly-összege a lehető legnagyobb. Bizonyítsuk be, hogy ha az előbbi algoritmusban az S elemeit az adott súlyozás szerint csökkenő sorrendben tekintjük, akkor a végül kapott lineárisan független vektor rendszer a lehető legnagyobb súlyú lesz.

2. Tegyük fel, hogy egy $D = (V, A)$ irányított gráfban létezik k élidegen st-út. Legyen c nem-negatív költségfüggvény az éleken. A feladat olyan $D' = (V, A')$ minimális összköltségű részgráfot keresni, amelyben még mindig van k élidegen st-út. Ennek érdekében keressünk egy legolcsóbb st-utat, ennek éleit fordítsuk meg és a költségeit negáljuk. A keletkező digráfban keressünk legolcsóbb st-utat a módosított költségfüggvényre nézve, ennek éleit fordítsuk meg és a költségeit negáljuk, és így tovább: az útfordító-költség módosító eljárást összesen k-szor hajtsuk végre. Mutassuk meg először, hogy minden közbenső költségfüggvény konzervatív, majd igazoljuk, hogy a D azon éleinek $D' = (V, A')$ részgráfja, melyek a végül kapott digráfban megfordítva szerepelnek teljesíti a kívánalmat.

3. Egy $D_0 = (V, A_0)$ irányított gráfot szeretnénk Eulerré tenni egy másik $D = (V, A)$ digráf bizonyos éleinek hozzávételével (ahol esetleg a D összes élét használhatjuk vagy egyiket sem, de minden élt legfeljebb csak egy példányban). Dolgozzunk ki szükséges és elegendő feltételt valamint egy hatékony algoritmust az Eulerrá tevésre. (Egy digráf definíció szerint Euler, ha minden pontjában a be-fok egyenlő a ki-fokkal.)

4. Egy szót palindromának nevezünk, ha visszafelé olvasva ugyanazt a szót kapjuk. Fejlesszünk ki algoritmust, amely egy megadott szót minimálisan sok új betü hozzávételével palindromává alakít.

5. Adott egy $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf. Adjunk algoritmust annak eldöntésére, hogy létezik-e a V csúcshalmaznak olyan $\mathcal{P}$ partíciója, amelyre a legalább két partíció részt metsző hiperélek száma kevesebb, mint $|\mathcal{P}|$.

Beadási határidő: 2009. október 22. 10:00 az előadásomon.

(Frank András)