Operációkutatási verseny, 2011

IV. forduló

Beadási határidő: 2011.12.16., az előadás kezdete

1. Igazoljuk, hogy az $Ax = 0$ egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik seholsem nulla megoldása, ha A minden oszlopa lineárisan függ a többitől.
2. Adott egy polinomiális eljárás, amely eldönti, hogy egy tetszőleges $k \times n$-es A mátrixra és b k-dimenziós vektorra van-e megoldása az $\{Ax \leq b, x \geq 0\}$ rendszernek. Adjunk polinomiális eljárást, amely ennek felhasználásával eldönti, hogy van-e megoldása az $\{A_1 x \leq b\}$ rendszernek, ahol A_1 egy adott $k \times (n-1)$-es mátrix.
3. Legyen C egy ferdén szimmetrikus mátrix, azaz $C^T = -C$. Bizonyítsuk be, hogy

   (a) vagy létezik $x \geq 0$, hogy $Cx \geq 0$ és x első komponense pozitív, vagy létezik $x \geq 0$, hogy $Cx \geq 0$ és Cx első komponense pozitív;

   (b) $\exists x \geq 0 : Cx \geq 0, Cx + x \gg 0$, ahol $z \gg 0$ azt jelenti, hogy z minden komponense szigorúan pozitív.
4. Legyen az A mátrix minden eleme nemnegatív, és tegyük fel, hogy az $Ax \leq b, x \geq 0, \max cx$ feladatot meg tudjuk oldani $c \geq 0$ esetén. Adjunk algoritmust tetszőleges célfüggvényre.
5. Adott egy G irányítatlan gráf minden csúcsában egy lámpa és egy kapcsoló. Ha egy csúcs kapcsolóját megnyomjuk, a csúcs és szomszédainak lámpái átkapcsolódnak (ha égtek, kialszanak, és fordítva). A lámpák kezdetben nem égnek. Igazoljuk, hogy fel tudjuk kapcsolni az összes lámpát. Karakterizáljuk azon csúcshalmazokat, hogy olyan állásba kapcsolhatók a lámpák, hogy pontosan ezen halmaz lámpái égjenek!

A feladatok megoldásában szabad használni ismert algoritmusokat, tételeket, vagy hivatkozni ilyenekre, de ekkor fel kell tüntetni a használt eredmény elérhetőségi helyét (pl. tavaly az ilyen-olyan előadáson szerepelt, VAGY a wikipédia ez-és-ez szócikkében olvasható, stb.) Általánosítások, kiterjesztések után többletpont jár.